Карпатські математичні публікації

Науковий журнал

Т.2, №1

2010

Зміст

Carpathian mathematical publications

SCIENTIFIC JOURNAL

V.2, №1

2010

CONTENTS

Карпатские математические публикации

Научный журнал

Т.2, №1

2010

Содержание

Карпатські математичні публікації. Т.2, №1 | Carpathian Mathematical Publications. V.2, №.1

УДК 517.51

Волошин Г.А., Маслюченко В.К.

ПРО НАБЛИЖЕННЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ, 2π-ПЕРІОДИЧНИХ ВІДНОСНО ДРУГОЇ ЗМІННОЇ

Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Про наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 4–14.

За допомогою операторів Джексона і Бернштейна ми доводимо, що для кожного топологічного простору X і довільної нарізно неперервної функції $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка є 2π-періодичною відносно другої змінної, існує така послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої функції $f_n^x = f_n(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – це тригонометричні поліноми і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$.

Вступ

Зважаючи на відому теорему Вейєрштасса про рівномірне наближення неперервних на відрізку функцій алгебраїчними поліномами [8, с. 98], природно розглянути таке питання: чи для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ існує така послідовність функцій $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, неперервних відносно першої змінної і поліноміальних відносно другої, що послідовність поліномів $f_n^x = f_n(x, \cdot)$ для кожного $x \in [0,1]$ рівномірно прямує до функції $f^x = f(x, \cdot)$ на відрізку $[0,1]$. У праці [1] за допомогою операторів Бернштейна $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$, які на неперервну функцію $g \in C[0,1]$ діють за правилом

$$(B_n g)(y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g\Big(\frac{k}{n}\Big) y^k (1-y)^{n-k},$$

де $0 \le y \le 1$, було показано, що для довільного топологічного простору X та кожної нарізно неперервної функції $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ функції

$$f_n(x, y) = (B_n f^x)(y),$$

де $x \in X$, $y \in [0,1]$ є сукупно неперервними і поліноміальними відносно другої змінної, причому $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$ для кожного $x \in X$. Тут запис $h_n \rightrightarrows h$ на Y означає, звичайно ж, рівномірну збіжність h_n до h, тобто $\|h_n - h\| = \sup\limits_{x \in Y} |h_n(y) - h(y)| \to 0$ при $n \to \infty$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 65D15.
Ключові слова і фрази: нарізно неперервні функції, оператори Джексона, оператори Бернштейна.

Подібні питання можна ставити (див. [2]) і для інших методів наближення неперервних функцій чи ще якихось об'єктів. Тут ми вивчаємо споріднене питання, що пов'язане з другою теоремою Вейєрштрасса про рівномірне наближення тригонометричними поліномами [8, с. 398]. За допомогою операторів Джексона або Бернштейна ми встановлюємо, що для кожного топологічного простору X і довільної нарізно неперервної функції $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка є 2π-періодичною відносно другої змінної, існує така послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої функції $f_n^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – це тригонометричні поліноми, і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$. Ми також з'ясовуємо, що оператори Фейєра годяться лише для наближення сукупно неперервних функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які є 2π-періодичними відносно другої змінної, встановивши, що вони – неперервні в топології рівномірної збіжності, але розривні в топології поточкової збіжності.

Ці результати було анонсовано в [3].

1 Позначення і допоміжні результати

На просторі $C(Y)$ всіх неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$, заданих на топологічному просторі Y, розглянемо локально опуклу топологію $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності, яка задається сукупністю переднорм

$$q_y(g) = |g(y)|,\ y \in Y.$$

Локально опуклий простір $(C(Y), \mathcal{T}_p)$ позначимо символом $C_p(Y)$.

Для компактного простору Y символом $C_u(Y)$ ми позначаємо банахів простір $(C(Y), \|\ \cdot\ \|)$ з рівномірною нормою

$$\|g\| = \max_{y \in Y} |g(y)|,$$

а символом $\mathcal{T}_u$ – топологію простору $C_u(Y)$, яка є топологією рівномірної збіжності на $C(Y)$.

Оператор $A : C(Y) \to C(Y)$ ми називаємо *pu-неперервним*, якщо він неперервний як відображення $A : C_p(Y) \to C_u(Y)$. Так само вводяться поняття *pp*-, *uu*- і *up*-неперервності.

Символом $C_{2\pi}$ ми позначаємо простір всіх неперервних 2π-періодичних функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Він буде банаховим простором відносно норми

$$\|g\| = \max_{y \in \mathbb{R}} |g(y)| = \max_{0 \le y \le 2\pi} |g(y)|,$$

яка породжує на $C_{2\pi}$ топологію рівномірної збіжності $\mathcal{T}_u$. На просторі $C_{2\pi}$ можна розглядати і топологію $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності. Топології $\mathcal{T}_p$ і $\mathcal{T}_u$ на $C_{2\pi}$ породжують відповідні типи неперервності операторів $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$. Наприклад, оператор $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – *pu*-неперервний, якщо він неперервний як відображення $A : (C_{2\pi}, \mathcal{T}_p) \to (C_{2\pi}, \mathcal{T}_u)$.

Розглянемо одиничне коло $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ з топологією, індукованою з комплексної площини $\mathbb{C}$. Зрозуміло, що $\mathbb{S}$ – це компактний простір, і ми можемо розглянути простори $C_u(\mathbb{S})$ і $C_p(\mathbb{S})$. Співставимо кожній функції $h \in C(\mathbb{S})$ функцію $g = Uh \in C_{2\pi}$, для якої

$$g(y) = h(e^{iy})$$

для кожного $y \in \mathbb{R}$. Легко перевірити, що відображення $U : C(\mathbb{S}) \to C_{2\pi}$ – це алгебраїчний ізоморфізм, який є ізометрією банахових просторів $C_u(\mathbb{S})$ і $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$ та топологічним ізоморфізмом локально опуклих просторів $C_p(\mathbb{S})$ і $(C_{2\pi}, \mathcal{T}_p)$. За допомогою цього ізоморфізму можна ототожнити простори $C_{2\pi}$ і $C(\mathbb{S})$.

Розглянемо підпростір $C_0[0, 2\pi]$ простору $C[0, 2\pi]$, який складається з таких функцій $g \in C[0, 2\pi]$, що для них $g(0) = g(2\pi)$. Відображення звуження $R : C_{2\pi} \to C_0[0, 2\pi]$, $Rg = g|_{[0,2\pi]}$ – це теж алгебраїчний ізоморфізм, який буде ізометрією, коли простори $C_{2\pi}$ і $C_0[0, 2\pi]$ наділити рівномірними нормами. Таким чином, простір $C_{2\pi}$ можна реалізувати і як підпростір $C_0[0, 2\pi]$ простору $C[0, 2\pi]$.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$ і $\varphi(x) = f^x$. Відображення $\varphi : X \to Z^Y$ називається *вертикальним розшаруванням для* f або *асоційованим з* f *відображенням.* Для топологічних просторів X та Y символом $C(X \times Y)$ $\big(CC(X \times Y)\big)$ позначається множина всіх сукупно (нарізно) неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$.

Ми будемо використовувати наступний добре відомий результат (див., наприклад, [7, твердження 2.1.2]).

Теорема 1. *Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – функція і $\varphi : X \to \mathbb{R}^Y$ – асоційоване з f відображення. Тоді:*

а) $f \in CC(X \times Y) \iff \varphi(X) \subseteq C(Y)$ і відображення $\varphi : X \to C_p(X)$ – неперервне;

б) якщо Y – компактний простір, то $f \in C(X \times Y) \iff \varphi(X) \subseteq C(Y)$ і відображення $\varphi : X \to C_u(X)$ є неперервним.

Оскільки відповідність $f \longmapsto \varphi$ є бієктивною в обох випадках, то теорема 1 дозволяє ототожнити множину $CC(X \times Y)$ з множиною $C(X, C_p(Y))$ всіх неперервних відображень $\varphi : X \to C_p(Y)$, які ми називаємо *p-неперервними*, а множину $C(X \times Y)$ – з множиною $C(X, C_u(Y))$ всіх неперервних відображень $\varphi : X \to C_u(Y)$, які ми називаємо *u-неперервними.*

Для топологічного простору X символом $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ ми позначаємо простір усіх нарізно неперервних функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які є 2π-періодичними відносно другої змінної. За допомогою ізоморфізму $U : C(\mathbb{S}) \to C_{2\pi}$ цей простір можна ототожнити з простором $CC(X \times \mathbb{S})$, а простір $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$ – з простором $C(X \times \mathbb{S})$, і на основі цього отримати такий наслідок теореми 1.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція і $\varphi : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ – асоційоване з f відображення. Тоді:*

а) $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \iff \varphi(X) \subseteq C_{2\pi}$ і $\varphi : X \to C_{2\pi}$ – p-неперервне;

б) $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R}) \iff \varphi(X) \subseteq C_{2\pi}$ і $\varphi : X \to C_{2\pi}$ – u-неперервне.

Позначимо літерою T сукупність усіх тригонометричних поліномів $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тобто функцій вигляду

$$g(y) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos ky + b_k \sin ky).$$

Очевидно, що T – це підпростір простору $C_{2\pi}$.

Нехай $CT(X \times \mathbb{R})$ – це множина тих функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких функції $f_y : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ – неперервні для кожного $y \in \mathbb{R}$, а функції $f^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – це тригонометричні поліноми для кожного $x \in X$. Зрозуміло, що $CT(X \times \mathbb{R})$ – це підпростір простору $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$.

2 Апроксимуючі послідовності операторів

Послідовність операторів $A_n : C_{2\pi} \to T$ ми називаємо *апроксимуючою* для T, якщо $A_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожної функції $g \in C_{2\pi}$.

Нехай $\alpha = p, u$ і $\beta = p, u$. Апроксимуючу послідовність операторів $A_n : C_{2\pi} \to T$ ми називатимемо *$\alpha\beta$-апроксимуючою*, якщо всі оператори A_n є *$\alpha\beta$-неперервними.*

Кожний оператор $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ породжує перетворення

$$\widetilde{A} : CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \to CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}),$$

яке кожній функції $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ ставить у відповідність функцію $\widetilde{f} = \widetilde{A}f$, що визначається на $X \times \mathbb{R}$ формулою

$$\widetilde{f}(x, y) = (Af^x)(y).$$

Нехай $\varphi(x) = f^x$ і $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{f}^x$ для кожного $x \in X$, де $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $\widetilde{f} = \widetilde{A}f$. Зрозуміло, що тоді

$$\widetilde{\varphi} = A \circ \varphi.$$

З теореми про неперервність композиції випливає, що відображення $\widetilde{\varphi}$ буде u-неперервним, коли φ – p-неперервне і A – pu-неперервне або φ – u-неперервне і A – uu-неперервне. Звідси, використовуючи теорему 2, негайно отримуємо такий результат.

Теорема 3. *а) Нехай $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – pu-неперервний оператор, $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $\widetilde{f} = \widetilde{A}f$. Тоді $\widetilde{f} \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$.*

б) Нехай $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – uu-неперервний оператор, $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$ і $\widetilde{f} = \widetilde{A}f$. Тоді $\widetilde{f} \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$.

З цієї теореми легко виводиться наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність операторів $A_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ і $f_n = \widetilde{A}_n f$. Тоді:*

а) якщо $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – pu-апроксимуюча послідовність операторів для T, то $f_n \in CT(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$ для кожного n і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$;

б) якщо $f \in C(X \times \mathbb{R})$ і $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – uu-апроксимуюча послідовність операторів для T, то $f_n \in CT(X \times \mathbb{R}) \cap C(X \times \mathbb{R})$ для кожного n і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$.

Доведення. Оскільки $A_n(C_{2\pi}) \subseteq T$, то $f_n \in CT(X \times \mathbb{R})$. Сукупна неперервність функцій f_n у кожному випадку випливає з теореми 3. Нарешті,

$$f_n^x = A_n(\varphi(x)) \rightrightarrows \varphi(x) = f^x \text{ на } \mathbb{R}$$

для кожного $x \in X$, бо послідовність операторів A_n є апроксимуючою. □

3 Оператори Фейєра

В теорії рядів Фур'є важливу роль відіграють *ядра Діріхле*:

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt,$$

і *ядра Фейєра*:

$$K_n(t) = \frac{2}{n+1}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t),$$

які є тригонометричними многочленами. Через ядро Діріхле D_n виражається n-та частинна сума

$$(S_n g)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ряду Фур'є функції $g \in C_{2\pi}$ за формулою [8, с. 381]:

$$(S_n g)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(g(x+t) + g(x-t))D_n(t)dt,$$

а через ядра Фейєра записуються середні арифметичні таких сум [7, с.751]:

$$(F_n g)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(S_k g)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(g(x+t) + g(x-t))K_n(t)dt.$$

Добре відомо [7, с. 526; с. 752], що $S_n g \to g$ поточково для кожної кусково диференційовної функції $g \in C_{2\pi}$, і $F_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожної функції $g \in C_{2\pi}$.

Оператори F_n називаються *операторами Фейєра*. Оскільки $F_n g \in T$ для кожного n і $F_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожної функції $g \in C_{2\pi}$, то $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — це апроксимуюча послідовність операторів для підпростору T всіх тригонометричних поліномів.

Для операторів Фейєра вживається ще й така форма їх задання для функцій $g \in C_{2\pi}$:

$$(F_n g)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+t)K_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)K_n(y-x)dy.$$

Це випливає з того, що підінтегральна функція – неперервна та 2π-періодична.

Крім того, легко пояснити, що ядро Фейєра K_n має такі властивості:

1) $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$;

2) $K_n(t) \geq 0$ і $K_n(-t) = K_n(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$;

3) $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$.

Нескладно перевірити, що оператори Фейєра $F_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ є uu-неперервними. Справді, F_n – це лінійний оператор і для кожної функції $g \in C_{2\pi}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$

$$|F_n g(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x+t)| K_n(t)dt \leq \frac{\|g\|}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \|g\|,$$

звідки випливає нерівність $\|F_n g\| \leq \|g\|$, яка забезпечує неперервність оператора F_n у нормованому просторі $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$. Оскільки $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_u$, то оператори F_n будуть і up-неперервними.

Таким чином, ми отримуємо наступний результат.

Теорема 5. *а) Оператори Фейєра $F_n : C_{2\pi} \to T$ утворюють uu-апроксимуючу послідовність для підпростору T всіх тригонометричних поліномів.*

б) Для довільного топологічного простору X і кожної сукупно неперервної і 2π-періодичної відносно другої змінної функції $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функції

$$f_n(x, y) = (F_n f^x)(y)$$

сукупно неперервними, $f_n^x \in T$ для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ та $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для довільного $x \in X$.

Дослідимо, чи будуть оператори F_n – pu-неперервними.

Лема. *Нехай $K \in C_{2\pi}$, $K(t) \geq 0$ на $\mathbb{R}$, $K(0) > 0$ і $t_0 \in \mathbb{R}$. Тоді функціонал*

$$\Phi(g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t) K(t - t_0) dt$$

є розривним на просторі $(C_{2\pi}, \mathcal{T}_p)$.

Доведення. Знайдемо таку точку $a \in [-\pi, \pi)$, що $t_0 = a + 2m\pi$ для деякого цілого m. Нехай $\eta = \frac{K(0)}{2}$. Очевидно, що $0 < \eta < K(0)$. Оскільки функція K неперервна в нулі, то існує таке $\delta > 0$, що $a + \delta < \pi$ і $K(t) \geq \eta$, як тільки $a \leq t \leq a + \delta$. Для кожного номера n покладемо $b_n = a + \frac{\delta}{n}$ і розглянемо функцію $g_n \in C_{2\pi}$, графіком якої на відрізку $[-\pi, \pi]$ є ламана з вершинами у точках $(-\pi, 0)$, $(a, 0)$, $(a + \frac{b_n - a}{2}, n)$, $(b_n, 0)$ та $(\pi, 0)$. Очевидно, що $g_n(t) \to 0$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, бо $b_n \to a$ при $n \to \infty$. Але, оскільки $K(t - t_0) = K(t - a)$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, то

$$\Phi(g_n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_n(t) K(t - t_0) dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_n(t) K(t - a) dt$$

$$= \int\limits_a^{b_n} g_n(t)K(t-a)dt \geq \eta \int\limits_a^{b_n} g_n(t)dt = \eta \frac{n(b_n-a)}{2} = \frac{\delta\eta}{2} > 0$$

для кожного n. Отже, $\Phi(g_n) \nrightarrow 0$. Це і показує нам, що функціонал Φ – розривний в топології $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності. $\square$

Звідси легко виводиться наступна теорема.

Теорема 6. *Оператори Фейєра F_n не є pp-неперервними, а отже, і pu-неперервними.*

Доведення. Оскільки

$$(F_n g)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)K_n(y-x)dy,$$

функція $K = \frac{1}{\pi}K_n$ належить до простору $C_{2\pi}$ і $K(0) = \frac{n+1}{2\pi} > 0$, то згідно з лемою, для кожного $x \in \mathbb{R}$ функціонал

$$\Phi_x(g) = (F_n g)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)K_n(y-x)dy$$

не є p-неперервним на $C_{2\pi}$. Тому і оператор F_n – не pp-неперервний, адже його pp-неперервність рівносильна p-неперервності всіх функціоналів Φ_x, а у нас жоден з них не є таким. $\square$

4 Оператори Джексона

Розіб'ємо відрізок $[0, 2\pi]$ на $n+1$ рівних частин точками $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$. Нехай $0 \leq a_0 \leq x_1$ і $a_k = a_0 + kd$ при $k = 1, \ldots, n$, де $d = \frac{2\pi}{n+1}$. Точки $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – рівномірно розподілені на відрізку $[0, 2\pi]$, $a_{k+1} - a_k = d$ і $x_k \leq a_k \leq x_{k+1}$ при $k = 0, 1, \ldots, n$.

Для функції $g \in C_{2\pi}$, номера n і числа $x \in \mathbb{R}$ покладемо

$$(J_n g)(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} g(a_k)K_n(x - a_k),$$

де K_n – ядро Фейєра. Оскільки K_n – це тригонометричний поліном, то і $J_n g$ – теж тригонометричний поліном. Таким чином, ми визначили відображення $J_n : C_{2\pi} \to T$, які, очевидно, будуть лінійними. Відображення J_n – це *оператори Джексона*, а функції $J_n g$ – *поліноми Джексона* для функції g. Відомо, що $J_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожної функції $g \in C_{2\pi}$ [4, с.36]. Це доводиться за допомогою інтегрального зображення операторів Джексона через інтеграл Стілт'єса

$$(J_n g)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)K_n(y-x)d\omega_{n+1}(y),$$

де $\omega_{n+1}(y) = kd$, якщо $a_k < y \leq a_{k+1}$, і $d = \frac{2\pi}{n+1}$.

Теорема 7. *а) Оператори Джексона $J_n : C_{2\pi} \to T$ утворюють pu-апроксимуючу послідовність для T.*

б) Для довільного топологічного простору X та кожної функції $f \in CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ функції

$$f_n(x, y) = (J_n f^x)(y)$$

є сукупно неперервними і належать до простору $CT(X \times \mathbb{R})$, причому $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для кожного $x \in X$.

Доведення. а) Для довільних точок $y_1, \ldots, y_n$ з $\mathbb{R}$ і функцій $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ з простору $C_{2\pi}$ формулою

$$(Ag)(y) = \sum_{k=1}^{n} g(y_k)\varphi_k(y)$$

визначається функція $Ag \in C_{2\pi}$, і ми отримуємо оператор $A : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, який, очевидно, є лінійним. Для кожного $g \in C_{2\pi}$ маємо

$$\|Ag\| \leq \gamma \max_{k=1,\ldots,n} |g(y_k)| = \gamma \max_{k=1,\ldots,n} q_{y_k}(g),$$

де $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|$. Звідси випливає, що оператор A є pu-неперервним [5, с.12].

Зрозуміло, що оператори Джексона J_n належать до розглянутого нами типу. Отже, вони – pu-неперервні. Оскільки $J_n g \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$ для кожного $g \in C_{2\pi}$ і $\mathrm{im} J_n \subseteq T$, то твердження а) доведене.

Твердження б) випливає з твердження а) і теореми 4. $\square$

5 Застосування операторів Бернштейна

У цьому розділі ми побудуємо pu-апроксимуючу послідовність операторів $G_n : C_{2\pi} \to T$ для T, виходячи з многочленів Бернштейна $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ (див. п.1). При цьому ми просто перекладемо на операторну мову доведення другої теореми Вейєрштрасса з книги [8, с. 398].

Нехай $P[a, b]$ – простір усіх алгебраїчних поліномів на відрізку $[a, b]$. Оператори B_n діють з $C[0,1]$ в $P[0,1]$ і є pu-неперервними. При цьому $B_n f \rightrightarrows f$ на $[0,1]$ для кожного $f \in C[0,1]$.

Для лінійної функції $\varphi : [0,1] \to [-1,1]$, $\varphi(x) = 2x - 1$, розглянемо оператор композиції $U : C[-1,1] \to C[0,1]$, $Uf = f \circ \varphi$. Функція $y = \varphi(x)$ має обернену функцію $x = \varphi^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+1)$, яка теж є лінійною, а тому U має обернений оператор $U^{-1} : C[-1,1] \to C[0,1]$, який діє за правилом $U^{-1}g = g \circ \varphi^{-1}$. Покладемо

$$C_n = U^{-1} B_n U.$$

Оскільки заміна змінних – лінійна, то $U^{-1}(P[0,1]) \subseteq P[-1,1]$, отже, $\mathrm{im}\, C_n \subseteq P[-1,1]$. При цьому оператори U і U^{-1} є одночасно pp- і uu-неперервними, отже, C_n – це pu-неперервні оператори, які діють з $C[-1,1]$ в $P[-1,1]$. Крім того, $C_n f \rightrightarrows U^{-1}Uf = f$ на $[-1,1]$ для кожного $f \in C[-1,1]$, бо оператор U^{-1} є uu-неперервним.

Позначимо через $C_{2\pi}^{+}$ $\left(C_{2\pi}^{-}\right)$ підпростір всіх парних (непарних) функцій з $C_{2\pi}$. Нехай $\psi(t) = \arccos t$. Відображення $\psi : [-1,1] \to [0,\pi]$ є гомеоморфізмом з оберненим відображенням $\psi^{-1}(x) = \cos x$. Нехай $Vf = f \circ \psi$. Оператор $V : C[0,\pi] \to C[-1,1]$ має обернений. Ним буде оператор $V^{-1}g = g \circ \psi^{-1}$. Обидва оператори V і V^{-1} – *pp*- і *uu*-неперервні. Крім того, якщо $g \in P[-1,1]$ і $f = V^{-1}g$, то $f(x) = g(\cos x)$ при $0 \le x \le \pi$. Звідки легко вивести, що у цьому випадку f – це звуження деякого парного тригонометричного многочлена на відрізку $[0,\pi]$, тобто елемент простору $T^{+}[0,\pi]$, що за означенням складається з усіх звужень функцій з $T \cap C_{2\pi}^{+}$. Розглянемо оператор звуження $R : C_{2\pi} \to C[0,\pi]$, $Rf = f|_{[0,\pi]}$ і оператор продовження $P : C[0,\pi] \to C_{2\pi}$, який ставить у відповідність кожній функції $g \in C[0,\pi]$ ту єдину функцію $f \in C_{2\pi}^{+}$, що $f|_{[0,\pi]} = g$. Обидва оператори R і P є *pp*- і *uu*-неперервними, причому $PRf = f$, якщо $f \in C_{2\pi}^{+}$. Покладемо

$$D_n = PV^{-1}C_nVR.$$

Оператор $D_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ є *pu*-неперервним, бо оператор $VR : C_{2\pi} \to C[-1,1]$ – *pp*-неперервний, оператор $C_n : C[-1,1] \to C[-1,1]$ – *pu*-неперервний і оператор $PV^{-1} : C[-1,1] \to C_{2\pi}$ – *uu*-неперервний. При цьому

$$\operatorname{im} D_n \subseteq PV^{-1}(\operatorname{im} C_n) \subseteq PV^{-1}(P[-1,1]) \subseteq P(T^{+}[0,\pi]) \subseteq T \cap C_{2\pi}^{+}$$

і для кожного $f \in C_{2\pi}^{+}$

$$D_nf \rightrightarrows PV^{-1}VRf = PRf = f \text{ на } \mathbb{R}.$$

Введемо оператори $K : C_{2\pi} \to C_{2\pi}^{+}$ і $L : C_{2\pi} \to C_{2\pi}^{-}$, визначивши

$$(Kf)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{і} \quad (Lf)(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

для довільних $f \in C_{2\pi}$ і $x \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $K + L = I$, де I – тотожний оператор. Оператори K і L є *pp*- і *uu*-неперервними. Нехай $M : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – оператор множення на синус, а $N : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ – оператор множення на косинус, тобто

$$(Mf)(x) = f(x)\sin x \quad \text{і} \quad (Nf)(x) = f(x)\cos x$$

для $f \in C_{2\pi}$ і $x \in \mathbb{R}$. Оператори M та N теж одночасно *pp*- і *uu*-неперервні. Зауважимо, що $M(T) \subseteq T$ і $N(T) \subseteq T$, причому $M(C_{2\pi}^{-}) \subseteq C_{2\pi}^{+}$. Покладемо тепер

$$E_n = M^2D_nK + MD_nML.$$

Зрозуміло, що $E_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ — це *pu*-неперервний оператор, причому $\operatorname{im} E_n \subseteq T$. Для кожного $f \in C_{2\pi}$ будемо мати, що $Kf \in C_{2\pi}^{+}$ і $MLf \in C_{2\pi}^{+}$. Тому

$$E_nf = M^2D_nKf + MD_nMLf \rightrightarrows M^2Kf + MMLf = M^2(Kf + Lf) = M^2f \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Розглянемо оператор $W : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, для якого $Wf = f \circ \sigma$, де $\sigma(x) = x + \frac{\pi}{2}$, і обернений до нього оператор W^{-1}, для якого $W^{-1}g = g \circ \sigma^{-1}$, де $\sigma^{-1}(x) = x - \frac{\pi}{2}$. Зрозуміло, що оператори W і W^{-1} є *pp*- і *uu*-неперервними, причому $W(T) \subseteq T$ і $W^{-1}(T) \subseteq T$. Покладемо

$$F_n = W^{-1}E_nW.$$

Очевидно, що $\operatorname{im} F_n \subseteq W^{-1}(\mathrm{im}E_n) \subseteq W^{-1}(T) \subseteq T$. Оператори F_n є pu-неперервними і для кожного $f \in C_{2\pi}$

$$F_n f = W^{-1} E_n W f \rightrightarrows W^{-1} M^2 W f \quad \text{на } \mathbb{R},$$

але

$$W^{-1}M^2Wf(x) = W^{-1}M^2 f(x+\frac{\pi}{2}) = W^{-1}[f(x+\frac{\pi}{2})\sin^2 x]$$
$$= f(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\sin^2(x-\frac{\pi}{2}) = f(x)\cos^2 x = N^2 f(x).$$

Отже,

$$F_n f \rightrightarrows N^2 f \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Нарешті покладемо

$$G_n = E_n + F_n.$$

Оператор G_n є pu-неперервним, бо E_n і F_n є такими. Зрозуміло, що $\operatorname{im} G_n \subseteq T$, бо $\operatorname{im} E_n \subseteq T$ та $\operatorname{im} F_n \subseteq T$.

Далі, для кожного $f \in C_{2\pi}$

$$G_n f = E_n f + F_n f \rightrightarrows M^2 f + N^2 f = (M^2 + N^2) f = f \quad \text{на } \mathbb{R},$$

бо $M^2 + N^2 = I$, адже $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Таким чином, ми встановили такий результат.

Теорема 8. *Оператори $G_n : C_{2\pi} \to T$ утворюють pu-апроксимуючу послідовність для T.*

Цікаво виписати явну формулу, яка виражає оператори G_n через оператори Бернштейна B_n. Маємо:

$$G_n = E_n + F_n$$
$$= M^2 D_n K + M D_n M L + W^{-1} M^2 D_n K W + W^{-1} M D_n M L W$$
$$= M^2 P V^{-1} C_n V R K + M P V^{-1} C_n V R M L + W^{-1} M^2 P V^{-1} C_n V R K W$$
$$+ W^{-1} M P V^{-1} C_n V R M L W = M^2 P V^{-1} U^{-1} B_n U V R K$$
$$+ M P V^{-1} U^{-1} B_n U V R M L + W^{-1} M^2 P V^{-1} U^{-1} B_n U V R K W$$
$$+ W^{-1} M P V^{-1} U^{-1} B_n U V R M L W.$$

При цьому

$$E_n = M^2 P V^{-1} U^{-1} B_n U V R K + M P V^{-1} U^{-1} B_n U V R M L$$

і

$$G_n = E_n + W^{-1} E_n W.$$

Зауважимо, що в [7, с.698] наведено інше доведення теореми Вейєрштрасса про наближення функцій з $C_{2\pi}$ тригонометричними поліномами, що використовує ознаку Діріхле-Жордана рівномірної збіжності рядів Фур'є, але його не вдається пристосувати до доведення існування pu-апроксимуючої послідовності операторів $A_n : C_{2\pi} \to T$.

Література

1. Власюк Г.А., Маслюченко В.К. *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2007. – Вип. 336-337. – С. 52-59.
2. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *Наближення нарізно і сукупно неперервних функцій* // Всеукр. наук. семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. – Івано-Франківськ. – 2010. – С. 2-3.
3. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної* // Всеукр. наук. семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. – Івано-Франківськ. – 2010. – С. 27-28.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.2. – М.: Мир, 1965. – 538 с.
5. Маслюченко В.К. Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.
6. Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення і простори Кете* // Дис. докт. фіз.-мат. наук. – Чернівці. – 1999. – 345 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.III. – М.-Л.: Гос. изд-во тех.-теор. л-ры, 1949. – 783 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т 2. – С.-Петербург-Москва-Краснодар: Лань, 2005. – 464 с.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

Чернівці, Україна

Надійшло 7.04.2010

Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. *On approximation of the separately continuous functions 2π-periodical in relation to the second variable*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 4–14.

Using Jackson's and Bernstein's operators we prove that for every topological space X and an arbitrary separately continuous function $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodical in relation to the second variable, there exists such sequence of jointly continuous functions $f_n : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that functions $f_n^x = f_n(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are trigonometric polynomials and $f_n^x \rightrightarrows f^x$ on $\mathbb{R}$ for every $x \in X$.

Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *О приближении раздельно непрерывных функций, 2π-периодических относительно второй переменной* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 4–14.

С помощью операторов Джексона и Бернштейна мы доказываем, что для каждого топологического пространства X и произвольной раздельно непрерывной функции $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-периодической относительно второй переменной, существует такая последовательность совокупно непрерывных функций $f_n : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой функции $f_n^x = f_n(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – это тригонометрические полиномы и $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $\mathbb{R}$ для каждого $x \in X$.

Карпатські математичні
публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.2, №.1

УДК 512.53

Волошина Т.В.

АНАЛОГ ЛЕМИ БЕРНСАЙДА ДЛЯ СКІНЧЕННОЇ ІНВЕРСНОЇ СИМЕТРИЧНОЇ НАПІВГРУПИ

Волошина Т.В. *Аналог леми Бернсайда для скінченної інверсної симетричної напівгрупи* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 15–23.

Отримано аналог леми Бернсайда для транзитивних підстановочних представлень скінченної інверсної симетричної напівгрупи.

Вступ

Нехай S – інверсна напівгрупа. Через ω будемо позначати так званий *природний частковий порядок на S: $a\omega b \Leftrightarrow aa^{-1} = ab^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}a = a^{-1}b$*. Для зручності іноді будемо вживати для ω позначення $\leq$. *Замиканням $H\omega$ множини $H \subseteq S$* називається множина $H\omega := \{h \in S : \ \exists \pi \in H \ \ \pi\omega h\}$. Якщо $H\omega = H$, то H називається *замкненою множиною*.

Напівгрупу всіх часткових взаємнооднозначних відображень деякої множини X в саму себе будемо називати *інверсною симетричною напівгрупою на множині X* і позначати $IS(X)$ або IS_n, якщо $|X| = n$. Елементи напівгрупи $IS(X)$ називають *частковими підстановками множини X*. *Підстановочним зображенням* інверсної напівгрупи S називається довільний її гомоморфізм φ в інверсну симетричну напівгрупу $IS(X)$ на деякій множині X. Оскільки кожне ефективне зображення інверсної напівгрупи еквівалентне прямій сумі транзитивних, спочатку природно розглянути лише транзитивні підстановочні зображення.

Для замкненої інверсної піднапівгрупи H інверсної напівгрупи S розглянемо часткову праву конгруенцію $\pi_H := \big\{(s,t) \in S \times S \ \big| \ st^{-1} \in H\big\}$. Класами еквівалентності цього відношення є множини $(Hs)\omega$, де $ss^{-1} \in H$, які будемо називати *правими ω–класами за замкненою інверсною піднапівгрупою H*. На множині X правих ω–класів за H дія $\varphi(S)$ визначається правилом: для $x \in X$ і $s \in S$ $\quad x^{\varphi_H(s)} = (xs)\omega$. Зображення $\varphi : S \to IS(X)$ будемо називати *зображенням напівгрупи S на правих ω–класах за замкненою*

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20M18, 20M20, 20M30.
Ключові слова і фрази: лема Бернсайда, інверсна напівгрупа.

інверсною піднапівгрупою H. У роботі [1] довів, що кожне ефективне транзитивне зображення інверсної напівгрупи S еквівалентне зображенню напівгрупи на множині правих ω–класів за деякою замкненою інверсною піднапівгрупою.

Нехай $N = \{1, 2, \dots n\}$, IS_n — інверсна симетрична напівгрупа на множині N, $S(M)$ — симетрична група на множині M. Для $\pi \in IS_n$ через $dom\,\pi$ і $ran\,\pi$ позначимо відповідно область визначення та область значень часткової підстановки π. *Рангом* часткової підстановки π будемо називати потужність її області визначення, а *дефектом* — кількість точок на яких π не визначена. Ранг і дефект часткової підстановки π будемо позначати $rank\,\pi$ і $def\,\pi$ відповідно.

Опис усіх замкнених інверсних піднапівгруп інверсної симетричної напівгрупи дає теорема.

Теорема 1 ([1]). *Для кожної підмножини* $M \subseteq N$ *і підгрупи* $G \leq S(M)$ *піднапівгрупа* $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$ *буде замкненою інверсною піднапівгрупою в* IS_n. *З іншого боку, кожна замкнена інверсна піднапівгрупа в* IS_n *має такий вигляд.*

Для замкненої інверсної піднапівгрупи $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$ позначимо $|M| = k$, $|G| = m$, $[S(M) : G] = \frac{k!}{m} = r$. Кількість правих ω–класів напівгрупи IS_n за замкненою інверсною піднапівгрупою H позначимо $[IS_n : H]$.

Теорема 2 ([1]). *Кожний правий* ω*–клас інверсної напівгрупи* IS_n *за замкненою інверсною піднапівгрупою* $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$ *має вигляд* $(Hg)\omega$, *де* $g \in S(N)$, *і містить правий клас суміжності* Ag *групи* $S(N)$ *за підгрупою* $A = G \oplus S(\overline{M})$, *причому ця відповідність між правими* ω*–класами і класами суміжності за підгрупою* A *є взаємно однозначною.*

$$[IS_n : H] = \left[S(N) : G \oplus S(\overline{M})\right] = \frac{n!}{m \cdot (n-k)!} = C_n^k \cdot [S(M) : G] = C_n^k \cdot r.$$

Всі праві ω*–класи рівнопотужні піднапівгрупі* H.

Поняття, які використовуються без означення, можна знайти в [3].

Нехай $\varphi : IS_n \to IS(X)$ — підстановочне зображення напівгрупи IS_n на множині X правих ω–класів за замкненою інверсною піднапівгрупою H. Будемо розглядати конгруенцію $\varphi \circ \varphi^{-1} = \{(x, y) \in IS_n \times IS_n | \varphi(x) = \varphi(y)\}$ на множині елементів напівгрупи IS_n. Кількість класів еквівалентності цієї конгруенції для різних замкнених інверсних піднапівгруп H обчислено в [2].

Теорема 3 ([1]). *Зображення інверсної симетричної напівгрупи* IS_n *на множині правих* ω*–класів за замкненою інверсною піднапівгрупою* $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$ *буде точним тоді і тільки тоді, коли* $|M| = 1$. *Кожне точне ефективне транзитивне зображення напівгрупи* IS_n *еквівалентне стандартному зображенню* IS_n *частковими підстановками на множині* $\{1, 2, \dots, n\}$.

У цьому випадку $|\varphi(IS_n| = |IS_n| = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(C_n^i\right)^2 \cdot i!$.

Лема 1 ([2]). *Для замкненої інверсної піднапівгрупи* $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$, *де* $|M| = k$, *множина* $I_k = \{\pi \in IS_n | rank\,\pi < k\}$ *складає один клас еквівалентності конгруенції*

$\varphi \circ \varphi^{-1}$. Для кожного елемента $t \in I_k$ його образ $\varphi(t)$ — ніде невизначена часткова підстановка на множині правих ω–класів за замкненою інверсною піднапівгрупою $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$.

Зауваження. *При $k = n$, $M = N$ і $H = G \leq S(N)$. За лемою 1, усі негрупові елементи IS_n діють як порожня підстановка. Тому $\varphi(IS_n)$ — група підстановок з нулем.*

1 Аналог леми Бернсайда

Позначимо через $\chi(\pi)$ кількість нерухомих точок часткової підстановки π.

Лема 2. *Для інверсної симетричної напівгрупи IS_n виконується рівність*

$$\sum_{\pi \in IS_n} \chi(\pi) + \frac{1}{n} \sum_{\pi \in IS_n} def\, \pi = |IS_n| \,. \tag{1}$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що $|IS_n| = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \cdot k!$. Обчислимо $\frac{1}{n} \sum\limits_{\pi \in IS_n} def\, \pi$. Для цього розглянемо окремо елементи різних рангів. В елемента рангу k дефект дорівнює $n - k$. Кількість елементів рангу k у напівгрупі IS_n дорівнює $\left(C_n^k\right)^2 \cdot k!$. Тому

$$\frac{1}{n} \sum_{\pi \in IS_n} def\, \pi = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{\pi \in IS_n \\ rank\pi = k}} def\, \pi = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (n-k) \left(C_n^k\right)^2 k!.$$

Для обчислення $\sum\limits_{\pi \in IS_n} \chi(\pi)$ розглянемо окремо елементи різних рангів. У елементів рангу k область визначення можна вибрати C_n^k способами. Для напівгрупи IS_n множини елементів рангу k з однією і тією ж областю визначення — рівнопотужні. Тому можна вибрати і зафіксувати якусь одну підмножину $L \subseteq N$ потужності k і знайти $\sum\limits_{\substack{\pi \in IS_n \\ dom\, \pi = L}} \chi(\pi)$.

Позначимо $St(i) = \{\pi \in IS_n |\ dom\, \pi = L,\ \pi(i) = i\}$. Тоді

$$\sum_{\substack{\pi \in IS_n \\ dom\pi = L}} \chi(\pi) = \sum_{i \in L} |St(i)| = |L| \cdot |St(i)| = k \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot (k-1)! = \frac{k}{n} \cdot C_n^k \cdot k!.$$

Оскільки підмножину $L \subseteq N$ можна вибрати C_n^k способами, то

$$\sum_{\pi \in IS_n} \chi(\pi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \cdot \left(C_n^k\right)^2 \cdot k!.$$

Тоді

$$\sum_{\pi \in IS_n} \chi(\pi) + \frac{1}{n} \sum_{\pi \in IS_n} def \pi = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \cdot \left(C_n^k\right)^2 \cdot k! + \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{n} \cdot \left(C_n^k\right)^2 \cdot k!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+n-k}{n} \cdot \left(C_n^k\right)^2 \cdot k! = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 \cdot k! = |IS_n|.$$

$\square$

Будемо тепер розглядати підстановочні зображення напівгрупи IS_n на правих ω–класах за замкненими інверсними піднапівгрупами виду $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$. За теоремою 3, таке зображення буде точним тоді і тільки тоді, коли $|M| = k = 1$. При цьому воно буде еквівалентне стандартному зображенню напівгрупи IS_n. Тому для точного зображення φ рівність (1) набуває такого вигляду

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} \chi(\pi) + \frac{1}{[IS_n : H]} \cdot \sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} def\,\pi = |\varphi(IS_n)|\,.$$

Доведемо останню рівність для неточних підстановочних зображень на правих ω–класах за замкненими інверсними піднапівгрупами виду $H = G\oplus IS_{\overline{M}}$. Такі зображення – транзитивні.

Лема 3. *Часткова підстановка $\varphi(t)$, $t \in IS_n$, визначена на правому ω–класі $(Hx)\omega$, де $dom\,x = M$, тоді і тільки тоді, коли $dom\,x \supseteq M^x$.*

Доведення. Нехай e_H — найменший ідемпотент H. Тоді $dom\,e_H = M$ і $e_H = xx^{-1}$. $(Hx)\omega^{\varphi(t)} \neq \varnothing \Leftrightarrow xtt^{-1}x^{-1} \in H$, що рівносильно $xtt^{-1}x^{-1} \geq e_H$. З іншого боку, $xtt^{-1}x^{-1} \leq xx^{-1} = e_H$. Тому $xtt^{-1}x^{-1} = xx^{-1}$. Ця рівність у свою чергу рівносильна $x^{-1}xtt^{-1}x^{-1}x = x^{-1}x$. Оскільки ідемпотенти в інверсній напівгрупі комутують, то

$$(x^{-1}x)(tt^{-1}) = (x^{-1}x)(x^{-1}x)(tt^{-1}) = (x^{-1}x)(tt^{-1})(x^{-1}x) = x^{-1}x.$$

Отже, $tt^{-1} \geq x^{-1}x$. Тому $dom\,t = dom\,tt^{-1} \supseteq dom\,x^{-1}x = ran\,x = M^x$. □

Лема 4. *Якщо часткова підстановка $\varphi(t)$, $t \in IS_n$, фіксує правий ω–клас $(Hx)\omega$, де $dom\,x = M$, то $dom\,t \supseteq M^x$, $(M^x)^t = M^x$ і $t\big|_{M^x} \in G^x$, де $G^x = x^{-1}\big|_{M^x} \cdot G \cdot x\big|_M$ — подібна до G група підстановок на множині M^x.*

Доведення. Включення $dom\,t \supseteq M^x$ випливає із попередньої леми. $(Hx)\omega^{\varphi(t)} = (Hx)\omega \Leftrightarrow xtx^{-1} \in H$. Отже, $M^{xtx^{-1}} = M$. Тоді $M^x = M^{xtx^{-1}x} = ((M^x)^t)^{x^{-1}x}$. Оскільки ідемпотент $x^{-1}x$ тотожно відображає свою область визначення M^x на саму себе, то $(M^x)^t = M^x$.

Із того, що $xtx^{-1} \in H = G\oplus IS_{\overline{M}}$ випливає, що $xtx^{-1}\big|_M \in G$ або $x\big|_M \cdot t\big|_{M^x} \cdot x^{-1}\big|_{M^x} \in G$. Звідси $t\big|_{M^x} \in x^{-1}\big|_{M^x} \cdot G \cdot x\big|_M$. □

Теорема 4. *Нехай φ — підстановочне зображення напівгрупи IS_n на множині правих ω–класів за замкненою інверсною піднапівгрупою H. Тоді*

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} \chi(\pi) + \frac{1}{[IS_n : H]} \cdot \sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} def\,\pi = |\varphi(IS_n)|\,. \qquad (2)$$

Доведення. Рівність (2) у випадку $k = 1$ виконується, бо відповідне зображення точне. Якщо $k = 0$, то $M \neq \varnothing$ і $H = IS_n$. Очевидно, що при цьому усі елементи напівгрупи IS_n містяться в одному правому ω–класі, який фіксує підстановка $\varphi(t)$ для кожного $t \in IS_n$. При цьому конгруенція $\varphi \circ \varphi^{-1}$ має один клас еквівалентності і $|\varphi(IS_n)| = 1$. У цьому випадку рівність (2) також виконується. Нехай тепер $k > 1$.

1) Розглянемо спочатку випадок, коли $k = n$ і $H = G \leq S(N)$. Тоді, за твердженням 5 із [2], $|\varphi(IS_{n)}| = 1 + \frac{n!}{m} = 1 + r$, де $m = |G|,\ r = [S(N) : G]$. За теоремою 2 кількість правих ω–класів при цьому дорівнює r. За лемою 4 із [2] образ кожного групового елемента напівгрупи IS_n визначений на всіх правих ω–класах, а образ кожного негрупового елемента — порожня підстановка на множині правих ω–класів за лемою 1. Тому

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} \chi(\pi) + \frac{1}{[IS_n : H]} \cdot \sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} def\,\pi = \sum_{\pi\in\varphi(S_n)} \chi(\pi) + \frac{1}{r} \cdot r = 1 + \sum_{\pi\in\varphi(S_n)} \chi(\pi).$$

За лемою 4 із [2], дія образів групових елементів IS_n на множині правих ω–класів за піднапівгрупою H подібна до дії їх образів при підстановочному зображенні групи $S(N)$ за підгрупою G. Тому для обчислення $\sum\limits_{\pi\in\varphi(S_n)} \chi(\pi)$ можна скористатися лемою Бернсайда для груп. Дія групи $S(N)$ на множині правих класів суміжності групи $S(N)$ за підгрупою G транзитивна. Тому

$$\sum_{\pi\in\varphi(S_n)} \chi(\pi) = 1 \cdot |\varphi(S_n)| = |\,S_n/\,G| = r.$$

Отже, рівність (2) виконується.

2) Нехай тепер $1 < k < n$ і $G = S(M)$. Тоді, за твердженням 5 із [2] маємо

$$|\varphi(IS_n)| = 1 + (C_n^k)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} (C_n^i)^2 \cdot i!.$$

При цьому за теоремою 2 кількість правих ω–класів дорівнює C_n^k. Кожний правий ω–клас містить всі елементи, що переводять множину M в якусь одну з C_n^k k–елементних підмножин множини N. За лемою 1 усі елементи IS_n рангу менше k складають один клас еквівалентності конгруенції $\varphi \circ \varphi^{-1}$. Їх образ діє, як порожня підстановка на C_n^k–елементній множині.

З'ясуємо, як діють на множині правих ω–класів елементи рангу k. Нехай X_1 — правий ω–клас, всі елементи якого переводять k–елементну множину M в деяку M'. За лемами 3 і 4 для елемента $t \in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена на X_1 тоді і тільки тоді, коли $dom\,t = M'$, і часткова підстановка $\varphi(t)$ фіксує X_1 тоді і тільки тоді, коли $dom\,t = ran\,t = M'$. Тому для кожного елемента $t \in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена рівно на одному із C_n^k правому ω–класі і $def\,\varphi(t) = C_n^k - 1$. Оскільки один клас еквівалентності конгруенції $\varphi \circ \varphi^{-1}$ складають ті і лише ті елементи рангу k, у яких однакові області визначення і однакові області значень, то кожен правий ω–клас X_1 фіксується рівно одним елементом $\varphi(t)$ із $\varphi(IS_n)$, для якого $dom\,t = ran\,t = M'$.

Розглянемо тепер елемент $t \in IS_n$ рангу $k+1$. В IS_n існує $C_{k+1}^k = k+1$ елемент рангу k, менший за t відносно природного часткового порядку. Тому $\varphi(t)$ визначений на $C_{k+1}^k = k+1$ правому ω–класі. Подібні міркування приводять до того, що для елемента $t \in IS_n$ рангу $i,\ k+1 \leq i \leq n$, образ $\varphi(t)$ визначений на C_i^k правих ω–класах і має дефект $C_n^k - C_i^k$.

Тому другий доданок у рівності (2) має вигляд:

$$\frac{1}{C_n^k}\cdot\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} def\,\pi=\frac{1}{C_n^k}\cdot\Big(C_n^k+\left(C_n^k\right)^2\left(C_n^k-1\right)+\left(C_n^{k+1}\right)^2(k+1)!\left(C_n^k-C_{k+1}^k\right)$$

$$+\ldots+\left(C_n^{n-1}\right)^2(n-1)!\left(C_n^k-C_{n-1}^k\right)+\left(C_n^n\right)^2(n)!\left(C_n^k-C_n^k\right)\Big)$$

$$=1+(C_n^k)^2+\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2 i!-C_n^k-\frac{1}{C_n^k}\cdot\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!\cdot C_i^k.$$

Обчислимо тепер загальну кількість нерухомих точок $\sum\limits_{\pi\in\varphi(IS_n)}\chi(\pi)$. Кожен із C_n^k правих ω–класів може бути нерухомою точкою. Нехай це клас X_1. Позначимо $St(X_1)=\{\pi\in\varphi(IS_n)|X_1^\pi=X_1\}$. Клас X_1 фіксується єдиним елементом $\varphi(t)$ із $\varphi(IS_n)$, для якого $rank\,t=k$. За лемою 3 із [2] усі елементи IS_n рангу більшого за k утворюють одноелементні класи еквівалентності конгруенції $\varphi\circ\varphi^{-1}$. Нехай t має ранг $i>k$ і $X_1^{\varphi(t)}=X_1$. Тоді за лемою 4 маємо $(M')^t=M'$. Існує $k!$ способів задати дію t на k–елементній множині M'. На решті $i-k$ елементах, які можна вибрати C_{n-k}^{i-k} способами, дію t можна задати, вибравши C_{n-k}^{i-k} способами їх образи, а потім задавши взаємно однозначну відповідність між ними $(i-k)!$ способами. Тому

$$|St(X_1)|=1+\sum_{i=k+1}^{n}(C_{n-k}^{i-k})^2\cdot(i-k)!\cdot k!.$$

Отже,

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)}\chi(\pi)=C_n^k\cdot|St(X_1)|=C_n^k\cdot\Big(1+\sum_{i=k+1}^{n}(C_{n-k}^{i-k})^2\cdot(i-k)!\cdot k!\Big).$$

Після нескладних перетворень можна отримати, що

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)}\chi(\pi)=C_n^k+\frac{1}{C_n^k}\cdot\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!\cdot C_i^k.$$

Отже, рівність (2) в цьому випадку також виконується.

3) Нехай тепер $1<k<n$ і G — власна нормальна підгрупа $S(M)$ індексу r. За твердженням 5 із [2] маємо

$$|\varphi(IS_n)|=1+r\cdot(C_n^k)^2+\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!.$$

Кількість правих ω–класів при цьому дорівнює $r\cdot C_n^k$. Всі елементи, що переводять множину M в якусь одну з C_n^k k–елементних підмножин множини N, містяться в r правих ω–класах. Вся множина правих ω–класів розбита на C_n^k підмножин $L_1,\ldots,L_{C_n^k}$ по r класів у кожній.

За лемою 1 усі елементи IS_n рангу менше k утворюють один клас еквівалентності конгруенції $\varphi\circ\varphi^{-1}$. Їх образ діє як порожня підстановка на $r\cdot C_n^k$–елементній множині.

З'ясуємо, як діють на множині правих ω–класів елементи рангу k. Нехай X_1 — правий ω–клас, всі елементи якого переводять M в деяку M'. За лемами 3 і 4 для елемента $t \in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена на X_1 тоді і тільки тоді, коли $dom\, t = M'$, і часткова підстановка $\varphi(t)$ фіксує X_1 лише тоді, коли $dom\, t = ran\, t = M'$. Тому для кожного елемента $t \in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена рівно на r правих ω–класах, що входять в одну підмножину L_i. Оскільки елементи рангу k, у яких однакові області визначення і однакові області значень, утворюють r рівнопотужних класів еквівалентності конгруенції $\varphi \circ \varphi^{-1}$, то на кожній підмножині L_i із правих ω–класів визначено рівно r елементів з $\varphi(IS_n)$. У випадку $G = A(M)$, $r = 2$ і один із цих двох елементів фіксує обидва праві ω–класи, а інший їх переставляє. У випадку, коли $k = 4$ і $G = K_4$, кількість правих ω–класів $r = 6$ і можна переконатися, що 6 елементів із $\varphi(IS_n)$ циклічно переставляють 6 правих ω–класів. Тому кожний правий ω–клас фіксується рівно одним елементом з $\varphi(IS_n)$, для якого $dom\, t = ran\, t = M'$.

Аналогічно до попереднього випадку можна показати, що для елемента $t \in IS_n$ рангу i, $k+1 \leq i \leq n$ образ $\varphi(t)$ визначений на $r \cdot C_i^k$ правих ω–класах і має дефект $r \cdot (C_n^k - C_i^k)$.

Тоді суми з лівої частини рівності (2) матимуть вигляд:

$$\frac{1}{rC_n^k} \sum_{\pi \in \varphi(IS_n)} def\, \pi = \frac{1}{rC_n^k} \cdot \Big(rC_n^k + r^2 (C_n^k)^2 (C_n^k) + \sum_{i=k+1}^{n} (C_n^i)^2 i! r (C_n^k - C_i^k) \Big)$$

$$= 1 + r(C_n^k)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} (C_n^i)^2 i! - rC_n^k - \frac{1}{C_n^k} \cdot \sum_{i=k+1}^{n} (C_n^i)^2 \cdot i! \cdot C_i^k.$$

Обчислимо тепер загальну кількість нерухомих точок $\sum\limits_{\pi \in \varphi(IS_n)} \chi(\pi)$. Кожен із rC_n^k правих ω–класів може бути нерухомою точкою. Нехай це клас X_1. Позначимо $St(X_1) = \{\pi \in \varphi(IS_n) | X_1^\pi = X_1\}$. Клас X_1 фіксується єдиним елементом $\varphi(t)$ із $\varphi(IS_n)$, для якого $rank\, t = k$. За лемою 3 із [2] усі елементи IS_n рангу більшого за k утворюють одноелементні класи еквівалентності конгруенції $\varphi \circ \varphi^{-1}$. Нехай t має ранг $i > k$ і $X_1^{\varphi(t)} = X_1$. Тоді за лемою 4 маємо $(M')^t = M'$ і $t\big|_{M^x} \in G^x$. Задати дію t на множині M' можна $|G^x| = |G| = m = \frac{k!}{r}$ способами. На решті $i - k$ елементах, які можна вибрати C_{n-k}^{i-k} способами, дію t можна задати, вибравши C_{n-k}^{i-k} способами їх образи, а потім задавши взаємно однозначну відповідність між ними $(i-k)!$ способами. Тому

$$|St(X_1)| = 1 + \sum_{i=k+1}^{n} (C_{n-k}^{i-k})^2 \cdot (i-k)! \cdot \frac{k!}{r}.$$

Отже,

$$\sum_{\pi \in \varphi(IS_n)} \chi(\pi) = rC_n^k \cdot |St(X_1)| = rC_n^k \cdot \Big(1 + \sum_{i=k+1}^{n} (C_{n-k}^{i-k})^2 \cdot (i-k)! \cdot \frac{k!}{r} \Big)$$

$$= rC_n^k + \frac{1}{C_n^k} \cdot \sum_{i=k+1}^{n} (C_n^i)^2 \cdot i! \cdot C_i^k.$$

Як бачимо, рівність (2) знову виконується.

4) Нехай тепер $1 < k < n$ і G — ненормальна або одинична підгрупа групи $S(M)$ індексу r. За теоремою 4 із [2] маємо $|\varphi(IS_n)| = 1+\sum\limits_{i=k}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!$. За теоремою 2, кількість правих ω–класів при цьому дорівнює $r\cdot C_n^k$. Всі елементи, що переводять множину M в якусь одну з C_n^k k–елементних підмножин множини N, містяться в r правих ω–класах. Вся множина правих ω–класів розбита на C_n^k підмножин $L_1,\ldots,L_{C_n^k}$ по r класів у кожній.

Аналогічно, з леми 1 випливає, що всі елементи IS_n рангу менше k утворюють один клас еквівалентності конгруенції $\varphi\circ\varphi^{-1}$. Їх образ діє, як порожня підстановка на rC_n^k–елементній множині.

З'ясуємо, як діють на множині правих ω–класів елементи рангу k. Нехай X_1 — правий ω–клас, всі елементи якого переводять M в деяку M'. За лемами 3 і 4 для елемента $t\in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена на X_1 тоді і тільки тоді, коли $dom\,t = M'$, і часткова підстановка $\varphi(t)$ фіксує X_1 лише тоді, коли $dom\,t = ran\,t = M'$. Тому для кожного елемента $t\in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена рівно на r правих ω–класах, що входять в одну підмножину L_i.

Аналогічно до попередніх випадків можна показати, що для елемента $t\in IS_n$ рангу $i,\ k+1\le i\le n$ образ $\varphi(t)$ визначений на $r\cdot C_i^k$ правих ω–класах і має дефект $r\cdot(C_n^k - C_i^k)$. Тому

$$\frac{1}{rC_n^k}\cdot\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} def\,\pi = \frac{1}{rC_n^k}\cdot\Big(rC_n^k + (C_n^k)^2k!r(C_n^k-1) + \sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2 i! r(C_n^k - C_i^k)\Big)$$

$$= 1 + k!(C_n^k)^2 + \sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2 i! - k!C_n^k - \frac{1}{C_n^k}\cdot\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!\cdot C_i^k.$$

Елементів рангу k, у яких однакові області визначення і однакові області значень, буде $k!$ і всі вони містяться в одноелементних класах еквівалентності конгруенції $\varphi\circ\varphi^{-1}$. На кожній підмножині L_i із r правих ω–класів визначено $k!$ різних елементів з $\varphi(IS_n)$, у прообразів яких k–елементна область визначення M' збігається з областю значень. З точністю до подібності можна вважати, що симетрична група $S(M')$ транзитивно діє на множині з r елементів. За формулою орбіт для правого ω–класу X_1 кількість елементів $t\in IS_n$ рангу k, таких що $X_1^{\varphi(t)} = X_1$, дорівнює $\frac{k!}{r} = |G| = m$. Кількість елементів $t\in IS_n$ рангу більшого за k, і таких, що $X_1^{\varphi(t)} = X_1$, обчислюється аналогічно до попереднього випадку. Отже, загальна кількість нерухомих точок дорівнює

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)}\chi(\pi) = rC_n^k\cdot\Big(m + \sum_{i=k+1}^{n}(C_{n-k}^{i-k})^2\cdot(i-k)!\cdot m\Big)$$

$$= k!C_n^k + \frac{1}{C_n^k}\cdot\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!\cdot C_i^k.$$

Рівність (2) виконується і в цьому випадку. □

Література

1. Волошина Т.В. *Ефективні транзитивні зображення скінченної інверсної симетричної напівгрупи* // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1998. – Вип. 2. – С. 16-21.

2. Волошина Т.В. *Конгруенції підстановочних зображень скінченної інверсної симетричної напівгрупи IS_n* // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 9-16.

3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 283 с. – Т. 2. – 422 с.

4. Шайн Б.М. *Представление обобщенных групп* // Изв. вузов. "Математика". – 1962. – Т. 28, № 3. – С. 164-176.

Волинський національний університет імені Лесі Українки,

Луцьк, Україна.

vtv_lutsk@rambler.ru

Надійшло 20.05.2010

Voloshyna T.V. *An analogue of Bernside's lemma for finite inverse symmetric semigroup*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 15–23.

An analogue of Bernside's lemma for transitive permutation representations of finite inverse symmetric semigroup is obtained.

Волошина Т.В. *Аналог леммы Бернсайда для конечной инверсной симметрической полугруппы* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 15–23.

Получен аналог леммы Бернсайда для транзитивных подстановочных представлений конечной инверсной симметрической полугруппы.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №.1

УДК 512+515.12

Gavrylkiv V.M.

ON REPRESENTATION OF SEMIGROUPS OF INCLUSION HYPERSPACES

Gavrylkiv V.M. *On representation of semigroups of inclusion hyperspaces*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 24–34.

Given a group X we study the algebraic structure of the compact right-topological semigroup $G(X)$ consisting of inclusion hyperspaces on X. This semigroup contains the semigroup $\lambda(X)$ of maximal linked systems as a closed subsemigroup. We construct a faithful representation of the semigroups $G(X)$ and $\lambda(X)$ in the semigroup $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ of all self-maps of the power-set $\mathsf{P}(X)$. Using this representation we prove that each minimal left ideal of $\lambda(X)$ is topologically isomorphic to a minimal left ideal of the semigroup $\mathsf{pT}^{\mathsf{pT}}$, where by pT we denote the family of pretwin subsets of X.

Introduction

After discovering a topological proof of Hindman theorem [8] (see [10, p.102], [9]), topological methods become a standard tool in the modern combinatorics of numbers, see [10], [11]. The crucial point is that any semigroup operation $*$ defined on a discrete space X can be extended to a right-topological semigroup operation on $\beta(X)$, the Stone-Čech compactification of X. The extension of the operation from X to $\beta(X)$ can be defined by the simple formula

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \big\{A \subset X : \{x \in X : x^{-1}A \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{A}\big\}, \tag{1}$$

where $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ are ultrafilters on X. Endowed with the so-extended operation, the Stone-Čech compactification $\beta(X)$ becomes a compact right-topological semigroup. The algebraic properties of this semigroup (for example, the existence of idempotents or minimal left ideals) have important consequences in combinatorics of numbers, see [10], [11].

The Stone-Čech compactification $\beta(X)$ of X is the subspace of the double power-set $\mathsf{P}(\mathsf{P}(X))$, which is a complete lattice with respect to the operations of union and intersection. In [7] it was observed that the semigroup operation extends not only to $\beta(X)$ but also to the complete sublattice $G(X)$ of $\mathsf{P}(\mathsf{P}(X))$ generated by $\beta(X)$. This complete sublattice consists of all inclusion hyperspaces over X.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20M30; 20M12; 22A15; 22A25; 54D35.

Key words and phrases: binary operation, semigroup, right-topological semigroup, representation, self-linked set, twin set, pretwin set, minimal left ideal.

By definition, a family $\mathcal{F}$ of non-empty subsets of a discrete space X is called an *inclusion hyperspace* if $\mathcal{F}$ is monotone in the sense that a subset $A \subset X$ belongs to $\mathcal{F}$ provided A contains some set $B \in \mathcal{F}$. Besides the operations of union and intersection, the set $G(X)$ possesses an important transversality operation assigning to each inclusion hyperspace $\mathcal{F} \in G(X)$ the inclusion hyperspace

$$\mathcal{F}^\perp = \{A \subset X : \forall F \in \mathcal{F}\ (A \cap F \neq \varnothing)\}.$$

This operation is involutive in the sense that $(\mathcal{F}^\perp)^\perp = \mathcal{F}$.

It is known that the family $G(X)$ of inclusion hyperspaces on X is closed in the double power-set $\mathsf{P}(\mathsf{P}(X)) = \{0,1\}^{\mathsf{P}(X)}$ endowed with the natural product topology. The induced topology on $G(X)$ can be described directly: it is generated by the sub-base consisting of the sets

$$U^+ = \{\mathcal{F} \in G(X) : U \in \mathcal{F}\} \text{ and } U^- = \{\mathcal{F} \in G(X) : U \in \mathcal{F}^\perp\}$$

where U runs over subsets of X. Endowed with this topology, $G(X)$ becomes a Hausdorff supercompact space. The latter means that each cover of $G(X)$ by the sub-basic sets has a 2-element subcover. Let also $N_2(X) = \{\mathcal{A} \in G(X) : \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^\perp\}$ denote the family of all linked inclusion hyperspaces on X and $\lambda(X) = \{\mathcal{F} \in G(X) : \mathcal{F} = \mathcal{F}^\perp\}$ the family of all maximal linked systems on X.

By [6], both the subspaces $\lambda(X)$ and $N_2(X)$ are closed in the space $G(X)$. Observe that $U^+ \cap \lambda(X) = U^- \cap \lambda(X)$ and hence the topology on $\lambda(X)$ is generated by the sub-basis consisting of the sets

$$U^\pm = \{\mathcal{A} \in \lambda(X) : U \in \mathcal{A}\},\ \ U \subset X.$$

The extension of a binary operation $*$ from X to $G(X)$ can be defined in the same manner as for ultrafilters, i.e., by the formula (1) applied to any two inclusion hyperspaces $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in G(X)$. In [7] it was shown that for an associative binary operation $*$ on X the space $G(X)$ endowed with the extended operation becomes a compact right-topological semigroup. The structure of this semigroup was studied in details in [7]. In particular, it was shown that for each group X the minimal left ideals of $G(X)$ are singletons containing *invariant* inclusion hyperspaces. Besides the Stone-Čech extension, the semigroup $G(X)$ contains many important spaces as closed subsemigroups. In particular, the space $\lambda(X)$ of maximal linked systems on X is a closed subsemigroup of $G(X)$. The space $\lambda(X)$ is well-known in General and Categorial Topology as the *superextension* of X, see [12].

We call an inclusion hyperspace $\mathcal{A} \in G(X)$ *invariant* if $x\mathcal{A} = \mathcal{A}$ for all $x \in X$. It follows from the definition of the topology on $G(X)$ that the set $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ of all invariant inclusion hyperspaces is closed and non-empty in $G(X)$. Moreover, the set $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ coincides with the minimal ideal of $G(X)$, which is a closed semigroup of right zeros. The latter means that $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B}$ for all $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \overset{\leftrightarrow}{G}(X)$.

The minimal ideal $\overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ contains the closed subset $\overset{\leftrightarrow}{N}_2(X) = N_2(X) \cap \overset{\leftrightarrow}{G}(X)$ of invariant linked systems on X. The subset $\max \overset{\leftrightarrow}{N}_2(X)$ of *maximal invariant linked systems* on X is denoted by $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)$. It can be shown that $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)$ is a closed subsemigroup of $\overset{\leftrightarrow}{N}_2(X)$. By [2, 2.2], this semigroup has cardinality $|\overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)| = 2^{2^{|X|}}$ for every infinite group X.

The thorough study of algebraic properties of semigroups of inclusion hyperspaces and the superextensions of groups was started in [7] and continued in [1], [2] and [3]. In this paper we construct a faithful representation of the semigroups $G(X)$ and $\lambda(X)$ in the semigroup $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ of all self-maps of the power-set $\mathsf{P}(X)$ and show that the image of $\lambda(X)$ in $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ coincides with the semigroup $\lambda(X, \mathsf{P}(X))$ of all functions $f : \mathsf{P}(X) \to \mathsf{P}(X)$ that are equivariant, monotone and symmetric in the sense that $f(X \setminus A) = X \setminus f(A)$ for all $A \subset X$. Using this representation we prove that each minimal left ideal of $\lambda(X)$ is topologically isomorphic to a minimal left ideal of the semigroup $\mathsf{pT}^{\mathsf{pT}}$, where by pT we denote the family of pretwin subsets of X. A subset A of a group X is called a *pretwin subset* if $xA \subset X \setminus A \subset yA$ for some $x, y \in X$.

1 RIGHT-TOPOLOGICAL SEMIGROUPS

In this section we recall some information from [10] related to right-topological semigroups. By definition, a right-topological semigroup is a topological space S endowed with a semigroup operation $* : S \times S \to S$ such that for every $a \in S$ the right shift $r_a : S \to S$, $r_a : x \mapsto x * a$, is continuous. If the semigroup operation $* : S \times S \to S$ is (separately) continuous, then $(S, *)$ is a *(semi-)topological semigroup*.

From now on, S is a compact Hausdorff right-topological semigroup. We shall recall some known information concerning ideals in S, see [10].

A non-empty subset I of S is called a *left* (resp. *right*) *ideal* if $SI \subset I$ (resp. $IS \subset I$). If I is both a left and right ideal in S, then I is called an *ideal* in S. Observe that for every $x \in S$ the set $SxS = \{sxt : s, t \in S\}$ (resp. $Sx = \{sx : s \in S\}$, $xS = \{xs : s \in S\}$) is an ideal (resp. left ideal, right ideal) ideal in S. Such an ideal is called *principal*. An ideal $I \subset S$ is called *minimal* if any ideal of S that lies in I coincides with I. By analogy we define minimal left and right ideals of S. It is easy to see that each minimal left (resp. right) ideal I is principal. Moreover, $I = Sx$ (resp. $I = xS$) for each $x \in I$. This simple observation implies that each minimal left ideal in S, being principal, is closed in S. By [10, 2.6], each left ideal in S contains a minimal left ideal.

We shall use the following known fact, see [3, Lemma 1.1].

Proposition 1.1. *If a homomorphism $h : S \to S'$ between two semigroups is injective on some minimal left ideal of S, then h is injective on each minimal left ideal of S.*

2 THE FUNCTION REPRESENTATION OF THE SEMIGROUP $G(X)$

In this section given a group X we introduce the function representation $\Phi : G(X) \to \mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ of the semigroup $G(X)$ in the semigroup $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ of all self-maps of the power-set $\mathsf{P}(X)$ of X. The semigroup $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ endowed with the Tychonov product topology is a compact right-topological semigroup naturally homeomorphic to the Cantor cube $(\{0,1\}^X)^{\mathsf{P}(X)} = \{0,1\}^{X \times \mathsf{P}(X)}$. The sub-base of the topology of $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ consists of the sets

$$\langle x, A\rangle^+ = \{f \in \mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)} : x \in f(A)\},$$
$$\langle x, A\rangle^- = \{f \in \mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)} : x \notin f(A)\}.$$

Given an inclusion hyperspace $\mathcal{A} \in G(X)$ consider the function

$$\Phi_{\mathcal{A}} : \mathsf{P}(X) \to \mathsf{P}(X), \ \ \Phi_{\mathcal{A}}(A) = \{x \in G : x^{-1}A \in \mathcal{A}\}$$

called the *function representation* of $\mathcal{A}$.

Proposition 2.1. *A function $\varphi : \mathsf{P}(X) \to \mathsf{P}(X)$ coincides with the function representation $\Phi_{\mathcal{A}}$ of some (invariant) inclusion hyperspace $\mathcal{A} \in G(X)$ if and only if φ is*

1) equivariant *in the sense that $\varphi(xA) = x\varphi(A)$ for any $A \subset X$ and $x \in X$;*

2) monotone *in the sense that $\varphi(A) \subset \varphi(B)$ for any subsets $A \subset B$ of X;*

3) *$\varphi(\varnothing) = \varnothing$, $\varphi(X) = X$ (and $\varphi(\mathsf{P}(X)) \subset \{\varnothing, X\}$).*

Proof. To prove the "only if" part, take any inclusion hyperspace $\mathcal{A} \in G(X)$ and consider its function representation $\Phi_{\mathcal{A}}$.

It is equivariant because

$$\Phi_{\mathcal{A}}(xA) = \{y \in X : y^{-1}xA \in \mathcal{A}\} = \{xy : y^{-1}A \in \mathcal{A}\} = x\,\Phi_{\mathcal{A}}(A)$$

for any $x \in X$ and $A \subset X$.

Also it is monotone because

$$\Phi_{\mathcal{A}}(A) = \{x \in G : x^{-1}A \in \mathcal{A}\} \subset \{x \in G : x^{-1}B \in \mathcal{A}\} = \Phi_{\mathcal{A}}(B)$$

for any subsets $A \subset B$ of X.

It is clear that $\Phi_{\mathcal{A}}(\varnothing) = \varnothing$ and $\Phi_{\mathcal{A}}(X) = X$.

If $\mathcal{A}$ is invariant, then for every $A \in \mathcal{A}$ we get $\Phi_{\mathcal{A}}(A) = X$ and for each $A \in \mathsf{P}(X) \setminus \mathcal{A}$ we get $\Phi_{\mathcal{A}}(A) = \varnothing$.

To prove the "if" part, fix any equivariant monotone map $\varphi : \mathsf{P}(X) \to \mathsf{P}(X)$ with $\varphi(\varnothing) = \varnothing$ and $\varphi(X) = X$ and observe that the family

$$\mathcal{A}_\varphi = \{x^{-1}A : A \subset X, \ x \in \varphi(A)\}$$

is an inclusion hyperspace with $\Phi_{\mathcal{A}_\varphi} = \varphi$. If $\varphi(\mathsf{P}(X)) \subset \{\varnothing, X\}$, then the inclusion hyperspace $\mathcal{A}_\varphi$ is invariant. □

Remark 2.1. *If X is a left-topological group and $\mathcal{A}$ is the filter of neighborhoods of the identity element e of X, then the functional representations $\Phi_{\mathcal{A}}$ and $\Phi_{\mathcal{A}^\perp}$ have transparent topological interpretations: for any subset $A \subset X$ the set $\Phi_{\mathcal{A}}(A)$ coincides with the interior of a set $A \subset X$ while $\Phi_{\mathcal{A}^\perp}(A)$ with the closure of A in X!*

The correspondence $\Phi : \mathcal{A} \mapsto \Phi_{\mathcal{A}}$ determines a map $\Phi : G(X) \to \mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ called the *function representation* of the semigroup $G(X)$.

Theorem 1. *The function representation $\Phi : G(X) \to \mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ is a continuous injective semigroup homomorphism.*

Proof. To check that Φ is a semigroup homomorphism, take any two inclusion hyperspaces $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in G(X)$ and let $\mathcal{Z}=\mathcal{X}\circ\mathcal{Y}$. We need to check that $\Phi_{\mathcal{Z}}(A)=\Phi_{\mathcal{X}}\circ\Phi_{\mathcal{Y}}(A)$ for every $A\subset X$. Observe that

$$\Phi_{\mathcal{Z}}(A)=\{z\in G: z^{-1}A\in\mathcal{Z}\}=\{z\in G:\{x\in G: x^{-1}z^{-1}A\in\mathcal{Y}\}\in\mathcal{X}\}=$$
$$=\{z\in G:\Phi_{\mathcal{Y}}(z^{-1}A)\in\mathcal{X}\}=\{z\in G: z^{-1}\Phi_{\mathcal{Y}}(A)\in\mathcal{X}\}=\Phi_{\mathcal{X}}(\Phi_{\mathcal{Y}}(A)).$$

To see that Φ is injective, take any two distinct inclusion hyperspaces $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in G(X)$. Without loss of generality, $\mathcal{X}\setminus\mathcal{Y}$ contains some set $A\subset X$. It follows that $e\in\Phi_{\mathcal{X}}(A)$ but $e\notin\Phi_{\mathcal{Y}}(A)$ and hence $\Phi_{\mathcal{X}}\neq\Phi_{\mathcal{Y}}$.

To prove that $\Phi: G(X)\to\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ is continuous we first define a convenient sub-base of the topology on the spaces $\mathsf{P}(X)$ and $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$. The product topology of $\mathsf{P}(X)$ is generated by the sub-base consisting of the sets

$$x^+=\{A\subset X: x\in A\}\text{ and }x^-=\{A\subset X: x\notin A\}$$

where $x\in X$. On the other hand, the product topology on $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ is generated by the sub-base consisting of the sets

$$\langle x,A\rangle^+=\{f\in\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}: x\in f(A)\}\text{ and }\langle x,A\rangle^-=\{f\in\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}: x\notin f(A)\}$$

where $A\in\mathsf{P}(X)$ and $x\in X$.

Now observe that the preimage

$$\Phi^{-1}(\langle x,A\rangle^+)=\{\mathcal{A}\in G(X): x\in\Phi_{\mathcal{A}}(A)\}=\{\mathcal{A}\in G(X): x^{-1}A\in\mathcal{A}\}=(x^{-1}A)^+$$

is open in $G(X)$. The same is true for the preimage

$$\Phi^{-1}(\langle x,A\rangle^-)=\{\mathcal{A}\in G(X): x\notin\Phi_{\mathcal{A}}(A)\}=\{\mathcal{A}\in G(X): x^{-1}A\notin\mathcal{A}\}=(X\setminus x^{-1}A)^-$$

which also is open in $G(X)$. $\square$

3 THE SEMIGROUP $\lambda(X,\mathsf{P}(X))$ AND ITS PROJECTIONS $\lambda(X,\mathsf{F})$

Since for a group X the function representation $\Phi: G(X)\to\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ is an isomorphic embedding, instead of the semigroup $\lambda(X)$ we can study its isomorphic copy $\lambda(X,\mathsf{P}(X))=\Phi(\lambda(X))\subset\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$. Our strategy is to study $\lambda(X,\mathsf{P}(X))$ via its projections $\lambda(X,\mathsf{F})$ onto the faces $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{F}}$ of the cube $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$, where F is a suitable subfamily of $\mathsf{P}(X)$.

Given a subfamily $\mathsf{F}\subset\mathsf{P}(X)$ by

$$\mathrm{pr}_{\mathsf{F}}:\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}\to\mathsf{P}(X)^{\mathsf{F}},\ \ \mathrm{pr}_{\mathsf{F}}: f\mapsto f|\mathsf{F},$$

we denote the projection of $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ onto its F-face $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{F}}$. Let

$$\Phi_{\mathsf{F}}=\mathrm{pr}_{\mathsf{F}}\circ\Phi:\lambda(X)\to\mathsf{P}(X)^{\mathsf{F}}$$

and

$$\lambda(X,\mathsf{F})=\Phi_{\mathsf{F}}(\lambda(X))=\mathrm{pr}_{\mathsf{F}}(\lambda(X,\mathsf{P}(X))=(\mathrm{pr}_{\mathsf{F}}\circ\Phi)(\lambda(X)).$$

Now we detect functions $f:\mathsf{F}\to\mathsf{P}(X)$ belonging to the image $\lambda(X,\mathsf{F})$. Let us call a family $\mathsf{F}\subset\mathsf{P}(X)$

- X-*invariant* if $xF \in \mathsf{F}$ for every $F \in \mathsf{F}$ and every $x \in X$;
- *symmetric* if for each $A \in \mathsf{F}$ we get $X \setminus A \in \mathsf{F}$.

Theorem 2. *A function $f : \mathsf{F} \to \mathsf{P}(X)$ defined on a symmetric X-invariant subfamily $\mathsf{F} \subset \mathsf{P}(X)$ belongs to the image $\lambda(X, \mathsf{F}) = \Phi_{\mathsf{F}}(\lambda(X))$ if and only if*

1) f is equivariant;

2) f is monotone;

3) f is symmetric in the sense that $f(X \setminus A) = X \setminus f(A)$ for each $A \in \mathsf{F}$.

Proof. To prove the "only if" part, take any maximal linked system $\mathcal{L} \in \lambda(X)$ and consider its function representation $f = \Phi_{\mathcal{L}} : \mathsf{P}(X) \to \mathsf{P}(X)$.

By Proposition 2.1, the function f is equivariant and monotone. Consequently, the restriction $f|\mathsf{F}$ satisfies the items (1), (2). To prove the third item, take any set $A \in \mathsf{F}$ and observe that

$$\begin{aligned} f(X \setminus A) = \{x \in X : x^{-1}(X \setminus A) \in \mathcal{L}\} = \{x \in X : X \setminus x^{-1}A \in \mathcal{L}\} = \\ = \{x \in X : x^{-1}A \notin \mathcal{L}\} = X \setminus \{x \in X : x^{-1}A \in \mathcal{L}\} = X \setminus f(A). \end{aligned}$$

This completes the proof of the "only if" part.

To prove the "if" part, take any function $f : \mathsf{F} \to \mathsf{P}(X)$ satisfying the conditions 1)–3) and consider the family

$$\mathcal{L}_f = \{x^{-1}A : A \in \mathsf{F},\ x \in f(A)\}.$$

We claim that this family is linked. Assuming the converse, find two sets $A, B \in \mathsf{F}$ and two points $x \in f(A)$ and $y \in f(B)$ with $x^{-1}A \cap y^{-1}B = \varnothing$. Then $yx^{-1}A \subset X \setminus B$ and hence $yx^{-1}f(A) \subset f(X \setminus B) = X \setminus f(B)$ by the properties 1)–3) of the map f. Then $x^{-1}f(A) \subset X \setminus y^{-1}f(B)$, which is not possible because the neutral element e of the group X belongs to $x^{-1}f(A) \cap y^{-1}f(B)$.

Enlarge the linked family $\mathcal{L}_f$ to a maximal linked family $\mathcal{L} \in \lambda(X)$. We claim that $\Phi_{\mathcal{L}}|\mathsf{F} = f$. Indeed, take any set $A \in \mathsf{F}$ and observe that

$$f(A) \subset \{x \in X : x^{-1}A \in \mathcal{L}_f\} \subset \{x \in X : x^{-1}A \in \mathcal{L}\} = \Phi_{\mathcal{L}}(A).$$

To prove the reverse inclusion, observe that for any $x \in X \setminus f(A) = f(X \setminus A)$ we get $x^{-1}(X \setminus A) = X \setminus x^{-1}A \in \mathcal{L}_f \subset \mathcal{L}$. Since $\mathcal{L}$ is linked, $x^{-1}A \notin \mathcal{L}$ and hence $x \notin \Phi_{\mathcal{L}}(A)$. □

A subfamily $\mathsf{F} \subset \mathsf{P}(X)$ is called $\subset$-*incomparable* if for any subset $A, B \in \mathsf{F}$ the inclusion $A \subset B$ implies the equality $A = B$. In this case each function $f : \mathsf{F} \to \mathsf{P}(X)$ is monotone, so the characterization Theorem 2 simplifies as follows.

Corollary 3.1. *A function $f : \mathsf{F} \to \mathsf{P}(X)$ defined on a $\subset$-incomparable symmetric X-invariant subfamily $\mathsf{F} \subset \mathsf{P}(X)$ belongs to the image $\lambda(X, \mathsf{F}) = \Phi_{\mathsf{F}}(\lambda(X))$ if and only if f is equivariant and symmetric.*

A subfamily $\mathsf{F} \subset \mathsf{P}(X)$ is called λ-*invariant* if $\Phi_{\mathcal{L}}(\mathsf{F}) \subset \mathsf{F}$ for every maximal linked system $\mathcal{L} \in \lambda(X)$. In this case $\lambda(X, \mathsf{F}) \subset \mathsf{F}^{\mathsf{F}}$ is a subsemigroup of the right-topological group F^{F} of all self-maps of F.

Now we see that Theorem 1 implies

Proposition 3.1. *For any λ-invariant subfamily $\mathsf{F} \subset \mathsf{P}(X)$ the map*

$$\Phi_{\mathsf{F}} = \mathrm{pr}_{\mathsf{F}} \circ \Phi : \lambda(X) \to \lambda(X, \mathsf{F}) \subset \mathsf{F}^{\mathsf{F}}$$

is a continuous semigroup homomorphism and $\lambda(X, \mathsf{F})$ is a compact right-topological semigroup.

4 Self-linked sets in groups

Our strategy in studying minimal left ideals of the semigroup $\lambda(X)$ consists in finding a relatively small λ-invariant subfamily $\mathsf{F} \subset \mathsf{P}(X)$ such that the function representation $\Phi_{\mathsf{F}} : \lambda(X) \to \lambda(X, \mathsf{F})$ is injective on some (equivalently all) minimal left ideals of $\lambda(X)$.

The first step in finding such a family F is to consider the family of self-linked sets in X.

Definition 4.1. *A subset A of a group X is* self-linked *if $xA \cap yA \neq \varnothing$ for all $x, y \in X$.*

Self-linked sets in (finite) groups were studied in details in [1]. The following simple characterization can be easily derived from the definitions.

Proposition 4.1. *For a subset $A \subset X$ the following conditions are equivalent:*

1) *A is self-linked;*

2) *the family of shifts $\{xA : x \in X\}$ is linked;*

3) *$AA^{-1} = X$;*

4) *A belongs to an invariant linked system $\mathcal{A} \in \overleftrightarrow{N}_2(X)$;*

5) *A belongs to a maximal invariant linked system $\mathcal{A} \in \overleftrightarrow{\lambda}(X) = \max \overleftrightarrow{N}_2(X)$.*

The following proposition was first proved in [3, 4.1]. Here we present a short proof for completeness.

Proposition 4.2. *For any invariant linked system $\mathcal{L}_0 \in \overleftrightarrow{N}_2(X)$ the upper set*

$$\uparrow\mathcal{L}_0 = \{\mathcal{L} \in \lambda(X) : \mathcal{L} \supset \mathcal{L}_0\}$$

is a closed left ideal in $\lambda(X)$.

Proof. Let $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \lambda(X)$ be maximal linked systems with $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{B}$. Then for every subset $L \in \mathcal{L}_0$ we get

$$L = \bigcup_{x \in X} x(x^{-1}L) \in \mathcal{A} * \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A} * \mathcal{B}$$

which means that $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A} * \mathcal{B}$.

To show that $\uparrow\mathcal{L}_0$ is closed in $\lambda(X)$, take any maximal linked system $\mathcal{L} \in \lambda(X) \setminus \uparrow\mathcal{L}_0$ and find a set $A \in \mathcal{L}_0$ with $A \notin \mathcal{L}$. Since $\mathcal{L}$ is maximal linked, $X \setminus A \in \mathcal{L}$. Consequently, $(X \setminus A)^{\pm}$ is an open neighborhood of $\mathcal{L}$ that does not intersect $\uparrow\mathcal{L}_0$. $\square$

Observe that any linked system $\mathcal{L} \in N_2(X)$ extending an invariant linked system $\mathcal{L}_0 \in \overset{\leftrightarrow}{N}_2(X)$ lies in the inclusion hyperspace $\mathcal{L}_0^{\perp}$. It turns out that sets from $\mathcal{L}_0^{\perp} \setminus \mathcal{L}_0$ have a specific structure described in the following theorem.

Theorem 3. *For any maximal invariant linked system $\mathcal{L}_0 \in \overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)$ and any $A \in \mathcal{L}_0^{\perp} \setminus \mathcal{L}_0$ there are points $a, b \in X$ such that $aA \subset X \setminus A \subset bA$.*

Proof. Fix a subset $A \in \mathcal{L}_0^{\perp} \setminus \mathcal{L}_0$. We claim that

$$aA \cap A = \varnothing \tag{2}$$

for some $a \in X$. Assuming the converse, we would conclude that the family $\{xA : x \in X\}$ is linked and then the invariant linked system $\mathcal{L}_0 \cup \{xA : x \in X\}$ is strictly larger than $\mathcal{L}_0$, which impossible because of the maximality of $\mathcal{L}_0$.

Next, we find $b \in X$ with

$$A \cup bA = X. \tag{3}$$

Assuming that no such a point b exist, we conclude that for any $x, y \in X$ the union $xA \cup yA \neq X$. Then $(X \setminus xA) \cap (X \setminus yA) = X \setminus (xA \cup yA) \neq \varnothing$, which means that the family $\{X \setminus xA : x \in X\}$ is linked and invariant. We claim that $X \setminus A \in \mathcal{L}_0^{\perp}$. Assuming the converse, we would conclude that $X \setminus A$ misses some set $L \in \mathcal{L}_0$. Then $L \subset A$ and hence $A \in \mathcal{L}_0$ which is not the case. Thus $X \setminus A \in \mathcal{L}_0^{\perp}$ and hence $\{X \setminus xA : x \in X\} \subset \mathcal{L}_0^{\perp}$ because $\mathcal{L}_0^{\perp}$ is invariant. Since $\mathcal{L}_0 \cup \{X \setminus xA : x \in X\}$ is an invariant linked system containing $\mathcal{L}_0$, the maximality of $\mathcal{L}_0$ guarantees that $G \setminus A \in \mathcal{L}_0$ which contradicts $A \in \mathcal{L}_0^{\perp}$.

Unifying the equalities (2) and (3) we get the required inclusions

$$aA \subset X \setminus A \subset bA.$$

$\square$

5 Twin and pretwin sets in groups

Having in mind the sets appearing in Theorem 3 we introduce the following two notions.

Definition 5.1. *A subset A of a group X is called*

- a twin subset *if $X \setminus A = xA$ for some $x \in X$;*
- a pretwin subset *if $xA \subset X \setminus A \subset yA$ for some $x, y \in X$.*

By T and pT we denote the families of twin and pretwin subsets of X, respectively.

Proposition 5.1. *The families* pT *and* T *are* λ*-invariant.*

Proof. Take any maximal linked system $\mathcal{L} \in \lambda(X)$ and consider its function representation $f = \Phi_{\mathcal{L}} : \mathsf{P}(X) \to \mathsf{P}(X)$, which is equivariant, monotone, and symmetric according to Theorem 2.

To show that the family pT is λ-invariant, take any pretwin set $A \in \mathsf{pT}$ and find two points $x, y \in X$ with $xA \subset X \setminus A \subset yA$. Applying to those inequalities the monotone equivariant symmetric function f we get

$$xf(A) = f(xA) \subset f(X \setminus A) = X \setminus f(A) \subset f(yA) = yf(A),$$

which means that $f(A)$ is pretwin.

If a set A is twin, then $X \setminus A = xA$ for some $x \in X$ and then $X \setminus f(A) = f(X \setminus A) = f(xA) = xf(A)$, which means that $f(A)$ is a twin set. $\square$

Propositions 5.1 and 3.1 imply that $\lambda(X, \mathsf{T})$ and $\lambda(X, \mathsf{pT})$ both are compact right-topological semigroups. The importance of the family pT is explained by the following

Theorem 4. *For every maximal invariant linked system* $\mathcal{L}_0 \in \overset{\leftrightarrow}{\lambda}(X)$ *the restriction* $\Phi_{\mathsf{pT}}|{\uparrow}\mathcal{L}_0 : {\uparrow}\mathcal{L}_0 \to \lambda(X, \mathsf{pT})$ *is a topological isomorphism of the compact right-topological semigroups.*

Proof. Since Φ_{pT} is continuous and the semigroups $\lambda(X)$ and $\lambda(X, \mathsf{pT})$ are compact. It suffices to check that the restriction $\Phi_{\mathsf{pT}}|{\uparrow}\mathcal{L}_0$ is bijective.

To show that it is surjective, take any function $f \in \lambda(X, \mathsf{pT})$, which is equivariant, monotone, and symmetric according to Theorem 2.

By the proof of Theorem 2, the family

$$\mathcal{L}_f = \{x^{-1}A : A \in \mathsf{pT},\ x \in f(A)\}$$

is linked. We claim that so is the family $\mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_f$. Assuming the opposite we could find disjoint sets $A \in \mathcal{L}_f$ and $B \in \mathcal{L}_0$. Since A is pretwin, $xA \subset X \setminus A \subset yA$ for some $x, y \in X$. Now we see that

$$B \subset X \setminus A \subset yA \subset X \setminus yB,$$

which is not possible as B is self-linked and hence meets its shift yB.

Now extend the linked family $\mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_f$ to a maximal linked family $\mathcal{L} \in \lambda(X)$ and show that $\Phi_{\mathcal{L}}|\mathsf{pT} = f$ (repeating the argument of the proof of Theorem 2).

Next, we show that the restriction $\Phi_{\mathsf{pT}}|{\uparrow}\mathcal{L}_0$ is injective. Take any two distinct maximal linked systems $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in {\uparrow}\mathcal{L}_0$. It follows that there is a set $A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$. This set belongs to $\mathcal{L}_0^{\perp} \setminus \mathcal{L}_0$ and hence is pretwin by Theorem 3. Now the definition of the function representation yields that $e \in \Phi_{\mathcal{X}}(A) \setminus \Phi_{\mathcal{Y}}(A)$, witnessing that $\Phi_{\mathsf{pT}}(\mathcal{X}) \neq \Phi_{\mathsf{pT}}(\mathcal{Y})$. $\square$

Since the function representation Φ_{pT} is injective on the left ideal ${\uparrow}\mathcal{L}_0$ of $\lambda(X)$, it is injective on some minimal left ideal of $\lambda(X)$ and hence is injective on each minimal left ideal of $\lambda(X)$, see Proposition 1.1. In such a way we prove

Corollary 5.1. *The function representation $\Phi_{\mathsf{pT}} : \lambda(X) \to \lambda(X, \mathsf{pT})$ is injective on each minimal left ideal of $\lambda(X)$. Consequently, each minimal left ideal of $\lambda(X)$ is topologically isomorphic to a minimal left ideal of the semigroup $\lambda(X, \mathsf{pT})$.*

6 Acknowledgments

The author express his sincere thanks to Taras Banakh for help during preparation of the paper.

References

1. Banakh T., Gavrylkiv V., Nykyforchyn O. *Algebra in superextensions of groups, I: zeros and commutativity*, Algebra Discrete Math, 3 (2008), 1-29.

2. Banakh T., Gavrylkiv V. *Algebra in superextension of groups, II: cancelativity and centers*, Algebra Discrete Math, 4 (2008), 1-14.

3. Banakh T., Gavrylkiv V. *Algebra in the superextensions of groups, III: minimal left ideals*, Mat. Stud., **31**, 2 (2009), 142-148.

4. Bilyeu R.G., Lau A. *Representations into the hyperspace of a compact group*, Semigroup Forum **13** (1977), 267-270.

5. Engelking R. General Topology, PWN, Warsaw, 1977.

6. Gavrylkiv V. *The spaces of inclusion hyperspaces over noncompact spaces*, Mat. Stud., **28,** 1 (2007), 92-110.

7. Gavrylkiv V. *Right-topological semigroup operations on inclusion hyperspaces*, Mat. Stud., **29**, 1 (2008), 18-34.

8. Hindman N., *Finite sums from sequences within cells of partition of* $\mathbb{N}$, J. Combin. Theory Ser. A **17** (1974), 1-11.

9. Hindman N., *Ultrafilters and combinatorial number theory*, Lecture Notes in Math. **751** (1979), 49-184.

10. Hindman N., Strauss D. Algebra in the Stone-Čech compactification, de Gruyter, Berlin, New York, 1998.

11. Protasov I. Combinatorics of Numbers, VNTL, Lviv, 1997.

12. Teleiko A., Zarichnyi M. Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces, VNTL, Lviv, 1999.

13. Trnkova V. *On a representation of commutative semigroups*, Semigroup Forum, **10,** 3 (1975), 203-214.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
Ivano-Frankivsk, Ukraine.
`vgavrylkiv@yahoo.com`

Received 25.05.2010

Гаврилків В.М. *Про зображення напівгруп гіперпросторів включення* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — C. 24–34.

В роботі вивчається алгебраїчна структура компактної правотопологічної напівгрупи $G(X)$, яка складається зі всіх гіперпросторів включення на групі X. Дана напівгрупа містить напівгрупу $\lambda(X)$ всіх максимальних зчеплених систем як замкнену піднапівгрупу. Побудовано точне зображення напівгруп $G(X)$ та $\lambda(X)$ в напівгрупі $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ всіх відображень степінь-множини $\mathsf{P}(X)$ в себе. Використовуючи це зображення доведено, що кожен мінімальний лівий ідеал напівгрупи $\lambda(X)$ топологічно ізоморфний мінімальному лівому ідеалу напівгрупи $\mathsf{pT}^{\mathsf{pT}}$.

Гаврилкив В.М. *О представлении полугрупп гиперпространств включения* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — C. 24–34.

В работе изучается алгебраическая структура компактной правотопологической полугруппы $G(X)$, которая содержит все гиперпространства включения на группе X. Эта полугруппа содержит полугруппу $\lambda(X)$ всех максимальных сцепленных систем в качестве замкнутой подполугруппы. Построено точное представление полугрупп $G(X)$ и $\lambda(X)$ в полугруппе $\mathsf{P}(X)^{\mathsf{P}(X)}$ всех отображений степень-множества $\mathsf{P}(X)$ в себя. Используя это представление доказано, что каждый минимальный левый идеал полугруппы $\lambda(X)$ топологически изоморфен минимальному левому идеалу полугруппы $\mathsf{pT}^{\mathsf{pT}}$.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №.1

УДК 517.98

Hryniv R.O.

ANALYTICITY AND UNIFORM STABILITY IN THE INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR IMPEDANCE STURM–LIOUVILLE OPERATORS

Hryniv R.O. *Analyticity and uniform stability in the inverse spectral problem for impedance Sturm–Liouville operators*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 35–58.

We prove that the inverse spectral mapping reconstructing the impedance function of the Sturm–Liouville operators on $[0,1]$ in impedance form from their spectral data (two spectra or one spectrum and the corresponding norming constants) is analytic and uniformly stable in a certain sense.

1 Introduction

The main goal of this paper is to establish analyticity and uniform continuity of solutions to the inverse spectral problems for a certain class of Sturm–Liouville operators on $[0,1]$ in the so-called *impedance* form. Namely, the spectral problems of interest are

$$-(a^2(x)y'(x))' = \lambda a^2(x)y(x), \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

subject to suitable boundary conditions, e.g., the Neumann ones

$$y'(0) = y'(1) = 0 \tag{2}$$

or Neumann–Dirichlet ones

$$y'(0) = y(1) = 0. \tag{3}$$

Here $a > 0$ is an *impedance function*, which will be supposed to belong to the Sobolev space $W_2^1(0,1)$, so that the logarithmic derivative $\tau := (\log a)'$ (called the *logarithmic impedance* below) is in $L_2(0,1)$. Without loss of generality we may assume that $a(0) = 1$, so that $a(x) = \exp\bigl(\int_0^x \tau(s)\,ds\bigr)$. Such spectral problems arise in many applications, e.g., in modelling propagation of sound waves in a duct [44], torsional vibrations of the earth [17] or longitudinal vibrations in a thin straight rod [13].

2000 *Mathematics Subject Classification:* Primary 34A55, Secondary 34L40, 47E05.

Key words and phrases: inverse spectral problems, Sturm–Liouville operators, impedance, analyticity, uniform stability.

The corresponding differential operators S_{N} and S_{D} given by the differential expression $\ell(y) := a^{-2}(a^2y')'$ and boundary conditions (2) and (3) respectively are self-adjoint in the weighted Hilbert space $L_2\bigl((0,1); a^2\,dx\bigr)$ and have simple discrete spectra accumulating at $+\infty$. We denote by $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ the eigenvalues of S_{N} and by $0 < \mu_0 < \mu_1 < \cdots$ those of S_{D}. The inverse spectral problem is to reconstruct the impedance function a or its logarithm τ from the spectra of S_{N} and/or S_{D}.

For the standard Sturm–Liouville operators, i.e., those generated by the differential expression

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q,$$

with q a real-valued locally integrable *potential*, it was proved by Borg [7] in 1946 that, generically, knowledge of the spectrum corresponding to one set of boundary conditions (e.g. Neumann ones or Neumann–Dirichlet ones) does not allow to unambiguously determine q. (An exceptional situation where this is possible was pointed out by Ambartzumyan [5] in 1929.) However, two such spectra do uniquely determine q.

The same holds true for the inverse spectral problem of reconstructing the impedance function a of the operators S_{N} or S_{D}. In fact, these operators are unitarily equivalent to self-adjoint operators T_{N} and T_{D} acting in $L_2(0,1)$ and generated by the differential expression

$$\ell(\tau) := -\frac{1}{a}\frac{d}{dx}a^2\frac{d}{dx}\frac{1}{a} = -\Bigl(\frac{d}{dx} + \tau\Bigr)\Bigl(\frac{d}{dx} - \tau\Bigr) \tag{4}$$

and the boundary conditions

$$y^{[1]}(0) = y^{[1]}(1) = 0 \tag{5}$$

and

$$y^{[1]}(0) = y(1) = 0 \tag{6}$$

respectively. Here and hereafter $f^{[1]}(x) := f'(x) - \tau(x)f(x)$ shall denote the *quasi-derivative* of a function f. Moreover, for $a \in W_2^2(0,1)$ the differential expression $\ell(\tau)$ can be recast in the potential form

$$\ell(\tau) = -\frac{d^2}{dx^2} + \tau' + \tau^2$$

with potential $q = \tau' + \tau^2$. For $a \in W_2^1(0,1)$ the reduction to the potential form is still possible, but the potential q becomes a distribution from $W_2^{-1}(0,1)$ [39]. Sturm–Liouville and Schrödinger operators with singular potentials (that are, e.g., point interactions, measures, or distributions) have been widely studied; we refer the reader, e.g., to the books [1, 3] and to review paper [40] where additional references can be found. Inverse problems for distributional potentials in the space $W_2^{-1}(0,1)$ have also been successfully treated; see, e.g., [24, 41].

This suggests the following method of solving the inverse spectral problem for impedance Sturm–Liouville operators under consideration: first, one recasts the problem (1) in the potential form, then uses one of the algorithms reconstructing the potential q from the spectral data $\bigl((\lambda_n), (\mu_n)\bigr)$ of T_{N} and T_{D}, and, finally, finds τ by solving the Riccati differential equation $\tau' + \tau^2 = q$. However, this equation may not possess global solutions on

$[0, 1]$, whence it is desirable to find a way to reconstruct the impedance a or its logarithmic derivative τ directly from the spectral data for the operators T_{N} and T_{D}.

In the papers [2, 6, 8, 32, 35] several approaches to reconstruction of the impedance $a \in W_2^1(0, 1)$ were suggested and the corresponding spectral data were completely described. These necessary and sufficient conditions require that the spectra (λ_n) and (μ_n) must

(i) interlace, i.e., that $\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}$ for all $n \in \mathbb{Z}_+$, and

(ii) satisfy the asymptotic relations

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi n + \rho_{2n}, \qquad \sqrt{\mu_n} = \pi(n + \tfrac{1}{2}) + \rho_{2n+1},$$

where the sequence (ρ_n) belongs to ℓ_2.

Moreover, the induced mapping from the spectral data $\big((\lambda_n), (\mu_n)\big)$ into the impedance function a providing a solution to the inverse spectral problem was shown in [6] and [32] to be locally continuous in a certain sense. In particular, this yields local stability of the inverse spectral problem; see also similar stability results for the related problem of reconstructing the potential q in [4, 7, 16, 19–21, 31, 33, 34, 36–38, 46]. Here we introduce a metric on the set of the spectral data $\big((\lambda_n), (\mu_n)\big)$ by e.g. identifying such data with the sequence (ρ_n) in the representation of item (ii) above. Typically, this local stability states that, for a fixed $M > 0$, there are positive ε and L with the following property: if potentials q_1 and q_2 (resp., logarithmic impedances τ_1 and τ_2) are such that $\|q_1\|_* \le M$ and $\|q_2\|_* \le M$ (resp., $\|\tau_1\|_* \le M$ and $\|\tau_2\|_* \le M$) and the corresponding spectral data $\boldsymbol{\nu}_1 := \big((\lambda_{1,n}), (\mu_{1,n})\big)$ and $\boldsymbol{\nu}_2 := \big((\lambda_{2,n}), (\mu_{2,n})\big)$ satisfy $\|\boldsymbol{\nu}_1 - \boldsymbol{\nu}_2\| \le \varepsilon$, then

$$\|q_1 - q_2\|_* \le L\|\boldsymbol{\nu}_1 - \boldsymbol{\nu}_2\| \tag{7}$$

(resp., then

$$\|\tau_1 - \tau_2\|_* \le L\|\boldsymbol{\nu}_1 - \boldsymbol{\nu}_2\|) \tag{8}$$

for a suitable norm $\|\cdot\|_*$. For instance, local stability results with respect to the $L_2(0, 1)$-norm were established in [32, 38] in the regular case $q \in L_2(0, 1)$, and in [6, 8, 32] for impedance Sturm–Liouville operators. In [16, 33] the case $L_\infty(0, 1)$ was treated; earlier Hochstadt in [20, 21] proved stability if only finitely many eigenvalues in one spectrum are changed. The papers [19, 36] studied to what extent only finitely many eigenvalues in one or both spectra determine the potential, and the latter problem in the non-self-adjoint setting was recently discussed in [31]. Also, stability of the inverse spectral problems on semi-axis was proved in [30, 37], and the inverse scattering problem on the line was studied in [10, 18].

However, the above results cannot be considered satisfactory, as they refer to the norm of the potential q (resp. of the logarithmic impedance τ) to be recovered and thus specify neither the allowed noise level ε nor the Lipschitz constant L. Therefore we need a global stability result that asserts (7) whenever the spectral data $\boldsymbol{\nu}_1$ and $\boldsymbol{\nu}_2$ run through bounded sets $\mathscr{N}$ and with L only depending on $\mathscr{N}$.

Recently, such a uniform stability in the inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators on $[0, 1]$ was established by Shkalikov and Savchuk [43]. They considered operators with real-valued potentials from the Sobolev spaces $W_2^s(0,1)$ with $s > -1$. (For negative s, such potentials are distributions; see [40] for the review on Sturm–Liouville operators with distributional potentials.) Their approach for solving the inverse spectral problem was based on the so called Prüfer angle and used extensively the implicit function theorem. In our work [22] analyticity and global stability of the inverse spectral mapping for $s \in [-1,0]$ was established using a different approach that generalizes the classical method due to Gelfand and Levitan [12] and Marchenko [29] and has been successfully applied to reconstruction of Sturm–Liouville operators with singular potentials in [24, 25].

The main aim of this paper is to prove analyticity and Lipschitz continuity on bounded subsets of the inverse spectral mapping $\big((\lambda_n),(\mu_n)\big) \mapsto \tau$ for the class of the Sturm–Liouville operators in impedance form with logarithmic impedance $\tau \in L_2(0,1)$. To this end we use the approach of [2] to the inverse spectral problem for impedance Sturm–Liouville operators based on the Krein equation [27] and further develop the methods of [22]. Also, we discuss the analogous properties in the inverse spectral problem of reconstruction of τ from the Neumann spectrum (λ_n) and the corresponding norming constants α_n defined in Subsection 2.1.

We mention that the methods of [2] could be used to treat logarithmic impedances τ belonging to $L_p(0,1)$ with $p \in [1,\infty)$. However, apart from some technicalities caused by more complicated properties of the Fourier transform in $L_p(0,1)$ for $p \neq 2$, the approach would remain the same and we decided to sacrifice the generality to simplicity of presentation. See Section 5 for discussion of possible generalizations.

The paper is organised as follows. In the next section, we state the main results of the paper and recall the method of reconstructing the impedance Sturm–Liouville operators from their spectral data using the Gelfand–Levitan–Marchenko and Krein equations. In Section 3, we show analyticity and uniform continuity in the inverse problem of reconstructing the logarithmic impedance τ from the spectrum of the operator $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ and the sequence of the corresponding norming constants. Reconstruction from two spectra (those of $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ and $T_{\mathrm{D}}(\tau)$) is discussed in Section 4; there the problem is reduced to the one studied in Section 3 by showing that the norming constants depend analytically and Lipschitz continuously on these spectra. The last Section 5 discusses some ways of extending the results to a wider class of operators. Finally, three appendices contain auxiliary results on some related nonlinear mappings in $L_2(0,1)$, on relation between some analytic functions of sine type and their zeros, and on the special Banach algebra that were used in the proofs.

2 Preliminaries and main results

In this section we state the main results of the paper and recall the method of solution of the inverse spectral problem based on the Gelfand–Levitan–Marchenko [28] and Krein [27] equations. All the missing details can be found in [2].

2.1 Spectral data

Throughout this subsection, τ designates a fixed real-valued function in $L_2(0,1)$. We denote by λ_n and μ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, the eigenvalues of the operators $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ and $T_{\mathrm{D}}(\tau)$ respectively defined via (4)–(6) and recall that these eigenvalues interlace, i.e., $\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}$ for all $n \in \mathbb{Z}_+$, and satisfy the relations

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi n + \rho_{2n}, \qquad \sqrt{\mu_n} = \pi(n + \tfrac{1}{2}) + \rho_{2n+1} \tag{9}$$

with some $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$-sequence $\boldsymbol{\rho} = (\rho_n)$.

For $\lambda = \omega^2 \in \mathbb{C}$, the equation $\ell(\tau)u = \omega^2 u$ subject to the initial conditions $u(0) = 1$ and $u^{[1]}(0) = 0$ has the solution

$$c(x, \omega) = \cos \omega x + \int_0^x k(x, t) \cos \omega t \, dt, \tag{10}$$

where k is the kernel of the so called *transformation operator*. Clearly, $\cos \omega x$ is a solution of the "unperturbed" equation $\ell(0)u = \omega^2 u$ with $\tau = 0$; it is mapped into the solution $c(\cdot, \omega)$ for a generic τ by means of the transformation operator via (10). The function k vanishes for a.e. $(x, t) \in [0, 1]^2$ with $x < t$ and, for every $x \in [0, 1]$, $k(x, \cdot)$ belongs to $L_2(0, 1)$ and the mapping $x \mapsto k(x, \cdot)$ is continuous from $[0, 1]$ into $L_2(0, 1)$. Also, there exists a kernel k_1 with similar properties such that

$$c^{[1]}(x, \omega) = -\omega \sin \omega x - \omega \int_0^x k_1(x, t) \sin \omega t \, dt; \tag{11}$$

we recall that $f^{[1]} := f' - \tau f$ is the quasi-derivative of a function f.

Set $\omega_{2n} := \sqrt{\lambda_n}$ and $\omega_{2n+1} := \sqrt{\mu_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Then $c(\cdot, \omega_{2n})$ is an eigenfunction of the operator $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ corresponding to the eigenvalue $\lambda_n = \omega_{2n}^2$, and we call the number[1] $\alpha_n := 1/(2\|c(\cdot, \omega_{2n})\|^2)$ the *norming constant* for this eigenvalue. It is known [2] that

$$\alpha_n = 1 + \beta_n, \tag{12}$$

where the sequence $\boldsymbol{\beta} := (\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ belongs to ℓ_2. Moreover, the norming constants α_n can be determined from the spectra of the operators $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ and $T_{\mathrm{D}}(\tau)$ as follows. We set $C(\omega) := c(1, \omega)$ and $S(\omega) := c^{[1]}(1, \omega)$; due to (10) and (11) these are entire functions of exponential type 1 with zeros $\pm\sqrt{\mu_n}$ and $\pm\sqrt{\lambda_n}$ respectively. The Hadamard canonical products for S and C are

$$S(\omega) = \omega^2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{2n}^2 - \omega^2}{\pi^2 n^2}, \qquad C(\omega) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_{2n+1} - \omega^2}{\pi^2 (n + \frac{1}{2})^2}, \tag{13}$$

so that S and C are uniquely determined by their zeros. Then we have (cf. [2])

$$\alpha_n = -\frac{\omega_{2n}}{\dot{S}(\omega_{2n}) C(\omega_{2n})}, \tag{14}$$

where the dot denotes the derivative in ω.

---

[1] Here and hereafter, $\|f\|$ shall stand for the $L_2(0, 1)$-norm of a function f.

2.2 The main results

We introduce the set $\mathscr{N}$ of pairs $\big((\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}, (\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}\big)$ with the following properties:

- the sequences (λ_n) and (μ_n) strictly interlace, i.e., $\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}$ for all $n \in \mathbb{Z}_+$;
- the sequence $\boldsymbol{\rho} := (\rho_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, with $\rho_{2n} := \sqrt{\lambda_n} - \pi n$ and $\rho_{2n+1} := \sqrt{\mu_n} - \pi(n+\frac{1}{2})$, belongs to ℓ_2.

In this way every element $\boldsymbol{\nu} := \big((\lambda_n), (\mu_n)\big)$ of $\mathscr{N}$ is identified with a sequence (ρ_n) in ℓ_2 thus inducing a metric on $\mathscr{N}$. Namely, if $\boldsymbol{\nu}_1$ and $\boldsymbol{\nu}_2$ are elements of $\mathscr{N}$ and $\boldsymbol{\rho}_1 := (\rho_{1,n})$ and $\boldsymbol{\rho}_2 := (\rho_{2,n})$ are the corresponding ℓ_2-sequences of remainders, then

$$\operatorname{dist}_{\mathscr{N}}(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) := \|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2\|_{\ell_2}.$$

In what follows, $\boldsymbol{\nu}_0$ shall stand for the element of $\mathscr{N}$ corresponding to $\boldsymbol{\rho} = 0$; then we get $\operatorname{dist}_{\mathscr{N}}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}_0) = \|(\rho_n)\|_{\ell_2}$.

According to [2], every element of $\mathscr{N}$ gives the eigenvalue sequences of the operators $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ and $T_{\mathrm{D}}(\tau)$ for a unique real-valued function $\tau \in L_2(0,1)$ and, conversely, for every real-valued $\tau \in L_2(0,1)$ the spectra of the corresponding Sturm–Liouville operators $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ and $T_{\mathrm{D}}(\tau)$ form an element of $\mathscr{N}$. When the logarithmic impedance τ varies over a bounded subset of $L_2(0,1)$, then the corresponding spectral data $\big((\lambda_n), (\mu_n)\big)$ remain in a bounded subset of $\mathscr{N}$. Moreover, the Prüfer angle technique (cf. [41,42]) yields then a positive d such that all the corresponding spectral data $\big((\lambda_n), (\mu_n)\big)$ are *d-separated*, i.e., that $\mu_n - \lambda_n \ge d$ and $\lambda_{n+1} - \mu_n \ge d$ for every $n \in \mathbb{Z}_+$. Summarizing, we conclude that the uniform stability of the inverse spectral problem we would like to establish is only possible on bounded sets of spectral data in $\mathscr{N}$ that are d-separated for some $d > 0$.

This motivates the following definition.

Definition 2.1. *For $d \in (0, \pi/2)$ and $r > 0$, we denote by $\mathscr{N}(d,r)$ the set of all $\boldsymbol{\nu} \in \mathscr{N}$ that are d-separated and satisfy $\operatorname{dist}_{\mathscr{N}}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}_0) \le r$.*

In these notations, the first main result of the paper reads as follows.

Theorem 1. *For every $d \in (0, \pi/2)$ and $r > 0$, the inverse spectral mapping*

$$\mathscr{N}(d,r) \ni \boldsymbol{\nu} \mapsto \tau \in L_2(0,1) \tag{15}$$

is analytic and Lipschitz continuous.

See [9] for analyticity of mapping between Banach spaces. In fact, as in [22], we prove first the analyticity and Lipschitz continuity of the inverse spectral problem of reconstructing τ from the Neumann spectrum (λ_n) and the norming constants (α_n) (see Theorem 2 below), and then derive Theorem 1 by showing that the norming constants depend analytically and Lipschitz continuously on the two spectra.

More exactly, we denote by $\mathscr{L}$ the family of strictly increasing sequences $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ such that $\rho_{2n} := \sqrt{\lambda_n} - \pi n$ form an element of ℓ_2 and pull back the topology on $\mathscr{L}$ from that of ℓ_2 by identifying such $\boldsymbol{\lambda}$ with $(\rho_{2n}) \in \ell_2$. For $d \in (0,\pi)$ and $r > 0$, we denote by $\mathscr{L}(d,r)$ the closed convex subset of $\mathscr{L}$ consisting of sequences $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ such that $\|(\rho_{2n})\|_{\ell_2} \le r$ and $\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge d$ for all $n \in \mathbb{Z}_+$. Next, we write $\mathscr{A}$ for the set of sequences $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ of positive numbers such that the sequence (β_n) with $\beta_n := \alpha_n - 1$ belongs to ℓ_2. This induces the topology of ℓ_2 on $\mathscr{A}$; we further consider closed subsets $\mathscr{A}(d,r)$ of $\mathscr{A}$ consisting of all (α_n) satisfying the inequalities $\alpha_n \ge d$ for all $n \in \mathbb{Z}$ and the relation $\|(\beta_n)\|_{\ell_2} \le r$.

It is known [2] that, given an element $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}) \in \mathscr{L}\times\mathscr{A}$, there is a unique real-valued $\tau \in L_2(0,1)$ such that $\boldsymbol{\lambda}$ is the sequence of eigenvalues and $\boldsymbol{\alpha}$ the sequence of norming constants for the Sturm–Liouville operator $T_{\mathrm{N}}(\tau)$. Some further properties of the induced mapping are described in the following theorem.

Theorem 2. *For every $d \in (0,\pi)$ and $d' \in (0,1)$ and every positive r and r', the inverse spectral mapping*

$$\mathscr{L}(d,r) \times \mathscr{A}(d',r') \ni (\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}) \mapsto \tau \in L_2(0,1)$$

is analytic and Lipschitz continuous.

2.3 Solution of the inverse spectral problem using the Krein equation

The classical algorithm of reconstructing the potential $q = \tau' + \tau^2$ of a Sturm–Liouville operator uses the so called Gelfand–Levitan–Marchenko (GLM) equation relating the spectral data $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha})$ and the transformation operator K, see e.g. the monographs [28, 29] for details. The derivation of the GLM equation sketched below follows the reasoning of [24], to which we refer the reader for further details.

First we notice that due to the asymptotics of λ_n and α_n the series in

$$h(s) := 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\bigl[\alpha_n\cos(2\omega_{2n}s) - \cos(2\pi ns)\bigr] \tag{16}$$

converges in $L_2(0,1)$ (in fact, h is an even function on $(-1,1)$). Next, denote by F an integral operator in $L_2(0,1)$ with kernel

$$f(x,t) := \tfrac12\bigl[h\bigl(\tfrac{x+t}{2}\bigr) + h\bigl(\tfrac{x-t}{2}\bigr)\bigr]. \tag{17}$$

Starting with the resolution of identity for the operator $T_{\mathrm{N}}(\tau)$,

$$I = 2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\,\cdot\,,c_n)c_n,$$

with $c_n = c(\,\cdot\,,\omega_{2n})$ being the eigenfunction corresponding to the eigenvalue $\lambda_n = \omega_{2n}^2$, and using the relations (10) and the definition of F, after straightforward transformations one arrives at the equality

$$I = (I+K)(I+F)(I+K^*).$$

Actually, the above equality rewritten in terms of the kernels k and f of the operators K and F produces the GLM equation,

$$k(x,t) + f(x,t) + \int_0^x k(x,s)f(s,t)\,ds = 0, \qquad x > t. \tag{18}$$

Given the spectral data and thus the kernel f, one solves the GLM equation for the kernel k and then determines the potential q from the relation

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}k(x,x). \tag{19}$$

However, this approach does not work for impedance Sturm–Liouville operators under consideration since formula (19) is then meaningless: indeed, the kernel k is not regular enough to have a well-defined restriction $k(x,x)$ to the diagonal and the potential $q = \tau' + \tau^2$ is a distribution rather then a regular function. Instead, one can use the method of Krein that reconstructs the function $\tau \in L_2(0,1)$ directly. The original method was suggested by Krein [27] for smooth functions τ and was further developed for the class of impedance Sturm–Liouville operators with $\tau \in L_p(0,1)$, $p \in [1,\infty)$ in [2].

Namely, with the function h of (16), one considers a different GLM-type integral equation (called the *Krein equation*)

$$r(x,t) + h(x-t) + \int_0^x r(x,s)h(s-t)\,ds = 0, \qquad 0 < t < x < 1, \tag{20}$$

of which the GLM equation (18) is the even part (in the sense that if r is a solution to (20), then the function

$$k(x,t) := \tfrac{1}{2}\bigl[r(x, \tfrac{x-t}{2}) + r(x, \tfrac{x+t}{2})\bigr]$$

solves (18)). It can be proved (see the next section) that equation (20) possesses a unique solution r and, moreover, the function τ satisfies the equality

$$\tau = r(\cdot, 0). \tag{21}$$

This formula will be the basis of the reconstruction algorithm and stability analysis.

3 Stability of the inverse spectral problem: norming constants

In this section, we prove Theorem 2 on analytic and Lipschitz continuous dependence of the logarithmic potential τ determining the impedance Sturm–Liouville operator $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ on its eigenvalues λ_n and norming constants α_n.

We shall study the correspondence between the data $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathscr{L}(d,r) \times \mathscr{A}(d',r')$ and the functions τ through the chain of mappings

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \mapsto h \mapsto r \mapsto \tau,$$

in which h is the function of (16), r is the kernel solving the Krein equation (20), and, finally, τ is given by (21).

Lemma 3.1. *The mapping*

$$\mathscr{L}(d,r)\times\mathscr{A}(d',r')\ni(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha})\mapsto h\in L_2(0,1)$$

is analytic and Lipschitz continuous.

Proof. We have $h=1+h_{\boldsymbol{\lambda}}+h_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}}$, where

$$h_{\boldsymbol{\lambda}}(s):=2\sum_{n=0}^{\infty}[\cos(2\omega_{2n}s)-\cos(2\pi ns)],\qquad h_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}}(s):=2\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\cos(2\omega_{2n}s);$$

recall that the numbers $\rho_{2n}=\omega_{2n}-\pi n$ and $\beta_n:=\alpha_n-1$ form sequences in ℓ_2 that induce the topology of $\mathscr{L}$ and $\mathscr{A}$.

Introduce the function $f_{\boldsymbol{\lambda}}\in L_2(0,1)$ whose Fourier coefficients are $\hat{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(0)=0$ and

$$\hat{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(n)=-\hat{f}_{\boldsymbol{\lambda}}(-n):=\rho_{2n}$$

for $n\in\mathbb{N}$; then we have $h_{\boldsymbol{\lambda}}=\Phi_1(f_{\boldsymbol{\lambda}})$ with the mapping Φ_1 of Lemma A.1. Therefore the function $h_{\boldsymbol{\lambda}}$ depends analytically and Lipschitz continuously on $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ in bounded sets. Since the mapping sending $(\rho_{2n})\in\ell_2$ into $f_{\boldsymbol{\lambda}}\in L_2(0,1)$ is linear and *quasi-isometric* in the sense that $\|f_{\boldsymbol{\lambda}}\|=\sqrt{2}\|(\rho_{2n})\|$, we conclude that the mapping $\boldsymbol{\lambda}\mapsto h_{\boldsymbol{\lambda}}$ is analytic and Lipschitz continuous on bounded sets.

Next, let $g_{\boldsymbol{\alpha}}$ be the function in $L_2(0,1)$ whose Fourier coefficients are

$$\hat{g}_{\boldsymbol{\lambda}}(n)=\hat{g}_{\boldsymbol{\lambda}}(-n):=\beta_n$$

for $n\in\mathbb{Z}_+$. Then $h_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}}=\Phi_2(f_{\boldsymbol{\lambda}},g_{\boldsymbol{\alpha}})$ with Φ_2 being the mapping of Lemma A.2. The properties of Φ_2 and of the mapping $(\beta_n)\mapsto g_{\boldsymbol{\alpha}}$ then establish the required dependence of $h_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha}}$ on $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha})$. The lemma is proved. $\square$

Solubility of the Krein equation crucially relies on the following property of the convolution operator $H=H(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha})$ defined via

$$(Hf)(x):=\int_0^1 h(x-t)f(t)\,dt,$$

with the function h of (16).

Lemma 3.2. *For every $d\in(0,\pi)$, $d'\in(0,1)$, and positive r and r', there exists $\varepsilon>0$ with the following property: if $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha})$ is an arbitrary element of $\mathscr{L}(d,r)\times\mathscr{A}(d',r')$ and h is the function of* (16)*, then for the corresponding convolution operator H we have $I+H\geq\varepsilon I$.*

Proof. Observing that

$$\int_0^1\cos 2\pi n(x-t)f(t)\,dt=\cos 2\pi nx\int_0^1\cos 2\pi nt\,f(t)\,dt+\sin 2\pi nx\int_0^1\sin 2\pi nt\,f(t)\,dt$$

and that the functions $1, \sqrt{2}\sin 2\pi nx, \sqrt{2}\cos 2\pi nx$, $n \in \mathbb{N}$, form an orthonormal basis of $L_2(0,1)$, we find that

$$\begin{aligned}((I+H)f,f) &= (f,f) + 2\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\alpha_n\big[|(f,\cos 2\omega_{2n}s)|^2 + |(f,\sin 2\omega_{2n}s)|^2\big]\\ &\quad - |(f,1)|^2 - 2\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\big[|(f,\cos 2\pi ns)|^2 + |(f,\sin 2\pi ns)|^2\big]\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\big[|(f,\cos 2\omega_{2n}s)|^2 + |(f,\sin 2\omega_{2n}s)|^2\big]\\ &= 2\alpha_0|(f,1)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\big[|(f,\mathrm{e}^{-2\omega_{2n}\mathrm{i}s})|^2 + |(f,\mathrm{e}^{2\omega_{2n}\mathrm{i}s})|^2\big].\end{aligned}$$

It follows from the results of [14, Ch. VI], [45, Ch. 4] that the system

$$\mathscr{E}_{\boldsymbol{\lambda}} := \big\{\mathrm{e}^{-2\omega_{2n}\mathrm{i}s}\big\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{1\} \cup \big\{\mathrm{e}^{2\omega_{2n}\mathrm{i}s}\big\}_{n\in\mathbb{N}}$$

is a Riesz basis of $L_2(0,1)$. Moreover, it was shown in [23] that there exists $m = m(d,r) > 0$ that gives a lower bound of $\mathscr{E}_{\boldsymbol{\lambda}}$ for every $\boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{L}(d,r)$. Since the inclusion $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}(d',r')$ implies that $\alpha_n \ge d'$ for all $n \in \mathbb{Z}$, we get

$$((I+H)f,f) = 2\alpha_0|(f,1)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\big[|(f,\mathrm{e}^{-2\omega_{2n}\mathrm{i}s})|^2 + |(f,\mathrm{e}^{2\omega_{2n}\mathrm{i}s})|^2\big] \ge d'm\|f\|^2,$$

and the proof is complete. $\square$

To study solubility of the Krein equation (20), we shall regard it as a relation between the corresponding integral operators. To this end we recall several notions that will be used. The ideal $\mathfrak{S}_2$ of Hilbert–Schmidt operators in $L_2(0,1)$ consists of integral operators whose kernels are square integrable on $\Omega := [0,1]\times[0,1]$. The linear set $\mathfrak{S}_2$ becomes a Hilbert space under the scalar product

$$\langle A,B\rangle_2 := \operatorname{tr}(AB^*) := \int_0^1\int_0^1 a(x,y)\overline{b(x,y)}\,dx\,dy,$$

where a and b are the kernels of A and B respectively; in particular, $\|A\|_{\mathfrak{S}_2} := \langle A,A\rangle_2^{1/2}$ is the corresponding norm.

As an example, the inequality

$$\int_0^1\int_0^1 |h(x-y)|^2\,dx\,dy \le 2\|h\|^2$$

implies that the convolution operator H belongs to $\mathfrak{S}_2$ and, moreover, $\|H\|^2_{\mathfrak{S}_2} \le 2\|h\|^2$.

Denote by $\mathfrak{S}_2^+$ the subspace of $\mathfrak{S}_2$ consisting of all Hilbert–Schmidt operators with lower-triangular kernels. In other words, $A \in \mathfrak{S}_2$ belongs to $\mathfrak{S}_2^+$ if the kernel a of A satisfies

$a(x,y) = 0$ for a.e. $0 \le x < y \le 1$. For an arbitrary $A \in \mathfrak{S}_2$ with kernel a the cut-off a^+ of a given by

$$a^+(x,y) = \begin{cases} a(x,y) & \text{for } x \ge y, \\ 0 & \text{for } x < y \end{cases}$$

generates an operator $A^+ \in \mathfrak{S}_2^+$, and the corresponding mapping $\mathcal{P}^+ : A \mapsto A^+$ turns out to be an orthoprojector in $\mathfrak{S}_2$ onto $\mathfrak{S}_2^+$, i.e. $(\mathcal{P}^+)^2 = \mathcal{P}^+$ and $\langle \mathcal{P}^+ A, B\rangle_2 = \langle A, \mathcal{P}^+ B\rangle_2$ for all $A, B \in \mathfrak{S}_2$; see details in [15, Ch. I.10].

With these notations, the Krein equation (20) can be recast as

$$R + \mathcal{P}^+ H + \mathcal{P}^+(RH) = 0 \tag{22}$$

or

$$(\mathcal{I} + \mathcal{P}_H^+)R = -\mathcal{P}^+ H,$$

where $\mathcal{P}_X^+$ is the linear operator in $\mathfrak{S}_2$ defined by $\mathcal{P}_X^+ Y = \mathcal{P}^+(YX)$ and $\mathcal{I}$ is the identity operator in $\mathfrak{S}_2$. Therefore solubility of the Krein equation and continuity of its solutions on H is strongly connected with the properties of the operator $\mathcal{P}_H^+$.

Lemma 3.3. *For every $X \in \mathscr{B}$, the operator $\mathcal{P}_X^+$ is bounded in $\mathfrak{S}_2$. Moreover, for every convolution operator H from the set*

$$\mathfrak{H} := \{H = H(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \mid (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathscr{L}(d,r) \times \mathscr{A}(d',r')\} \subset \mathfrak{S}_2$$

the operator $\mathcal{I} + \mathcal{P}_H^+$ is invertible in $\mathscr{B}(\mathfrak{S}_2^+)$ and the inverse $(\mathcal{I} + \mathcal{P}_H^+)^{-1}$ depends analytically and Lipschitz continuously on $H \in \mathfrak{H}$ in the topology of $\mathfrak{S}_2$.

Proof. Boundedness of $\mathcal{P}_X^+$ is a straightforward consequence of the inequality

$$\|\mathcal{P}_X^+ Y\|_{\mathfrak{S}_2} \le \|YX\|_{\mathfrak{S}_2} \le \|X\|_{\mathscr{B}} \|Y\|_{\mathfrak{S}_2},$$

cf. [14, Ch. 3]. Assume next that $I + X \ge \varepsilon I$ in $L_2(0,1)$; then for $Y \in \mathfrak{S}_2^+$ we find that

$$\langle (\mathcal{I} + \mathcal{P}_X^+)Y, Y\rangle_2 = \langle Y, Y\rangle_2 + \langle YX, Y\rangle_2 = \operatorname{tr}\bigl(Y(I+X)Y^*\bigr).$$

Since $Y(I+X)Y^* \ge \varepsilon YY^*$ and the trace is a monotone functional, we get

$$\langle (\mathcal{I} + \mathcal{P}_X^+)Y, Y\rangle_2 \ge \varepsilon \langle Y, Y\rangle_2,$$

i.e., $\mathcal{I} + \mathcal{P}_X^+ \ge \varepsilon \mathcal{I}$ in $\mathfrak{S}_2^+$.

Applying now Lemma 3.2, we conclude that for every $H \in \mathfrak{H}$ it holds $\mathcal{I} + \mathcal{P}_H^+ \ge \varepsilon \mathcal{I}$ with ε of that lemma depending only on d, d', r, and r'; therefore, $\mathcal{I} + \mathcal{P}_H^+$ is boundedly invertible in $\mathscr{B}(\mathfrak{S}_2^+)$ and

$$\bigl\|(\mathcal{I} + \mathcal{P}_H^+)^{-1}\bigr\|_{\mathscr{B}(\mathfrak{S}_2^+)} \le \varepsilon^{-1}.$$

Since $\mathcal{P}_H^+$ depends linearly on H, it follows that the mapping $H \mapsto (\mathcal{I} + \mathcal{P}_H^+)^{-1}$ from $\mathfrak{S}_2$ into $\mathscr{B}(\mathfrak{S}_2^+)$ is analytic and Lipschitz continuous on the set $\mathfrak{H}$. The proof is complete. $\square$

Corollary 3.1. *For every $H \in \mathfrak{H}$, the Krein equation* (22) *has a unique solution*

$$R := -(\mathcal{I} + \mathcal{P}_H^+)^{-1}\mathcal{P}^+ H \in \mathfrak{S}_2^+;$$

moreover, R depends analytically and Lipschitz continuously in $\mathfrak{S}_2^+$ on $H \in \mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}_2$.

It follows that the kernel $r(x,t)$ of R is square integrable in the domain Ω and depends analytically and Lipschitz continuously in $L_2(\Omega)$ on H. However, we need to know that $r(\,\cdot\,,0)$ is well defined and belongs to $L_2(0,1)$.

To this end we use the Krein equation to find that

$$r(x,t) = -h(x-t) - \int_0^1 r(x,s)h(s-t)\,ds$$

as a function of x depends continuously in $L_2(0,1)$ on $t \in [0,1]$. Indeed, since the shift $f(\cdot) \mapsto f(\cdot - t)$ is a continuous operation in $L_2(\mathbb{R})$, $h(\cdot - t)$ enjoys the required property. Next, since the kernels r and h belong to $L_2(\Omega)$, we find that

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\int_0^1 r(x,s)h(s-t)\,ds\right|^2 dx \\ &\le \int_0^1 dx \int_0^1 |r(x,s)|^2\,ds \int_0^1 |h(s-t)|^2\,ds \\ &\le 2\int_0^1 |h(s)|^2\,ds \int_0^1\int_0^1 |r(x,s)|^2\,ds\,dx < \infty.\end{aligned} \tag{23}$$

Thus the function

$$\int_0^1 r(x,s)h(s-t)\,ds \tag{24}$$

of the variable $x \in [0,1]$ belongs to $L_2(0,1)$; moreover, continuity of the shifts $h(\cdot - t)$ and estimate (23) show that function (24) depends continuously in $L_2(0,1)$ on $t \in [0,1]$. We thus conclude that indeed $r(\cdot,t)$ depends continuously in $L_2(0,1)$ on $t \in [0,1]$. In particular, $r(x,0)$ is a well-defined function in $L_2(0,1)$.

Finally, we again use the Krein equation and (21) to get the relation

$$\tau(x) = r(x,0) = -h(x) - \int_0^1 r(x,s)h(s)\,ds.$$

The integral on the right-hand side is a bilinear expression in h and r. In view of the analytic dependence of r on h stated in Corollary 3.1 and estimates (23), this yields analyticity and Lipschitz continuity of $r(x,0)$ on $h \in L_2(0,1)$. On account of Lemma 3.2, the proof of Theorem 2 is complete.

4 Reconstruction from two spectra

We recall that the norming constants α_n for the Sturm–Liouville operator $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ can be determined from the spectra (λ_n) and (μ_n) of $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ and $T_{\mathrm{D}}(\tau)$ by the formula (14),

$$\alpha_n = -\frac{\omega_{2n}}{\dot{S}(\omega_{2n})C(\omega_{2n})},$$

where the entire functions S and C are given by the canonical products (13) over $\lambda_n = \omega_{2n}^2$ and $\mu_n = \omega_{2n+1}^2$ respectively. This induces a mapping $\boldsymbol{\nu} \mapsto \boldsymbol{\alpha}$ from the spectral data $\boldsymbol{\nu} := \bigl((\lambda_n), (\mu_n)\bigr) \in \mathscr{N}$ into the norming constants $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_n) \in \mathscr{A}$. In this section, we shall establish Theorem 1 by proving the following result.

Theorem 3. *For every $d \in (0, \pi/2)$ and $r > 0$, the mapping*

$$\mathscr{N}(d,r) \ni \boldsymbol{\nu} \mapsto \boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A} \tag{25}$$

is analytic and Lipschitz continuous; moreover, there exist positive constants d' and r' such that the range of this mapping belongs to $\mathscr{A}(d', r')$.

By definition, $\mathscr{A}$ consists of elements of the commutative unital Banach algebra A introduced in Appendix C. We observe that the metrics on $\mathscr{A}$ agrees with the norm of A, and thus the results of Appendix C yield the following statement.

Proposition 4.1. *For every positive d and r, the set $\mathscr{A}(d,r)$ consists of invertible elements of A. Moreover, the mapping $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{\alpha}^{-1}$ is analytic and Lipschitz continuous in A on $\mathscr{A}(d,r)$, and its range lies in $\mathscr{A}\bigl((1+r)^{-1}, rd^{-1}\bigr)$.*

In view of Proposition 4.1, it suffices to prove Theorem 3 with $\boldsymbol{\alpha}$ replaced by $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$. The elements of the sequence $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ are $\alpha_n^{-1} = -\dot{S}(\omega_{2n})C(\omega_{2n})/\omega_{2n}$. We shall show that the sequences

$$\boldsymbol{\gamma} := \bigl((-1)^{n+1}\dot{S}(\omega_{2n})/\omega_{2n}\bigr)_{n\in\mathbb{Z}_+}, \qquad \boldsymbol{\delta} := \bigl((-1)^n C(\omega_{2n})\bigr)_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

form elements of $\mathscr{A}$. Thus Theorem 3 will be proved if we show that the mappings

$$\mathscr{N}(d,r) \ni \boldsymbol{\nu} \mapsto \boldsymbol{\gamma} \in \mathscr{A}, \qquad \mathscr{N}(d,r) \ni \boldsymbol{\nu} \mapsto \boldsymbol{\delta} \in \mathscr{A} \tag{26}$$

enjoy the properties required therein for the mapping (25).

To begin with, integral representations (10) and (11) of the solution $c(\,\cdot\,, \omega)$ and its quasi-derivative $c^{[1]}(\,\cdot\,,\omega)$ yield the formulae

$$S(\omega) = -\omega \sin\omega - \omega \int_0^1 k_1(1,t) \sin\omega t \, dt, \tag{27}$$

$$C(\omega) = \cos\omega + \int_0^1 k(1,t)\cos\omega t\, dt \tag{28}$$

for the functions S and C. Therefore both expressions $-\dot{S}(\omega_{2n})/\omega_{2n}$ and $C(\omega_{2n})$ can be recast in the form

$$\cos\omega_{2n} + \int_0^1 g(t)\cos\omega_{2n}t\,dt$$

with $g(t) = tk_1(1,t)$ for the former expression and $g(t) = k(1,t)$ for the latter. The sequences $\boldsymbol{\gamma}$ and $\boldsymbol{\delta}$ have therefore similar structures; namely, their n-th element equals

$$\cos\rho_{2n} + (-1)^n \int_0^1 g(t)\cos\omega_{2n}t\,dt \tag{29}$$

for respective g; here, as usual, $\rho_{2n} := \omega_{2n} - \pi n$.

Clearly, the mapping $(\rho_{2n}) \mapsto (\cos\rho_{2n} - 1)$ is analytic in ℓ_2. Its Lipschitz continuity follows from the inequality $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$; also, the inequality $1 - \cos x \le x^2/2$ yields the estimate

$$\|(\cos\rho_{2n} - 1)\|_{\ell_2} \le \tfrac{1}{2}\|(\rho_{2n})\|^2_{\ell_2}. \tag{30}$$

Set

$$\tilde g(s) := \begin{cases} g(1-2s), & s \in [0, \frac{1}{2}),\\ g(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

then straightforward transformations give

$$\begin{aligned} v_n := (-1)^n \int_0^1 g(t)\cos\omega_{2n}t\,dt &= (-1)^n \int_0^1 \tilde g(s) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{2n}(1-2s)}\,ds \\ &= \int_0^1 \tilde g(s) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho_{2n}(1-2s)} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n s}\,ds. \end{aligned} \tag{31}$$

Therefore the above number v_n gives the n-th Fourier coefficient of the function $u := \Psi(f_{\boldsymbol\lambda}, \tilde g)$, where Ψ is the mapping of Lemma A.3 and $f_{\boldsymbol\lambda}$ is the function introduced in the proof of Lemma 3.1. It follows from Lemma A.3 that the sequence $(\hat u(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ of Fourier coefficients of u depends analytically and boundedly Lipschitz continuously in ℓ_2 on $f_{\boldsymbol\lambda}$ and $\tilde g$. We prove in the lemma below that the functions $k(1,\,\cdot\,)$ and $k_1(1,\,\cdot\,)$ (and thus the corresponding transformates $\tilde g$) depend in the same manner on $\boldsymbol\nu = (\boldsymbol\lambda, \boldsymbol\mu) \in \mathscr{N}(d, r)$.

Lemma 4.1. *The mappings*

$$\begin{aligned} \mathscr{N}(d,r) \ni (\boldsymbol\lambda, \boldsymbol\mu) &\mapsto k(1,\,\cdot\,) \in L_2(0,1),\\ \mathscr{N}(d,r) \ni (\boldsymbol\lambda, \boldsymbol\mu) &\mapsto k_1(1,\,\cdot\,) \in L_2(0,1) \end{aligned}$$

are analytic and Lipschitz continuous.

Proof. Since both mappings can be treated similarly, we only consider the second one. By definition, we have $S(\omega_{2n})/\omega_{2n} = 0$, and thus the numbers $\omega_{2n} = \pi n + \rho_{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, are zeros of the odd entire function $S(\omega)/\omega$ of (27). The required properties of the mapping $\boldsymbol\lambda \mapsto k_1(1,\,\cdot\,)$ follow now from the results of [26]; see Appendix B. □

The above reasoning justifies the inclusion $\boldsymbol\alpha^{-1} \in \mathscr{A}$ as well as analyticity and Lipschitz continuity of the mappings of (26). It remains to prove that there exist positive d' and r' such that, for every $\boldsymbol\nu \in \mathscr{N}(h, r)$, the corresponding elements $\boldsymbol\gamma$ and $\boldsymbol\delta$ belong to $\mathscr{A}(d', r')$.

Existence of such an r' follows from the uniform estimates of the ℓ_2-norms of the sequences $(\cos\rho_{2n} - 1)$ of (30) and the fact that

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} |v_n|^2 \le \|\Psi(f_{\boldsymbol\lambda}, \tilde g)\|^2,$$

see (31) and the discussion following it. Indeed, in view of Lemma A.3 the function $u = \Psi(f_{\boldsymbol\lambda}, \tilde g)$ remains in the bounded subset of $L_2(0,1)$ when $f_{\boldsymbol\lambda}$ and $\tilde g$ vary over bounded subsets of $L_2(0,1)$, and the latter is the case when $\boldsymbol{\nu}$ runs over $\mathscr{N}(d,r)$ by the definition of the functions $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ and $\tilde{g}$ and Lemma 4.1.

Next, in view of formula (13) and the interlacing property of λ_n and μ_n, the numbers $\gamma_n = (-1)^n\dot{S}(\omega_{2n})/\omega_{2n}$ and $\delta_n = (-1)^n C(\omega_{2n})$ are all of the same sign and thus are all positive in view of the asymptotic relation (29). The uniform positivity of γ_n and δ_n (and thus existence of a positive d' such that $1/\alpha_n = \gamma_n\delta_n \ge d'$) follows immediately from the lemma below.

Lemma 4.2. *For every $d \in (0,\pi/2)$ and $r > 0$ we have*

$$\sup_{(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})}\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \log|\dot{S}(\omega_{2n})/\omega_{2n}| < \infty, \qquad \sup_{(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})}\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \log|C(\omega_{2n})| < \infty,$$

where S and C are constructed via (13) *from the sequences $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\mu}$, and the suprema are taken over $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \in \mathscr{N}(d,r)$.*

Proof. We assume first that $n \ne 0$. By (13), we have

$$\dot{S}(\omega_{2n})/\omega_{2n} = -\frac{2\omega_{2n}^2}{\pi^2 n^2}\prod_{k\in\mathbb{N},\ k\ne n}\frac{\omega_{2k}^2-\omega_{2n}^2}{\pi^2k^2}.$$

Dividing both sides by

$$\cos\pi n = \frac{d\sin z}{dz}\Big|_{z=\pi n} = -2\prod_{k\in\mathbb{N},\ k\ne n}\frac{k^2-n^2}{k^2},$$

we conclude that

$$|\dot{S}(\omega_{2n})/\omega_{2n}| = \frac{\omega_{2n}^2}{\pi^2n^2}\prod_{k\in\mathbb{N},\ k\ne n}\frac{\omega_{2k}^2-\omega_{2n}^2}{\pi^2(k^2-n^2)};$$

for $n=0$ the direct calculations give

$$\lim_{\omega\to 0}|\dot{S}(\omega)/\omega| = 2\prod_{k\in\mathbb{N}}\frac{\omega_{2k}^2}{\pi^2k^2}.$$

Recall that $\rho_{2k} := \omega_{2k} - \pi k$ and set

$$a_{n,\pm k} := \frac{\rho_{2n}\mp\rho_{2k}}{\pi(n\mp k)},$$

with $a_{0,0}=1$ and $a_{n,n}=0$ if $n\in\mathbb{N}$; then

$$\frac{\omega_{2k}^2-\omega_{2n}^2}{\pi^2(k^2-n^2)} = \bigl(1+a_{n,k}\bigr)\bigl(1+a_{n,-k}\bigr)$$

and[2]

$$|\dot{S}(\omega_{2n})/\omega_{2n}| = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(1+a_{n,k}).$$

In what follows, all summations and multiplications over the index set $\mathbb{Z}$ will be taken in the principal value sense and the symbol V.p. will be omitted.

Since the sequence (λ_n) is $2d$-separated for every $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\in\mathscr{N}(d,r)$, we have $1+a_{k,n}\ge 2d/\pi$ for all $n\in\mathbb{Z}_+$ and all $k\in\mathbb{Z}$. Therefore, with

$$K:=\max_{x\ge -1+2d/\pi}\Bigl|\frac{\log(1+x)-x}{x^2}\Bigr|<\infty,$$

we get the estimate

$$\Bigl|\log\prod_{k\in\mathbb{Z}}(1+a_{n,k})\Bigr|\le\Bigl|\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{n,k}\Bigr|+K\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{n,k}^2, \tag{32}$$

provided the two series converge.

Clearly,

$$\sum_{k\ne n}\frac{1}{n-k}=0,$$

and thus

$$\Bigl|\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{n,k}\Bigr|=\Bigl|\frac{1}{\pi}\sum_{k\ne n}\frac{\rho_{2k}}{k-n}\Bigr|\le\frac{r}{\sqrt{3}}$$

by the Cauchy–Bunyakovski–Schwarz inequality (recall that $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\rho_{2k}^2\le r^2$ by the definition of the set $\mathscr{N}(d,r)$ and $\sum_{k\ne n}(k-n)^{-2}=\pi^2/3$). Next, the inequality

$$a_{n,k}^2\le\frac{2\rho_{2k}^2}{\pi^2(k-n)^2}+\frac{2\rho_{2n}^2}{\pi^2(k-n)^2}$$

for $k\ne n$ yields

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{n,k}^2\le 4r^2\sum_{k\ne n}\frac{1}{\pi^2(k-n)^2}=\frac{4r^2}{3}.$$

It follows from (32) that

$$\Bigl|\log\prod_{k\in\mathbb{Z}}(1+a_{n,k})\Bigr|\le(\sqrt{3}r+4Kr^2)/3,$$

where the constant K only depends on d.

Similarly, we find that

$$|C(\omega_{2n})|=\Bigl|\prod_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\omega_{2k+1}^2-\omega_{2n}^2}{\pi^2(k+\frac12)^2}\Bigr|=\prod_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\omega_{2k+1}^2-\omega_{2n}^2}{\pi^2(k+\frac12)-\pi^2n^2}$$

and then mimic the above reasoning to establish the other uniform bound. The lemma is proved. □

Proof of Theorem 3. Combining the results of Lemmata 4.1 and 4.2, we conclude that the mappings (26) enjoy all the properties stated in Theorem 3, and thus so does the mapping $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\mapsto\boldsymbol{\alpha}^{-1}$. In virtue of Proposition 4.1 this completes the proof of the theorem. □

Proof of Theorem 1. Analyticity and Lipschitz continuity on bounded sets of the inverse spectral mapping

$$\mathscr{N}\ni\boldsymbol{\nu}\mapsto\tau\in L_2(0,1)$$

is the direct consequence of those for the mappings (25) and (15) established in Theorems 3 and 2 respectively. □

5 Some extensions

The results proved above for the class of impedance Sturm–Liouville operators with real-valued impedance functions $a \in W_2^1(0,1)$, i.e., for Sturm–Liouville operators $T_{\mathrm{N}}(\tau)$ and $T_{\mathrm{D}}(\tau)$ with $\tau = a' + a^2 \in L_2(0,1)$ allow quite a straightforward generalization to wider classes of operators.

Firstly, it is not important that the boundary conditions considered are of Dirichlet or Dirichlet–Neumann type. In fact, the analysis proceeds in much the same way for generic Robin-type boundary conditions at one or both endpoints.

Secondly, as in [2] one can treat the case $\tau \in L_p(0,1)$, with $p \in [1,\infty)$. The asymptotic representation of the eigenvalues and norming constants become then as in (9) and (12), but the sequences of remainders (ρ_n) and (β_n) form now sequences of sine or cosine Fourier coefficients of functions in the respective $L_p(0,1)$ space, see details in [2, 26].

Finally, also the τ in the Sobolev space scale $W_2^s(0,1)$ can be treated; see similar results for the potential Sturm–Liouville inverse problem in [25, 41]. Again the sequences of remainders (ρ_n) and (β_n) are then sine or cosine Fourier coefficients of functions in the same space, and they form Banach algebra under multiplication with properties similar to those of the algebra A discussed in Appendix C.

For such more general settings the above-described approach is applicable and, save for some more involved technicalities, proceeds in much the same way and establishes analytic and Lipschitz continuous dependence of the impedance function a on the spectral data for the impedance Sturm–Liuoville operators considered.

Acknowledgements. The author thanks A. A. Shkalikov and Ya. V. Mykytyuk for stimulating discussions. The research was partially supported by the Alexander von Humboldt Foundation and was partially carried out during the visit to the Institute for Applied Mathematics of Bonn University, whose warm hospitality is sincerely acknowledged.

A Some auxiliary results

We recall that the convolution $f * g$ of two functions in $L_2(0,1)$ is a function in $L_2(0,1)$ given by

$$(f * g)(x) := \int_0^1 f(x-t)g(t)\,dt,$$

where f is extended to $(-1,0)$ as a periodic function with period 1. The (discrete) Fourier transform $\hat{f}$ of $f \in L_2(0,1)$ is a function over $\mathbb{Z}$ given by

$$\hat{f}(n) := \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2\pi n i t}\,dt.$$

It is well known that the Fourier transform is a unitary mapping from $L_2(0,1)$ to $\ell_2(\mathbb{Z})$ and that $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$; as a result, we have the inequality

$$\|f * g\| \le \|f\|\|g\|$$

for all $f, g \in L_2(0,1)$.

Lemma A.1. *For a function $f \in L_2(0,1)$, set*

$$\Phi_1(f)(x) := \mathrm{V.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\mathrm{e}^{2\hat{f}(n)\mathrm{i}x} - 1]\mathrm{e}^{2\pi n\mathrm{i}x}.$$

Then the series determines a function in $L_2(0,1)$, and the mapping

$$L_2(0,1) \ni f \mapsto \Phi_1(f) \in L_2(0,1)$$

is analytic and Lipschitz continuous on bounded subsets.

Proof. We start with observing that the series $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}^{\,k}(n)\mathrm{e}^{2\pi n\mathrm{i}s}$ is the Fourier series for the function $f^{\langle k\rangle}$, the k-fold convolution of f with itself, and that $\|f^{\langle k\rangle}\| \le \|f\|^k$. Developing $\mathrm{e}^{\hat{f}(n)\mathrm{i}s}$ into the Taylor series, we find that

$$\begin{aligned}\Phi_1(f) &= \mathrm{V.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigl[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{f}^k(n)(2\mathrm{i}s)^k}{k!}\Bigr]\mathrm{e}^{2\pi n\mathrm{i}s}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i}s)^k}{k!} \mathrm{V.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}^k(n)\mathrm{e}^{2\pi n\mathrm{i}s}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i}s)^k}{k!} f^{\langle k\rangle}.\end{aligned}$$

The change of the summation order in the second equality above is justified by the fact that, for $k > 1$, the summands in the double series are dominated by $C^k\hat{f}^2(n)/k!$ with $C := 2\max_{n\in\mathbb{Z}}\{|\hat{f}(n)|\} + 1$. Therefore the double series over the index set $\{(n,k) \mid n \in \mathbb{Z}, k > 1\}$ converges absolutely and the Fubini theorem applies. This formula represents $\Phi_1(f)$ as an absolutely convergent series (which is a Taylor series expansion of $\Phi_1(f)$ in the variable f) and thus proves the analyticity in $L_2(0,1)$ of the mapping $f \mapsto \Phi_1(f)$.

Lipschitz continuity of that mapping on bounded sets follows from the estimate

$$\begin{aligned}\|\Phi_1(f_1) - \Phi_1(f_2)\| &= \Bigl\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i}s)^k}{k!}[f_1^{\langle k\rangle} - f_2^{\langle k\rangle}]\Bigr\|\\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k-1)!}\|f_1 - f_2\|\bigl(\|f_1\| + \|f_2\|\bigr)^{k-1} \le \exp\{4r\}\|f_1 - f_2\|,\end{aligned}$$

which is valid as soon as the L_2-norms of f_1 and f_2 are not greater than r. The proof is complete. □

Lemma A.2. *For f and g in $L_2(0,1)$, set*

$$\Phi_2(f,g) := \mathrm{V.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n)\exp\{2[\pi n + \hat{f}(n)]\mathrm{i}s\}.$$

Then the function $\Phi_2(f,g)$ belongs to $L_2(0,1)$ and the mapping

$$\Phi_2 \,:\, L_2(0,1) \times L_2(0,1) \to L_2(0,1)$$

is analytic and Lipschitz continuous on bounded subsets.

Proof. Transformations similar to those used in the proof of the above lemma show that

$$\Phi_2(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i}s)^k}{k!}\,[f^{\langle k\rangle} * g].$$

The mapping Φ_2 is linear (and thus analytic) in g, and its analyticity in f as well as Lipschitz continuity on bounded subsets is established in the same manner as for the mapping Φ_1 of Lemma A.1. □

Lemma A.3. *For f and g in $L_2(0,1)$, set*

$$\Psi(f,g) := \mathrm{V.p.}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \int_0^1 g(t)\exp\{[\pi n + \hat f(n)]\mathrm{i}(1-2t)\}\,dt\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}.$$

Then the function $\Psi(f,g)$ belongs to $L_2(0,1)$ and the mapping

$$\Psi \,:\, L_2(0,1)\times L_2(0,1) \to L_2(0,1)$$

is analytic and Lipschitz continuous on bounded subsets.

Proof. The coefficient of $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}$ in the above series for Ψ can be written as

$$\int_0^1 g(t)\exp\{\mathrm{i}(1-2t)\hat f(n)\}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nt}\,dt \tag{33}$$

and gives the n-th Fourier coefficient of the function $h := \sum_{k=0}^{\infty} h_k/k!$, with $h_0 := g$, $h_k := f^{\langle k\rangle} * M^k g$ for $k \ge 1$, and M being the operator of multiplication by the function $\mathrm{i}(1-2x)$. In other words, we have $\Psi(f,g) = h$. Since $\|f*g\| \le \|f\|\|g\|$ for every f and g in $L_2(0,1)$, the functions h_k belong to $L_2(0,1)$ and their norms there obey the estimate

$$\|h_k\| \le \|f\|^k\|M^k g\| \le \|f\|^k\|g\|.$$

Thus the series for h converges absolutely and, since every h_k is a multi-linear function of f and g, the mapping Ψ is analytic. Its Lipschitz continuity on bounded subsets is established in the usual manner, and the proof is complete. □

B Analyticity of some related mappings

Here we give a brief account on the results of [26] and also establish some of their extensions needed to prove Lemma 4.1. It was shown in [26] that for every $f \in L_2(0,1)$ there exists a unique function $g \in L_2(0,1)$ such that all zeros (counting multiplicities) of the entire function

$$G_g(z) := \sin z + \int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(1-2t)}\,dt \tag{34}$$

are given by the numbers $\pi n + \hat f(n)$, $n\in\mathbb{Z}$. Such pairs of f and g in fact satisfy the relation

$$H(f,g) := s(f) + g + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(M^k g)*f^{\langle k\rangle}}{k!} = 0; \tag{35}$$

here

$$s(f) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f^{\langle 2k+1\rangle}}{(2k+1)!},$$

$f^{\langle k\rangle}$ is the k-fold convolution of f with itself, and M is the operator of multiplication by $\mathrm{i}(1-2x)$. The function H is analytic from $L_2(0,1) \times L_2(0,1)$ into $L_2(0,1)$, and its partial derivatives $\partial_f H(f,g)$ and $\partial_g H(f,g)$ are given by

$$\partial_f H(f,g)(h_1) = \Big(c(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M^k g) * f^{\langle k-1\rangle}}{(k-1)!}\Big) * h_1, \tag{36}$$

$$\partial_g H(f,g)(h_2) = h_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M^k h_2) * f^{\langle k\rangle}}{k!} \tag{37}$$

with

$$c(f) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f^{\langle 2k\rangle}}{(2k)!}.$$

Using the implicit function theorem, it was shown that the induced mapping $\varphi : f \mapsto g$ is analytic. In order to establish its Lipschitz continuity, we shall study the above partial derivatives in more detail.

Namely, we assume that $f \in L_2(0,1)$ is such that the corresponding sequence $\boldsymbol{\omega} = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ with $\omega_n := \pi n + \hat{f}(n)$ belongs to $\mathscr{L}(d,r)$ and that $g = \varphi(f)$. Set $S_{\boldsymbol{\omega}}$ to be the canonical product of (13); then $S_{\boldsymbol{\omega}}(z)/z$ can also be represented as (34). Direct calculations show that the n-th Fourier coefficient of the function of (36) is equal to

$$(-1)^n \hat{h}_1(n)\Big[\cos\omega_n + \int_0^1 \mathrm{i}(1-2t)g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n(1-2t)}\,dt\Big] = (-1)^n \hat{h}_1(n)\dot{S}_{\boldsymbol{\omega}}(\omega_n).$$

By Lemma 4.2 there are positive numbers k_1 and k_2 such that

$$k_1 \le |\dot{S}_{\boldsymbol{\omega}}(\omega_n)/\omega_{2n}| \le k_2$$

for all $\boldsymbol{\omega} \in \mathscr{L}(d,r)$ and all $n \in \mathbb{Z}$. Therefore the partial derivative $\partial_f H(f,g)$ is a bounded and boundedly invertible operator in $L_2(0,1)$; moreover, for every fixed $d > 0$ and $r > 0$, the norms of $\partial_f H(f,g)$ and their inverses are uniformly bounded for all $f \in L_2(0,1)$ generating the sequences $\boldsymbol{\omega}$ in the set $\mathscr{L}(d,r)$.

Similarly, the n-th Fourier coefficient of the function of (37) is equal to

$$(-1)^n \int_0^1 h_2(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n(1-2t)}\,dt.$$

By the results of [23], there exist positive m_1 and m_2 such that, for all $\boldsymbol{\omega} \in \mathscr{L}(d,r)$, the sequences $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n(1-2x)})_{n\in\mathbb{Z}}$ form Riesz bases of $L_2(0,1)$ of lower bound m_1 and upper bound m_2. Therefore the operator $H_g := \partial_g H(f,g)$,

$$H_g : h_2 \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (h_2, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n(1-2x)})\, \mathrm{e}^{2\pi n \mathrm{i} x},$$

is bounded and boundedly invertible in $L_2(0,1)$, with $\|H_g\| \le m_2^{1/2}$ and $\|H_g^{-1}\| \le m_1^{-1/2}$.

We now use the implicit mapping theorem to conclude that the mapping $\varphi : f \mapsto g$ is analytic in $L_2(0,1)$. The uniform bounds on the inverses of the partial derivatives $\partial_f H(f,g)$ and $\partial_g H(f,g)$ established above imply that, for every $d \in (0,\pi)$ and $r > 0$, this mapping is Lipschitz continuous on the set of functions $f \in L_2(0,1)$ generating the sequences $\boldsymbol{\omega} \in \mathscr{L}(d,r)$.

C The Banach algebra A

The space $\ell_2 = \ell_2(\mathbb{Z}_+)$ is a commutative Banach algebra under the pointwise multiplication $(x_n)\cdot(y_n) = (x_n \cdot y_n)$. Its unital extension A consists of elements of ℓ_∞ of the form $a\mathbf{1}+\mathbf{x}$ with $a \in \mathbb{C}$, the unity $\mathbf{1} \in \ell_\infty$ having all its elements equal to 1, and $\mathbf{x} = (x_n) \in \ell_2$. The norm in A is given by

$$\|a\mathbf{1} + \mathbf{x}\|_A = |a| + \|\mathbf{x}\|.$$

An element $a\mathbf{1} + \mathbf{x}$ is invertible in A if and only if $a \ne 0$ and $a + x_n \ne 0$ for all $n \in \mathbb{Z}$; in this case the inverse is equal to $a^{-1}\mathbf{1} + \mathbf{y}$, where $\mathbf{y} = (y_n)$ with $y_n := -x_n/a(a+x_n)$. Since under the above assumptions we have $\inf_n |a+x_n| > 0$, we see that $\mathbf{y}$ indeed belongs to ℓ_2; moreover,

$$\|(a\mathbf{1} + \mathbf{x})^{-1}\|_A \le |a|^{-1}\bigl(1 + \|\mathbf{x}\|/\inf_n |a+x_n|\bigr).$$

The mapping $\hat{\mathbf{x}} \mapsto \hat{\mathbf{x}}^{-1}$ is analytic on the open set of all invertible elements of A; in addition, it is Lipschitz continuous on the sets

$$\mathscr{S}_\varepsilon := \bigl\{a\mathbf{1} + \mathbf{x} \mid |a| \ge \varepsilon,\ \inf_n |a + x_n| \ge \varepsilon\bigr\}.$$

References

1. Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable Models in Quantum Mechanics, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo, 1988.
2. Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya. *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators in impedance form*, J. Funct. Anal., **222** (2005), 143-177.
3. Albeverio S., Kurasov P. Singular Perturbations of Differential Operators. Solvable Schrödinger Type Operators, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
4. Alekseev A.A. *Stability of the inverse Sturm–Liouville problem for a finite interval*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **287**, 1 (1986), 11-13 (in Russian).
5. Ambartsumyan B.A. *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Zeitschr. für Physik, **53** (1929), 690-695.
6. Andersson L. *Inverse eigenvalue problems for a Sturm–Liouville equation in impedance form*, Inverse Probl., **4** (1988), 929-971.
7. Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe*, Acta Math., **78**, 1 (1946), 1-96.
8. Coleman C.F., McLaughlin J.R. *Solution of the inverse spectral problem for an impedance with integrable derivative*, I, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 145-184; II, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 185-212.

9. Dineen S. Complex analysis on infinite-dimensional spaces, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999.

10. Dorren H.J.S., Muyzert E.J., Snieder R.K. *The stability of one-dimensional inverse scattering*, Inverse Problems, **10**, 4 (1994), 865-880.

11. Gasymov M.G., Levitan B.M. *Determination of a differential operator from two spectra*, Uspekhi Matem. Nauk, **19**, 2 (1964), 3-63 (in Russian).

12. Gelfand I.M., Levitan B.M. *On determination of a differential equation by its spectral function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **15**, 4 (1951), 309-360 (in Russian).

13. Gladwell G.M.L. Inverse Problems in Vibration, Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1986.

14. Gohberg I., Krein M. Introduction to the Theory of Linear Non-selfadjoint Operators in Hilbert Space, Nauka Publ., Moscow, 1965 (in Russian); Engl. transl.: Amer. Math. Soc. Transl. Math. Monographs, vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

15. Gohberg I., Krein M. Theory of Volterra Operators in Hilbert Space and its Applications, Nauka Publ., Moscow, 1967 (in Russian); Engl. transl.: Amer. Math. Soc. Transl. Math. Monographs, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970.

16. Hald O.H. *The inverse Sturm–Livouville problem with symmetric potentials*, Acta Math., **141**, 3-4 (1978), 263-291.

17. Hald O.H. *Discontinuous inverse eigenvalue problems*, Comm. Pure Appl. Math., **37** (1984), 539-577.

18. Hitrik M. *Stability of an inverse problem in potential scattering on the real line*, Commun. PDE, **25** (2000), 925-955.

19. Hochstadt H. *The inverse Sturm–Liouville problem*, Comm. Pure Appl. Math., **26** (1973), 715-729.

20. Hochstadt H. *On the determination of the density of a vibrating string from spectral data*, J. Math. Anal. Appl., **55**, 3 (1976), 673-385.

21. Hochstadt H. *On the well-posedness of the inverse Sturm–Liouville problems*, J. Differential Equations, **23**, 3 (1977).

22. Hryniv R.O. Analyticity and uniform stability of the inverse singular Sturm–Liouville spectral problem, Preprint, 2010.

23. Hryniv R.O. *Uniformly bounded families of Riesz bases of exponentials, sines, and cosines*, Mathem. Zametki, **87**, 4 (2010), 510-520.

24. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials*, Inverse Problems, **19** (2003), 665-684.

25. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials, IV. Potentials in the Sobolev space scale*, Proc. Edinb. Math. Soc., **49**, 2 (2006), 309-329.

26. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. *On zeros of some entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **361**,4 (2009), 2207-2223.

27. Krein M.G. *On the inverse problem for a non-homogeneous cord*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **82** (1951), 669-672.

28. Levitan B.M. Inverse Sturm-Liouville Problems, Nauka Publ., Moscow, 1984 (in Russian); Engl. transl.: VNU Science Press, Utrecht, 1987.

29. Marchenko V.A. Sturm–Liouville Operators and Their Applications, Naukova Dumka Publ., Kiev, 1977 (in Russian); Engl. transl.: Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

30. Marchenko V.A., Maslov K.V. *Stability of the problem of the reconstruction of the Sturm–Liouviile operator in terms of the spectral function*, Mat. Sbornik (N.S.), **81(123)** (1970), 525-551 (in Russian).

31. Marletta M., Weikard R. *Weak stability for an inverse Sturm–Liouville problem with finite spectral data and complex potential*, Inverse Problems, **21** (2005), 1275-1290.

32. McLaughlin J.R. *Stability theorems for two inverse problems*, Inverse Probl., **4** (1988), 529-540.

33. Mizutani A. *On the inverse Sturm–Liouville problem*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **31**, 2 (1984), 319-350.

34. Pöschel J., Trubowitz E. Inverse Spectral Theory, Academic Press, Orlando, Florida, 1987 (Pure and Applied Math., Vol. 130).

35. Rundell W., Sacks P.E. *The reconstruction of Sturm-Liouville operators*, Inverse Problems, **8** (1992), 457-482.

36. Ryabushko T.I. *Stability of the reconstruction of a Sturm–Liouville operator from two spectra, II*, Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen., **18** (1973), 176-185 (in Russian).

37. Ryabushko T.I. *Stability of the reconstruction of a Sturm–Liouville boundary value problem on a semiaxis from two spectra*, Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen., **35** (1981), 96-100 (in Russian).

38. Ryabushko T.I. *Estimation of the norm of the difference of two potentials of Sturm–Liouville boundary value problems*, Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen., **39** (1983), 114-117 (in Russian).

39. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. *Sturm–Liouville operators with singular potentials*, Matem. Zametki, **66**, 6 (1999), 897-912 (in Russian); Engl. transl.: Math. Notes, **66**, 5-6 (1999), 741-753.

40. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. *Sturm–Liouville operators with distributional potentials*, Trudy Mosk. Matem Ob-va, **64** (2003), 159-212 (in Russian); Engl. transl.: Trans. Moscow Math. Soc., **2003**, 143-192.

41. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. *Inverse problem for Sturm–Liouville operators with distribution potentials: reconstruction from two spectra*, Russ. J. Math. Phys., **12**, 4 (2005), 507-514.

42. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. *On the eigenvalues of the Sturm–Liouville operator with potentials in Sobolev spaces*, Mat. Zametki, **80**, 6 (2006), 864-884 (in Russian); Engl. transl.: Math. Notes, **80**, 5-6 (2006), 814-832.

43. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. *Inverse problems for Strum–Liouville operators with potentials in Sobolev spaces. Uniform stability*, Funct. Anal. Appl., (to appear).

44. Wu Q., Fricke F. *Determination of blocking locations and cross-sectional area in a duct by eigenfrequeney shifts*, J. Acoustical Soc., **87** (1990), 67-75.

45. Young R. An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York, (revised first edition), 2001.

46. Yurko V.A. *On stability of recovering the Sturm–Liouville operators*, Diff. Equat. Theory Functions (Saratov Univ.), **3** (1980), 113-124 (in Russian).

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics &
Ivan Franko Lviv National University,
Lviv, Ukraine.
rhryniv@iapmm.lviv.ua

Received 10.05.2010

Гринів Р.О. *Аналітичність і рівномірна стійкість в оберненій задачі для імпедансних операторів Штурма–Ліувилля* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 35–58.

Доведено, що обернене спектральне відображення, що відновлює імпедансну функцію операторів Штурма–Ліувилля на $[0,1]$ в імпедансній формі за спектральними даними (двома спектрами або одним спектром та нормівними множниками) є аналітичним та рівномерно стійким в певному сенсі.

Гринив Р.О. *Аналитичность и равномерная устойчивость в обратной задаче для импедансных операторов Штурма–Лиувилля* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 35–58.

Доказано, что обратное спектральное отображение, восстанавливающее импедансную функцию операторов Штурма–Лиувилля на $[0,1]$ в импедансной форме по спектральным данным (двум спектрам или одному спектру и нормирующим множителям) является аналитическим и равномерно устойчивым в некотором смысле.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №.1

УДК 517.98

Загороднюк А.В., Кравців В.В.

СИМЕТРИЧНІ ПОЛІНОМИ НА ДОБУТКАХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ

Загороднюк А.В., Кравців В.В. *Симетричні поліноми на добутках банахових просторів* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 59–71.

В роботі описано множини твірних елементів алгебр блочно-симетричних поліномів на добутках банахових просторів та отримано застосування до опису гомоморфізмів цих алгебр.

Вступ

Симетричні поліноми від багатьох комплексних змінних є класичним об'єктом алгебри і аналізу. Вивчення симетричних поліномів на нескінченновимірних банахових просторах відносно дії повної групи симетрії $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ почалося у роботі А.С. Немировського та С.М. Семенова [3]. Вони показали, що симетричні поліноми на просторах ℓ_p виражаються через алгебраїчну комбінацію елементарних симетричних поліномів. Ці результати було узагальнено на дійсні банахові простори з деякою симетричною структурою у роботі [7] М. Гонзалеса, Р. Гонзала і Х. Харамілла. Алгебри симетричних аналітичних функцій на ℓ_p досліджувалися в [5] і в інших роботах (див. напр. [4]). При дослідженні конкретної комутативної алгебри дуже важливо вміти описати її спектр (множину максимальних ідеалів). Для опису спектру алгебр симетричних аналітичних функцій в [4, 5] використовувалось існування і явний вигляд алгебраїчного базису у відповідних просторах симетричних поліномів. У цій роботі ми досліджуємо поліноми на декартових добутках банахових просторів із симетричним базисом, які є інваріантними відносно дії деякої природної підгрупи $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ (ми будемо їх називати блочно-симетричними).

Опис твірних елементів алгебри $\mathcal{P}^G(\mathbb{C}^n)$ поліномів на скінченновимірному просторі, які є інваріантними відносно деякої групи симетрії G, є класичною задачею в алгебраїчній геометрії та теорії інваріантів [2, ст. 102-105]. Зокрема у відомій 14-тій проблемі

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46-02, 46E30, 46J20.
Ключові слова і фрази: блочно-симетричні поліноми на добутках банахових просторів, твірні елементи, гомоморфізми.

Гільберта [1] ставиться питання, чи $\mathcal{P}^G(\mathbb{C}^n)$ завжди має скінченну систему твірних? Як показує приклад Нагати [2, ст.74-81], в загальному випадку це не так. Проте, існує широкий клас груп G, що описується теоремою Гільберта-Нагати, для якого $\mathcal{P}^G(\mathbb{C}^n)$ має скінченну систему твірних елементів, які можуть бути алгебраїчно залежними.

1 Попередні відомості

Нехай X і Y – банахові простори над полем $\mathbb{K}$, $A(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – симетричний k-лінійний оператор, який діє з простору X^k в простір Y. Зробивши заміну $x_j = x$ для будь-якого $j = 1, \ldots, k$, отримаємо оператор $P_k(x) = A(x, x, \ldots, x)$, який діє з простору X в простір Y. Оператор $P_k(x)$ називається *$k-$однорідним поліномом* степеня k. Оператор $P : X \to Y$, який має вигляд:

$$P(x) = P_0(x) + P_1(x) + ... + P_m(x),$$

називається *поліномом степеня m*. Через $\mathcal{P}(X)$ позначимо алгебру всіх неперервних поліномів на X.

Нехай X — комплексний банахів простір із симетричним базисом. Зауважимо, що базис (e_n) у банаховому просторі X називається *симетричним базисом*, якщо для будь-якої перестановки σ на $\mathbb{N}$ базиси $(e_{\sigma(n)})$ і (e_n) еквівалентні. Очевидно, що X можна розглядати, як простір числових послідовностей. Позначимо $\mathcal{P}_s(X)$ алгебру поліномів на X, які є симетричними (інваріантними) відносно перестановок елементів цих послідовностей.

Послідовність $(S_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{P}_s(X)$ поліномів називається *алгебраїчно незалежною*, якщо з того, що $q(S_1(x), \ldots, S_n(x)) \equiv 0$ для деякого $n \in \mathbb{N}$ і $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, випливає що:

$$q(z_1, \ldots, z_n) \equiv 0.$$

У іншому випадку ця послідовність називається *алгебраїчно залежною*. Множина поліномів є *системою твірних елементів* для алгебри $\mathcal{P}_s(X)$, якщо кожен поліном з цієї алгебри можна подати, як скінченну алгебраїчну комбінацію елементів з даної множини, тобто для кожного $P \in \mathcal{P}_s(X)$ існує поліном $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ такий, що $P(x) = q(S_1(x), \ldots, S_n(x))$ для деякого n. Послідовність поліномів $(S_i)_{i=1}^{\infty}$ називається *алгебраїчним базисом* $\mathcal{P}_s(X)$, якщо вона є системою твірних для $\mathcal{P}_s(X)$ і алгебраїчно незалежною. Зауважимо, що алгебраїчний базис не завжди існує.

У статті [7] доведено, що симетричні поліноми вигляду:

$$F_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

утворюють алгебраїчний базис в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$.

Іншим прикладом алгебраїчного базису в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ є базис "елементарних" симетричних поліномів:

$$S_i(x) = \sum_{k_1 < \ldots < k_i} x_{k_1} \ldots x_{k_i}.$$

2 Симетричні поліноми на просторі векторних послідовностей

Нашим завданням є опис алгебраїчного базису (або множини твірних функцій) симетричних поліномів на просторі ***векторних*** послідовностей. Точніше, нехай:

$$\mathcal{X} = \left(\sum X\right)_{\ell_1} = \oplus_{\ell_1} X,$$

тобто $\mathcal{X}$ є скінченною або нескінченною ℓ_1-сумою копій банахового простору X. Тоді кожен елемент $\overline{x} \in \mathcal{X}$ можна подати у вигляді послідовності $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, де $x_n \in X$, з нормою $\|\overline{x}\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$. Будемо казати, що поліном P на просторі $\mathcal{X}$ називається *блочно-симетричним (векторно-симетричним)*, якщо:

$$P(x_1, , \ldots, x_n, \ldots) = P(x_{\sigma(1)}, , \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots)$$

для будь-якої блочної перестановки σ. Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$ алгебру блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}$. Ми будемо позначати: $\mathcal{X}_m^n = \oplus_1^m \mathbb{C}^n$, $m = 1, \ldots, \infty$ – ℓ_1-сума m копій простору $\mathbb{C}^n$ і $\mathcal{X}_\infty^\infty$ – нескінченна ℓ_1-сума простору ℓ_1.

Твердження 2.1. *Алгебра $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^n)$ має скінченну систему твірних.*

Доведення випливає з того факту, що група симетрії простору $\mathcal{P}_s(\mathcal{X}_m^n)$ скінченна, і з наслідку в [6, ст. 26].

В загальному випадку, поставлена задача опису твірних $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^\infty)$ є досить складною, тому ми розглянемо два випадки: $\mathcal{X}_2^n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ і $\mathcal{X}_m^2 = \oplus_1^m \mathbb{C}^2$.

2.1 Твірні елементи симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_2^n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$

Твердження 2.2. *Нехай $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^n)$ – алгебра блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_2^n$, де $\mathcal{X}_2^n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$. Тоді твірними елементами алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^n)$ будуть поліноми:*

$$\begin{array}{ll} u_i + v_i, & \forall i, 1 \le i \le n; \\ u_i^2 + v_i^2, & \forall i, 1 \le i \le n; \\ u_i u_j + v_i v_j, & \forall i, j, 1 \le i < j \le n; \\ u_i^k + v_i^k, & \forall k > 2, \forall i, 1 \le i \le n, \end{array} \tag{1}$$

де вектори $(u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)$ належать простору $\mathbb{C}^n$. Ці поліноми не утворюють алгебраїчного базису.

Доведення. Спочатку покажемо, що поліноми (1) не утворюють алгебраїчного базису для $n \ge 1$, тобто покажемо, що вони є алгебраїчно залежними. Нехай для фіксованої пари i, j, $i \ne j$:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= u_i + v_i, \\ \eta_2 &= u_j + v_j, \\ \eta_3 &= u_i^2 + v_i^2, \\ \eta_4 &= u_j^2 + v_j^2, \\ \eta_5 &= u_i u_j + v_i v_j. \end{aligned} \tag{2}$$

Тоді

$$\eta_5^2-\eta_1\eta_2\eta_5+\frac{1}{2}\eta_3\eta_2^2+\frac{1}{2}\eta_4\eta_1^2-\eta_3\eta_4\equiv 0. \tag{3}$$

Тотожність легко перевірити при підстановці значень $\eta_k, k=\overline{1,5}$ у цей поліном.

Зауважимо, що поліноми (2) – алгебраїчно залежні, але жоден з них не виражається через інший алгебраїчно. Це випливає з того, що поліноми вигляду $u_i^k+v_i^k$ симетричні відносно будь-якої перестановки і алгебраїчно незалежні, а поліном $\eta_5=u_iu_j+v_iv_j$ симетричний відносно одночасної перестановки (u_i,u_j) з (v_i,v_j), і тому не може виражатися через $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$.

Далі покажемо, що усі блочно-симетричні поліноми алгебраїчно виражаються через твірні елементи (1). Блочно-симетричні поліноми вигляду:

$$u_i^ru_j^l+v_i^rv_j^l, \qquad 1\le i<j\le n, \qquad l+r\le n,$$

(степеня не менше ніж 3) можна отримати з рекурентної формули:

$$u_i^ru_j^l+v_i^rv_j^l=(u_i^ru_j^{l-1}+v_i^rv_j^{l-1})(u_j+v_j)-\frac{1}{2}\left(\,(u_j+v_j)^2-(u_j^2+v_j^2)\,\right)(u_i^ru_j^{l-2}+v_i^rv_j^{l-2}).$$

Тут без втрати загальності, ми вважаємо, що $l\ge 2$. Ця формула легко доводиться методом математичної індукції.

Блочно-симетричні поліноми $u_1\dots u_n+v_1\dots v_n$ $\forall n>2$ виражаються через поліноми від меншої кількості змінних за формулою:

$$u_1\dots u_n+v_1\dots v_n=\frac{1}{2}[(u_1\dots u_{n-1}+v_1\dots v_{n-1})(u_n+v_n)$$
$$+(u_1\dots u_{n-2}u_n+v_1\dots v_{n-2}v_n)(u_{n-1}+v_{n-1})-(u_1\dots u_{n-2}+v_1\dots v_{n-2})(u_{n-1}v_n+v_{n-1}u_n)],$$

де $u_{n-1}v_n+v_{n-1}u_n=(u_{n-1}+v_{n-1})(u_n+v_n)-(u_{n-1}u_n+v_{n-1}v_n)$.

Таким чином, блочно-симетричні поліноми більш загального вигляду $u_1^{k_1}\dots u_n^{k_n}$ $+v_1^{k_1}\dots v_n^{k_n}$ можна отримати з рекурентних формул:

$$u_1^{k_1}\dots u_n^{k_n}+v_1^{k_1}\dots v_n^{k_n}=\frac{1}{2}[(u_1^{k_1}\dots u_{n-1}^{k_{n-1}}+v_1^{k_1}\dots v_{n-1}^{k_{n-1}})(u_n^{k_n}+v_n^{k_n})$$
$$+(u_1^{k_1}\dots u_{n-2}^{k_{n-2}}u_n^{k_n}+v_1^{k_1}\dots v_{n-2}^{k_{n-2}}v_n^{k_n})(u_{n-1}^{k_{n-1}}+v_{n-1}^{k_{n-1}})$$
$$-(u_1^{k_1}\dots u_{n-2}^{k_{n-2}}+v_1^{k_1}\dots v_{n-2}^{k_{n-2}})(u_{n-1}^{k_{n-1}}v_n^{k_n}+v_{n-1}^{k_{n-1}}u_n^{k_n})],$$

де $u_{n-1}^{k_{n-1}}v_n^{k_n}+v_{n-1}^{k_{n-1}}u_n^{k_n}=(u_{n-1}^{k_{n-1}}+v_{n-1}^{k_{n-1}})(u_n^{k_n}+v_n^{k_n})-(u_{n-1}^{k_{n-1}}u_n^{k_n}+v_{n-1}^{k_{n-1}}v_n^{k_n})$.

Крім того,

$$\sum_{(i)}u_1^{i_1}\dots u_n^{i_n}v_1^{i_1}\dots v_n^{i_n}=\frac{1}{2}\sum_{(i)}\left((u_1^{i_1}\dots u_n^{i_n}+v_1^{i_1}\dots v_n^{i_n})^2-(u_1^{2i_1}\dots u_n^{2i_n}+v_1^{2i_1}\dots v_n^{2i_n})\right),$$

де індекс $(i)=(i_1,\dots,i_n)$ є мультиіндексом. Отже, усі блочно-симетричні поліноми, які утворюють лінійний базис в просторі $\mathcal{X}_2^n$, виражаються через поліноми (1). $\square$

Зауважимо, що кількість поліномів вигляду (3), які показують алгебраїчну залежність твірних елементів (1), дорівнює $\frac{n(n-1)}{2}$.

2.2 Твірні елементи симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_\infty^2 = (\sum \mathbb{C}^2)_{\ell_1}$

Розглянемо простір векторних послідовностей $\mathcal{X}_m^2 = \oplus_1^m \mathbb{C}^2$. Нехай вектор $(x_i, y_i) \in \mathbb{C}^2$. Лінійний базис простору поліномів на $\mathcal{X}_m^2$ утворюють поліноми вигляду:

$$x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} y_1^{r_1} \dots y_m^{r_m}.$$

Просиметризувавши їх, отримаємо поліноми, які утворюють лінійний базис симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_m^2$. А саме:

$$\sum_{\sigma \in S_n} x_1^{k_{\sigma(1)}} \dots x_m^{k_{\sigma(m)}} y_1^{r_{\sigma(1)}} \dots y_m^{r_{\sigma(m)}} = Q_{(i)}(x, y), \tag{4}$$

де $(i) = (k_1, \dots, k_m, r_1, \dots, r_m)$, $x_i, y_j \in X$, $(x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ і $\mathcal{S}_n$ – група підстановок на множині $\{1, \dots, n\}$.

Блочно-симетричні поліноми на просторі $\mathcal{X}_\infty^2$ можна утворити з симетричних поліномів на ℓ_1. Нехай $P(x) \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$. Розглянемо поліном $G(x, y) = P(ax + by)$, $(x, y) \in \mathcal{X}_\infty^2$. Очевидно, що G є блочно-симетричним. З іншого боку, оскільки P можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації базисних поліномів F_k, то $G(x, y)$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації $F_k(ax + by)$.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ – алгебра блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_m^2$, де $\mathcal{X}_m^2 = \oplus_1^m \mathbb{C}^2$. Тоді твірними елементами алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ будуть поліноми вигляду:*

$$\sum_{k=1}^m x_k^r y_k^{n-r}, \quad 0 \le r \le n, \tag{5}$$

де $(x_i, y_i) \in \mathbb{C}^2$ і $n \le m$. Ці поліноми є алгебраїчно залежними.

Доведення. Покажемо, спочатку, що поліноми $Q_{(i)}(x, y)$ (4), які утворюють лінійний базис, виражаються через алгебраїчну комбінацію поліномів вигляду $P(ax + by)$ для деякого $P \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^m)$, тобто:

$$Q_{(i)}(x, y) = s_{(i)}(P_1(a_1x_1 + b_1y_1, \dots, a_1x_m + b_1y_m), \dots, P_\ell(a_\ell x_1 + b_\ell y_1, \dots, a_\ell x_m + b_\ell y_m))$$

$$= s_{(i)}(q_1(F_1(a_1x + b_1y), \dots, F_m(a_1x + b_1y)), \dots, q_\ell(F_1(a_\ell x + b_\ell y), \dots, F_m(a_\ell x + b_\ell y)))$$

для деяких симетричних поліномів $P_1, \dots, P_\ell$.

Доведення проведемо методом математичної індукції по степенях. Спочатку покажемо, що поліноми $Q_{(i)}$ (4), де $\deg(Q_{(i)}) = 2$, виражаються через алгебраїчну комбінацію поліномів $P_k(x, y) = P_k(a_kx + b_ky)$, $k = 1, \dots, \ell$. Нехай $k_i = 1$ і $r_j = 1$. Легко показати, що симетричний поліном $Q_{(1,1)} = \sum_{i,j=1}^m x_iy_j$ виражається за формулою:

$$Q_{(1,1)}(x, y) = F_1(x)F_1(y) + \frac{1}{2}(F_2(x) + F_2(y) - F_2(x + y)),$$

де поліноми F_k є базисними симетричними поліномами. Якщо $k_i = 2$ або $r_j = 2$, то ці поліноми можна отримати як суму $F_2(x) + F_2(y)$.

Припустимо, що кожен поліном $Q_{(i)}(x,y)$ (4), де $\deg(Q_{(i)}(x,y)) = n-1$, виражається через алгебраїчну комбінацію блочно-симетричних поліномів $P_k(x,y)$. Покажемо, що для поліномів степеня n також виконується ця властивість.

Не втрачаючи загальності, можна припустити, що $k_1 \neq 0$. Поліном

$$Q_{(i)}(x,y) = \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

запишемо у вигляді:

$$Q_{(i)}(x,y) = x_1^{k_1} y_1^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big)$$

$$+x_2^{k_1} y_2^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big)$$

$$+ \dots + x_n^{k_1} y_n^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big).$$

У дужках отримаємо блочно-симетричні поліноми по усіх блоках, крім блоку (x_i, y_i) при множниках $x_i^{k_1} y_i^{r_1}$ відповідно. Звівши поліноми у дужках до блочно-симетричних по усіх блоках, отримаємо наступне представлення полінома $Q_{(i)}(x,y)$:

$$Q_{(i)}(x,y) = x_1^{k_1} y_1^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) - x_1^{k_1} y_1^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) + \dots + x_n^{k_1} y_n^{r_1}$$

$$\times \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \dots$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) - x_n^{k_1} y_n^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} \dots x_{n-2}^{k_{\sigma(n-1)}} x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} \dots y_{n-2}^{r_{\sigma(n-1)}} y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big)$$

$$= \Big(x_1^{k_1} y_1^{r_1} + x_2^{k_1} y_2^{r_1} + \dots + x_n^{k_1} y_n^{r_1} \Big) \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) - x_1^{k_1} y_1^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) - \dots - x_n^{k_1} y_n^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} \dots x_{n-2}^{k_{\sigma(n-1)}} x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} \dots y_{n-2}^{r_{\sigma(n-1)}} y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big), \tag{6}$$

де поліном

$$\sum_{\sigma\in S_n} x_2^{k_{\sigma(2)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(2)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + \sum_{\sigma\in S_n} x_1^{k_{\sigma(2)}} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(2)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}}$$

має степінь менший ніж n.

Далі у дужках біля $x_i^{k_1} y_i^{r_1}$ розглянемо доданки вигляду:

$$x_i^{k_2} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_i^{r_2} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + x_i^{k_2} x_1^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{l-1}^{k_{\sigma(l)}} x_{l+1}^{k_{\sigma(l+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_i^{r_2} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots y_{l-1}^{r_{\sigma(l)}} y_{l+1}^{r_{\sigma(l+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + x_i^{k_2} x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_i^{r_2} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}}.$$

З кожного з цих доданків винесемо множник $x_i^{k_2} y_i^{r_2}$, і у рівності (6) отримаємо доданок вигляду:

$$x_1^{k_1+k_2} y_1^{r_1+r_2} \Big(x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \dots + x_2^{k_{\sigma(3)}} x_4^{k_{\sigma(4)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} y_4^{r_{\sigma(4)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ \dots + x_2^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big) + x_2^{k_1+k_2} y_2^{r_1+r_2} \Big(x_3^{k_{\sigma(3)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_3^{r_{\sigma(3)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ x_1^{k_{\sigma(3)}} x_4^{k_{\sigma(4)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(3)}} y_4^{r_{\sigma(4)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} + \dots + x_1^{k_{\sigma(3)}} x_3^{k_{\sigma(4)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(3)}} y_3^{r_{\sigma(4)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} \Big)$$

$$+ \dots + x_n^{k_1+k_2} y_n^{r_1+r_2} \Big(x_2^{k_{\sigma(3)}} x_3^{k_{\sigma(4)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_2^{r_{\sigma(3)}} y_3^{r_{\sigma(4)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}}$$

$$+ x_1^{k_{\sigma(3)}} x_3^{k_{\sigma(4)}} \dots x_{n-1}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(3)}} y_3^{r_{\sigma(4)}} \dots y_{n-1}^{r_{\sigma(n)}} + \dots + x_1^{k_{\sigma(3)}} x_2^{k_{\sigma(4)}} \dots x_{n-2}^{k_{\sigma(n)}} y_1^{r_{\sigma(3)}} y_2^{r_{\sigma(4)}} \dots y_{n-2}^{r_{\sigma(n)}} \Big). \tag{7}$$

Зведемо поліноми у дужках цієї рівності до блочно-симетричних по всіх блоках (x_i, y_i). Тоді рівність (7) набуде вигляду:

$$\Big(x_1^{k_1+k_2} y_1^{r_1+r_2} + x_2^{k_1+k_2} y_2^{r_1+r_2} + \dots + x_n^{k_1+k_2} y_n^{r_1+r_2} \Big)$$

$$\times \Big(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n-1} x_1^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{j-1}^{k_{\sigma(j)}} x_{j+1}^{k_{\sigma(j+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_1^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{r_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{r_{\sigma(i+1)}} \dots y_{j-1}^{r_{\sigma(j)}} y_{j+1}^{r_{\sigma(j+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big)$$

$$-\sum_{l=1}^{n} x_l^{k_1+k_2} y_l^{r_1+r_2} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j\neq l}}^{n-1} x_l^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{j-1}^{k_{\sigma(j)}} x_{j+1}^{k_{\sigma(j+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_l^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{r_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{r_{\sigma(i+1)}} \dots y_{j-1}^{r_{\sigma(j)}} y_{j+1}^{r_{\sigma(j+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big),$$

де $x_0 = 1$ і $y_0 = 1$.

Провівши над останніми доданками у дужках цієї рівності ті ж самі операції $n-2$ рази, так як і в попередньому випадку, отримаємо один з доданків полінома $Q_{(i)}(x,y)$ (4), який матиме вигляд:

$$\Big(x_1^{k_1} y_1^{r_1} + x_2^{k_1} y_2^{r_1} + \dots + x_n^{k_1} y_n^{r_1} \Big)\Big(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{i=1}^{n-1} x_1^{k_{\sigma(2)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_1^{r_{\sigma(2)}} \dots y_{i-1}^{r_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{r_{\sigma(i+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big) - \Big(x_1^{k_1+k_2} y_1^{r_1+r_2} + x_2^{k_1+k_2} y_2^{r_1+r_2} + \dots + x_n^{k_1+k_2} y_n^{r_1+r_2} \Big)$$

$$\times \Big(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n-1} x_1^{k_{\sigma(3)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{j-1}^{k_{\sigma(j)}} x_{j+1}^{k_{\sigma(j+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_1^{r_{\sigma(3)}} \dots y_{i-1}^{r_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{r_{\sigma(i+1)}} \dots y_{j-1}^{r_{\sigma(j)}} y_{j+1}^{r_{\sigma(j+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big) + \dots$$

$$+(-1)^{n-2} \Big(x_1^{k_1+\dots+k_{n-1}} y_1^{r_1+\dots+r_{n-1}} + x_2^{k_1+\dots+k_{n-1}} y_2^{r_1+\dots+r_{n-1}} + \dots + x_n^{k_1+\dots+k_{n-1}} y_n^{r_1+\dots+r_{n-1}} \Big)$$

$$\times \Big(x_1^{k_n} y_1^{r_n} + x_2^{k_n} y_2^{r_n} + \dots + x_n^{k_n} y_n^{r_n} \Big)$$

$$+(-1)^{n-1} \Big(x_1^{k_1+\dots+k_n} y_1^{r_1+\dots+r_n} + x_2^{k_1+\dots+k_n} y_2^{r_1+\dots+r_n} + \dots + x_n^{k_1+\dots+k_n} y_n^{r_1+\dots+r_n} \Big).$$

Зробивши аналогічні операції над доданками вигляду:

$$x_i^{k_1} y_i^{r_1} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{s=1, s\neq i}^{n-1} x_i^{k_l} x_1^{k_{\sigma(2)}} \dots x_{s-1}^{k_{\sigma(s)}} x_{s+1}^{k_{\sigma(s+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}} y_i^{r_l} y_1^{r_{\sigma(2)}} \dots y_{s-1}^{r_{\sigma(s)}} y_{s+1}^{r_{\sigma(s+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big),$$

$$x_q^{k_1+k_l} y_q^{r_1+r_l} \Big(\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j\\ i\neq j\neq l}}^{n-1} x_q^{k_m} x_1^{k_{\sigma(2)}} \dots x_{i-1}^{k_{\sigma(i)}} x_{i+1}^{k_{\sigma(i+1)}} \dots x_{j-1}^{k_{\sigma(j)}} x_{j+1}^{k_{\sigma(j+1)}} \dots x_n^{k_{\sigma(n)}}$$

$$\times y_q^{r_m} y_1^{r_{\sigma(2)}} \dots y_{i-1}^{r_{\sigma(i)}} y_{i+1}^{r_{\sigma(i+1)}} \dots y_{j-1}^{r_{\sigma(j)}} y_{j+1}^{r_{\sigma(j+1)}} \dots y_n^{r_{\sigma(n)}} \Big),$$

отримаємо зображення полінома $Q_{(i)}(x,y)$ (4) через поліноми нижчого степеня і твірні елементи (5). Отже, поліноми $Q_{(i)}(x,y)$ можна отримати, як алгебраїчну комбінацію поліномів $P_k(x,y)$ для деяких $P_k(x,y) \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^m)$ і твірних елементів (5).

Тепер покажемо, що твірні елементи (5) виражаються через поліноми вигляду:

$$P(ax+by), \qquad P \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^m).$$

Нам відомо, що кожен симетричний поліном $P \in \mathcal{P}_s(\mathbb{C}^m)$ виражається через алгебраїчну комбінацію базисних симетричних поліномів:

$$F_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n, \qquad \forall n \leq m.$$

Тоді кожен $P(ax + by)$ можна записати у вигляді:

$$P(ax + by) = P(ax_1 + by_1, \ldots, ax_m + by_m).$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} F_n(ax+by) = \sum_{k=1}^{m} (ax_k + by_k)^n &= a^n F_n(x) + b^n F_n(y) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l a^l x_k^l b^{n-l} y_k^{n-l} \\ &= a^n F_n(x) + b^n F_n(y) + \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l a^l b^{n-l} \sum_{k=1}^{m} x_k^l y_k^{n-l}. \end{aligned} \tag{8}$$

Нехай $a = 1$ і $b \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Поставивши $b_j = j$, з рівності (8) отримаємо:

$$F_n(x + jy) = \sum_{k=1}^{m} (x_k + jy_k)^n = \sum_{k=1}^{m} x_k^n + j^n \sum_{k=1}^{m} y_k^n + \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l j^{n-l} \sum_{k=1}^{m} x_k^l y_k^{n-l}. \tag{9}$$

У цій рівності, зробивши наступну заміну $z_i = \sum\limits_{k=1}^{m} C_n^i x_k^{n-i} y_k^i$, при різних значеннях $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ отримаємо систему n рівнянь з n невідомих z_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} &F_n(x) = z_0(x,y), \\ &F_n(x+y) = z_0(x,y) + z_1(x,y) + \ldots + z_{n-2}(x,y) + z_{n-1}(x,y) + z_n(x,y), \\ &F_n(x+2y) = z_0(x,y) + 2z_1(x,y) + \ldots + 2_{n-2} z^{n-2}(x,y) + 2_{n-1} z^{n-1}(x,y) + 2^n z_n(x,y), \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &F_n(x+ny) = z_0(x,y) + nz_1(x,y) + \ldots + n^{n-2} z_{n-2}(x,y) + n^{n-1} z_{n-1}(x,y) + n^n z_n(x,y), \end{aligned} \tag{10}$$

де $n \leq m$.

Систему рівнянь (10) можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} F_n(x) \\ F_n(x+y) \\ F_n(x+2y) \\ \cdots \\ F_n(x+ny) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1} & n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Оскільки визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1} & n^n \end{pmatrix}$$

містить мінор, який є визначником Вандермонда і не дорівнює нулю, то можна знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A. Тоді з рівності (11) легко знайти невідомі z_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, за формулою:

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} F_n(x) \\ F_n(x+y) \\ F_n(x+2y) \\ \cdots \\ F_n(x+ny) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Оскільки $z_i = \sum\limits_{k=1}^{m} C_n^i x_k^{n-i} y_k^i$, то поліноми вигляду $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^{n-i} y_k^i$ можна знайти за формулою $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^{n-i} y_k^i = \frac{1}{C_n^i} z_i$, отже, їх можна подати як алгебраїчну комбінацію поліномів $P(ax+by)$. Тому, поліноми $Q_{(i)}(x,y)$ з (4) можна отримати, як алгебраїчну комбінацію поліномів вигляду $P(ax+by)$.

Оскільки кожен поліном $P(ax+by)$ подається у вигляді алгебраїчної оболонки базисних симетричних поліномів степеня $\leq m$, то достатньо шукати твірні елементи степеня $\leq m$.

З рівності (9) випливає, що довільний блочно-симетричний поліном $G(x,y) = P(ax+by)$ можна отримати як алгебраїчну комбінацію поліномів (5). Отже, твірними елементами блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_m^2 = \oplus_1^m \mathbb{C}^2$ є поліноми (5).

Відомо [2, ст. 103-105], що $h+1$ однорідний поліном від h змінних є алгебраїчно залежними. Тому болочно-симетричні поліноми (5) є алгебраїчно залежними, але не виражаються через алгебраїчну комбінацію один одного. □

Зауваження 2.1. *Поліноми $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ вигляду (2) можна записати як:*

$$\begin{aligned} &\eta_1(x) = F_1(x), \\ &\eta_2(y) = F_1(y), \\ &\eta_3(x) = F_2(x), \\ &\eta_4(y) = F_2(y), \\ &\eta_5(x,y) = \tfrac{F_2(x+y) - F_2(x) - F_2(y)}{2}, \end{aligned} \tag{13}$$

де $(x) = (x_1, x_2)$, $(y) = (y_1, y_2)$ і $(x_i, y_i) \in \mathbb{C}^2$. Тоді співвідношення (3) показує алгебраїчну залежність твірних елементів $F_1(x), F_1(y), F_2(x), F_2(y), F_2(x+y)$ в просторі $\mathcal{X}_2^2$.

Зауважимо, що кількість твірних елементів (5) буде не більше ніж $\frac{m^2+m}{2} + 2$.

3 Гомоморфізми алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^n)$

З отриманих результатів та загальної теорії інваріантів [2] випливає, що множина комплексних гомоморфізмів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^n)$ задається функціональними значеннями в точках алгебраїчного многовиду, що є ядром полінома (3) для кожного $i, j = 1, \ldots, n$, тобто φ є гомоморфізмом з $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^n)$ в $\mathbb{C}$ тоді і тільки тоді, коли існує точка $z \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$,

$z = (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$, координати якої задовольняють рівність (3) для всіх i, j та $\varphi(P) = P(z)$ для кожного $P \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_2^n)$. У випадку алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ ми не маємо явного вигляду залежності між твірними елементами, тому не можемо записати загального вигляду комплексного гомоморфізму. Проте, можна встановити деякі співвідношення між гомоморфізмами $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ та гомоморфізмами інших алгебр.

Будемо вважати, що алгебри поліномів $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^n)$ і $\mathcal{P}(\ell_1)$ є зліченно нормованими відносно системи норм $\|P\|_r = \sup\limits_{\|x\| \le r} |P(x)|$, $r \in \mathbb{Q}$.

Теорема 2. *Існує неперервний гомоморфізм:*

$$\psi_a : \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2) \to \mathcal{P}(\ell_1),$$

такий що для кожного $P(x, y) \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$, $\psi_a(P(x, y)) = P(x, a)$.

Доведення. Оскільки $P(x, a) \in \mathcal{P}(\ell_1)$, то $\psi_a(P(x, y)) \in \mathcal{P}(\ell_1)$. Тому ψ_a є відображенням з алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ в алгебру $\mathcal{P}(\ell_1)$. Покажемо, що відображення ψ_a є гомоморфізмом. Це випливає з наступних рівностей:

$$\psi_a(P(x, y) + Q(x, y)) = P(x, a) + Q(x, a) = \psi_a(P(x, y)) + \psi_a(Q(x, y));$$

$$\psi_a(P(x, y)Q(x, y)) = P(x, a)Q(x, a) = \psi_a(P(x, y))\psi_a(Q(x, y));$$

$$\psi_a(\beta P(x, y)) = \beta P(x, a) = \beta\psi_a(P(x, y))).$$

Нехай $x, a \in l_1$, $\|a\| \le r$ $\|x\| \le r$. Тоді $\|(x, a)\| = \|x\| + \|a\| \le 2r$. Звідси:

$$|\psi_a(P(x, y))| = |P(x, a)| \le \sup_{\|(x,a)\| \le 2r} |P(x, a)| = \|P\|_{2r}.$$

Отже, гомоморфізм ψ_a є неперервним. □

Наслідок 3.1. *Кожен характер* φ *на* $\mathcal{P}(\ell_1)$ *можна продовжити до деякого характеру* $\widetilde{\varphi}$ *на* $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ *за формулою:*

$$\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \psi_a,$$

де ψ_a *– гомоморфізм з алгебри* $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$ *у алгебру* $\mathcal{P}(\ell_1)$.

Окремим випадком є існування гомоморфізму ψ_a при $a = 0$. Справедливим буде наступне твердження.

Твердження 3.1. *Існує неперервний гомоморфізм:*

$$\psi : \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2) \to \mathcal{P}_s(\ell_1),$$

такий що $P(x, y) \in \mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_\infty^2)$, $\psi(P(x, y)) = P(x, 0)$. *Гомоморфізм* ψ *є проектором на* $\mathcal{P}_s(\ell_1)$.

Доведення. Оскільки $P(x,0) \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$, то $\psi(P(x,y)) \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$. Тому ψ є відображенням з алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2_\infty)$ у алгебру $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Доведення того, що відображення ψ є гомомрфізмом проводиться аналогічно до доведення теореми 2.

Нехай $x \in \ell_1$ і $\|x\| \le r$. Тоді:

$$|\psi(P(x,y))| = |P(x,0)| \le \sup_{\|x\|\le r} |P(x,0)| = \|P\|_r.$$

Отже, гомоморфізм ψ є неперервним.

Оскільки $\psi(\psi(P(x,y))) = \psi(P(x,0)) = P(x,0)$, то $\psi(\psi(P(x,y))) = \psi(P(x,y))$. Звідси випливає, що ψ є проектором. □

Наслідок 3.2. *Кожен характер φ на $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ можна продовжити до деякого характеру $\widetilde{\varphi}$ на $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2_\infty)$ за формулою:*

$$\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \psi,$$

де ψ – гомоморфізм з алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2_\infty)$ у алгебру $\mathcal{P}_s(\ell_1)$.

Очевидно, можна сформулювати аналоги теореми 2, твердження 3.1 і відповідних наслідків для $m < \infty$. В цьому випадку доведення буде аналогічним. Також, гомоморфізми ψ_a і ψ з теореми 2 та твердження 3.1 продовжуються за неперервністю до гомоморфізмів алгебр Фреше, якими є поповнення $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2_\infty)$ та $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ у відповідних метриках.

Література

1. Александров П. С. Проблеы гильберта. – М.: Наука, 1969.
2. Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. – М.: Мир, 1974.
3. Немировский А. С., Семенов С. М. *О полиномиальной апроксимации функций на гильбертовом пространстве* // Математичиский зборник. – 1973. – Т 92, № 2. – С. 257-281.
4. Чернега I. В. *Симетричні поліними на банахових просторах* // Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т.1, №2. – С. 105-125.
5. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Algebra of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*, Bull. Lond. Math. Soc., **35** (2003), 55-64.
6. Eisenbud D. Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry, Springer Science, 2004.
7. Gonzalez M., Gonzalo R. and Jaramillo J. *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces*, Jour. London Math. Soc., **59** (1999), 681–697.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 10.06.2010

Zagorodnyuk A.V., Kravtsiv V.V. *Symmetric polynomials on the product of Banach spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 59–71.

The paper contains a description of sets of generators of algebra of vector-symmetric polynomials on products of Banach spaces. Some applications to complex homomorphisms of these algebras are obtained.

Загороднюк А.В., Кравцив В.В. *Симметричиские полиномы на произведениях банаховых пространств* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 59–71.

В работе сделано описание множества образующих елементов алгебр векторно-симметричечских полиномов на произведениях банаховых пространств и получено применение к описанию гомоморфизмов этих алгебр.

Карпатські математичні
публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.2, №.1

УДК 512.538

Заторський Р.А., Семенчук А.В.

ПЕРІОДИЧНІ РЕКУРЕНТНІ ДРОБИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Заторський Р.А., Семенчук А.В. *Періодичні рекурентні дроби третього порядку* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 72–81.

За допомогою параперманентів трикутних матриць досліджуються періодичні рекурентні дроби третього порядку.

Вступ

Однією із найбільш актуальних задач чисельного аналізу є задача про раціональні наближення алгебраїчних ірраціональностей. Для квадратичних ірраціональностей ця задача вирішується за допомогою раціональних вкорочень періодичних ланцюгових дробів. Для раціональних наближень ірраціональностей третього та вищих порядків було побудовано ряд алгоритмів, що узагальнюють ланцюгові дроби. При побудові таких алгоритмів використовувалися лінійні однорідні форми, дроби Фарея, матричний підхід тощо. Проте найбільш природним виявився алгоритм Фюрстенау [3], розвинений в [1].

В статті вивчаються раціональні наближення кубічних ірраціональностей за допомогою періодичних рекурентних дробів третього порядку, побудованих на основі алгоритму Фюрстенау. Зауважимо, що випадок одноперіодичних рекурентних дробів довільного порядку досліджено в [1]. Ефективний алгоритм обчислення значень раціональних вкорочень періодичних рекурентних дробів третього порядку побудовано у [2]. Тому в статті досліджуватимуться двоперіодичні та триперіодичні рекурентні дроби. Зокрема буде встановлено зв'язок значень мішаних періодичних рекурентних дробів із значеннями відповідних періодичних рекурентних дробів.

Наведемо деякі основні поняття, які будуть використані нижче.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.
Ключові слова і фрази: періодичні рекурентні дроби.

1 Основні поняття про параперманенти та рекурентні дроби

Нехай K — деяке числове поле.

Означення 1.1 ([4]). *Трикутну таблицю*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

чисел із числового поля K назвемо трикутною матрицею, елемент a_{11} — верхнім елементом цієї трикутної матриці, а число n — її порядком.

Означення 1.2 ([4]). *Нехай A — трикутна матриця (1). Парадетермінантом та параперманентом трикутної матриці A називають відповідно числа:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\}$$

та

$$\operatorname{pper}(\mathrm{A}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

де сумування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r = n,$$

а символом $\{a_{ij}\}$ позначено факторіальний добуток елемента a_{ij}, що задається рівністю

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Означення 1.3 ([1]). *Нехай $a_{ij}, (1 \leqslant j \leqslant i < \infty)$ — деякі цілі числа. Алгебраїчні об'єкти вигляду*

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|ccccccc} a_{11} & & & & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n-2,n-1}} & \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-3,n-1}} & \ldots & a_{1,n-1} & & & & \\ \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \ldots & \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} & a_{1,n} & & & \\ 0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \ldots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{array}\right]_{\infty} \tag{2}$$

та

$$\frac{P_m}{Q_m} = \left[\begin{array}{c|ccccccc} a_{11} & & & & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \ldots & a_{1,n} & & & & \\ 0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \ldots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \ldots & a_{1,m} \end{array}\right]_m,$$

де

$$P_m = \left[\begin{array}{cccccccc} a_{11} & & & & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \ldots & a_{1,n} & & & & \\ 0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \ldots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \ldots & a_{1,m} \end{array}\right]_m,$$

$$Q_m = \left[\begin{array}{cccccccc} a_{12} & & & & & & & \\ \frac{a_{23}}{a_{13}} & a_{13} & & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \frac{a_{n-2,n}}{a_{n-3,n}} & \ldots & a_{1,n} & & & & \\ \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-2,n+1}} & \ldots & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\ 0 & \frac{a_{n,n+2}}{a_{n-1,n+2}} & \ldots & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \ldots & a_{1,m} \end{array}\right]_{m-1}$$

— *параперманенти відповідних трикутних матриць, назвемо відповідно рекурентним дробом n-го порядку та його m-тим раціональним вкороченням.*

2 Періодичні рекурентні дроби

Означення 2.1 ([1]). *Рекурентний дріб n-го порядку (2) називають k-періодичним, якщо його елементи задовольняють рівність*

$$a_{i,rk+j} = a_{i,j},\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Встановимо зв'язки періодичних рекурентних дробів третього порядку із дійсними додатніми коренями кубічних рівнянь.

Розглянемо періодичний рекурентний дріб третього порядку з періодом 2

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} q_1 & & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & \\ 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ 0 & 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right],$$

де q_i та p_i – додатні числа. Розкладемо чисельник цього дробу за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_1]_n}{[q_2]_{n-1}} = \frac{q_1[q_2]_{n-1}+p_2[q_1]_{n-2}+r_1[q_2]_{n-3}}{[q_2]_{n-1}} = q_1 + \frac{p_2}{\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}} + \frac{r_1}{\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} \cdot \frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}}. \tag{3}$$

В цій рівності параперманент i-го порядку з верхнім елементом q_j, $j=1,2$, позначено через $[q_j]_i$. Аналогічно розкладаємо чисельник дробу $\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}$ за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = q_2 + \frac{p_1}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}} + \frac{r_2}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}} \cdot \frac{[q_2]_{n-3}}{[q_1]_{n-4}}}. \tag{4}$$

Нехай

$$\lim_{m\to\infty} \frac{[q_1]_m}{[q_2]_{m-1}} = x, \ \lim_{m\to\infty} \frac{[q_2]_m}{[q_1]_{m-1}} = y.$$

Тоді, спрямовуючи в рівностях (3), (4) n до нескінченності, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x = q_1 + \frac{p_2}{y} + \frac{r_1}{xy}, \\ y = q_2 + \frac{p_1}{x} + \frac{r_2}{xy}, \end{cases}$$

з якої знаходимо, що

$$y = \frac{p_2 x + r_1}{x^2 - q_1 x},$$

а x є додатнім коренем кубічного рівняння

$$(q_2p_2 + r_2)x^3 = (q_1q_2p_2 + p_2^2 + 2q_1r_2 - p_1p_2 - q_2r_1)x^2$$

$$+(q_1p_1p_2 + q_1q_2r_1 - 2p_2r_1 - q_1^2r_2 - p_1r_1)x + r_1(q_1p_1 + r_1),$$

або за допомогою параперманентів

$$\left[\begin{array}{cc} q_2 & \\ \frac{r_2}{p_2} & p_2 \end{array}\right] x^3 = \left(\left[\begin{array}{ccc} q_1 & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & \\ 0 & \frac{r_2}{p_2} & p_2 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc} p_1 & \\ \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 \end{array}\right] - r_1 \left[\, q_2 \,\right] \right) x^2$$

$$+ \left(\left[\begin{array}{ccc} q_1 & & \\ \frac{r_1}{p_1} & p_1 & \\ 0 & \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 \end{array}\right] + r_1 \left(\left[\begin{array}{cc} q_1 & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 \end{array}\right] - \left[\, p_1 \,\right] \right) \right) x + r_1 \left[\begin{array}{cc} q_1 & \\ \frac{r_1}{p_1} & p_1 \end{array}\right].$$

Приклад 2.1. *Нехай* $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, *тоді рекурентний дріб матиме вигляд*

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} 3 & & & & & & \\ \frac{2}{2} & 2 & & & & & \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & & & \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & & & \\ 0 & 0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right],$$

а раціональні вкорочення, які наближують дійсний корінь

$$x = \frac{1}{18}(16 + \sqrt[3]{30664 + 162\sqrt{26118}} + \sqrt[3]{30664 - 162\sqrt{26118}}) \approx 3,941055084$$

кубічного рівняння

$$6x^3 = 16x^2 + 21x + 36,$$

дорівнюють

$$\delta_1 = \frac{3}{1} = 3, \quad \delta_2 = \frac{8}{2} = 4, \quad \delta_3 = \frac{36}{9} = 4,$$

$$\delta_4 = \frac{94}{24} \approx 3,916, \quad \delta_5 = \frac{414}{105} \approx 3,942, \quad \delta_6 = \frac{1088}{276} \approx 3,9420,$$

$$\delta_7 = \frac{4788}{1215} \approx 3,9407, \quad \delta_8 = \frac{12580}{3192} \approx 3,9411, \quad \delta_9 = \frac{55368}{14049} \approx 3,94106,$$

$$\delta_{10} = \frac{145472}{36912} \approx 3,941048, \quad \delta_{11} = \frac{640260}{162459} \approx 3,941055$$

$$\delta_{12} = \frac{1682200}{426840} \approx 3,94105519, \quad \delta_{13} = \frac{7403796}{1878633} \approx 3,94105501,$$

$$\delta_{14} = \frac{19452512}{4935864} \approx 3,941055102, \quad \delta_{15} = \frac{85615524}{21724011} \approx 3,94105508,$$

$$\delta_{16} = \frac{224943664}{57077016} \approx 3,941055082, \delta_{17} = \frac{990035100}{251210673} \approx 3,941055084,$$

$$\delta_{18} = \frac{2601188576}{660023400} \approx 3,941055084.$$

Тепер розглянемо періодичний рекурентний дріб третього порядку з періодом 3:

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} q_1 & & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\ 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & \\ 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right],$$

де q_i та p_i – додатні числа. Розкладемо чисельник цього дробу за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_1]_{n+1}}{[q_2]_n} = \frac{q_1[q_2]_n + p_2[q_3]_{n-1} + r_3[q_1]_{n-2}}{[q_2]_n} = q_1 + \frac{p_2}{\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}}} + \frac{r_3}{\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} \cdot \frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}}.$$

Розкладемо чисельник дробу $\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}}$ за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} = \frac{q_2[q_3]_{n-1} + p_3[q_1]_{n-2} + r_1[q_2]_{n-3}}{[q_3]_{n-1}} = q_2 + \frac{p_3}{\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}} + \frac{r_1}{\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} \cdot \frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}}.$$

Розкладемо чисельник дробу $\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}$ за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = \frac{q_3[q_1]_{n-2} + p_1[q_2]_{n-3} + r_2[q_3]_{n-4}}{[q_1]_{n-2}} = q_3 + \frac{p_1}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}} + \frac{r_2}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}} \cdot \frac{[q_2]_{n-3}}{[q_3]_{n-4}}}.$$

Нехай існують границі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[q_1]_{n+1}}{[q_2]_n} = x,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} = y,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = z,$$

тоді останні три рівності запишуться у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} x = q_1 + \frac{p_2}{y} + \frac{r_3}{yz}, \\ y = q_2 + \frac{p_3}{z} + \frac{r_1}{zx}, \\ z = q_3 + \frac{p_1}{x} + \frac{r_2}{xy}. \end{cases} \tag{5}$$

Звідси маємо кубічне рівняння

$$(q_2q_3p_2p_3 - q_2^2q_3r_3 + q_2p_3r_2 - q_2p_3r_3 + p_2p_3^2)x^3$$

$$= (q_1q_2q_3p_2p_3 - q_2q_3p_2r_1 - q_1q_2^2q_3r_3 - q_2q_3p_2r_3 + q_3p_2^2p_3 + q_2^2p_1r_3 - q_2p_1p_2p_3$$
$$+2q_1q_2p_3r_2 - q_2r_1r_2 + q_2r_2r_3 + p_2p_3r_2 - q_1q_2p_3r_3 + q_2r_1r_3 - q_2r_3^2 + q_1p_2p_3^2 + p_2p_3r_3$$
$$-2p_2p_3r_1)x^2 + (q_1q_2q_3p_2r_1 + q_3p_2^2r_1 - q_2p_1p_2r_1 - q_1q_2^2p_1r_3 + q_1q_2p_1p_2p_3 - q_2p_1p_2r_3$$
$$+p_1p_2^2p_3 + 2q_1q_2r_1r_2 - q_1^2q_2p_3r_2 - q_1q_2r_2r_3 - q_1p_2p_3r_2 + p_2r_1r_2 - p_2r_2r_3 - q_1q_2r_1r_3$$
$$+2q_1p_2p_3r_1 - p_2r_1^2 + p_2r_1r_3)x + r_1(q_1q_2p_1p_2 - q_1^2q_2r_2 + p_1p_2^2 - q_1p_2r_2 + q_1p_2r_1),$$

або за допомогою парапермanентів

$$\begin{bmatrix} q_2 & & & \\ \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & \\ 0 & \frac{r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & 0 & \frac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{bmatrix} x^3 = \left(\begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & \\ 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_2 & & & \\ \frac{r_1}{p_1} & p_1 & & \\ 0 & \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & \frac{r_2}{q_2} & \frac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{bmatrix} - r_1 \begin{bmatrix} q_2 & & \\ \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\ 0 & \frac{r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix} \right) x^2$$

$$
+\left(\left[\begin{array}{lllll}
q_1 & & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\
0 & \frac{r_1}{p_1} & p_1 & & \\
0 & 0 & \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 & \\
0 & 0 & \frac{r_2}{q_2} & \frac{-q_2r_3}{p_3} & p_3
\end{array}\right]+r_1\left(\left[\begin{array}{llll}
q_1 & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\
\frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\
0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & p_2
\end{array}\right]-\left[\begin{array}{lll}
q_2 & & \\
\frac{r_1}{p_1} & p_1 & \\
0 & \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2
\end{array}\right]\right)\right)x+r_1\left[\begin{array}{llll}
q_1 & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\
0 & \frac{r_1}{p_1} & p_2 & \\
0 & 0 & \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2
\end{array}\right].
$$

Приклад 2.2. *Нехай* $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$, *тоді рекурентний дріб матиме вигляд*

$$
\left[\begin{array}{l|llllll}
3 & & & & & & \\
\frac{2}{2} & 2 & & & & & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 1 & & & & \\
0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & & \\
0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 1 & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right],
$$

а раціональні вкорочення, які наближують дійсний корінь

$$x = \frac{1}{6}(1 + \sqrt[3]{1630 + 45\sqrt{561}} + \sqrt[3]{1630 - 45\sqrt{561}}) \approx 3,863421135$$

кубічного рівняння

$$4x^3 = 2x^2 + 38x + 54,$$

або

$$2x^3 = x^2 + 19x + 27,$$

дорівнюють

$$\delta_1 = \frac{3}{1} = 3, \quad \delta_2 = \frac{8}{2} = 4, \quad \delta_3 = \frac{12}{3} = 4,$$

$$\delta_4 = \frac{69}{18} \approx 3,833, \quad \delta_5 = \frac{178}{46} \approx 3,8696, \quad \delta_6 = \frac{1518}{393} \approx 3,8626,$$

$$\delta_7 = \frac{3910}{1012} \approx 3,86364, \quad \delta_8 = \frac{5687}{1472} \approx 3,863451, \quad \delta_9 = \frac{33345}{8631} \approx 3,863399,$$

$$\delta_{10} = \frac{85884}{22230} \approx 3,8634278, \quad \delta_{11} = \frac{124916}{32333} \approx 3,86342127,$$

$$\delta_{12} = \frac{732435}{189582} \approx 3,8634206, \quad \delta_{13} = \frac{1886470}{488290} \approx 3,86342133,$$

$$\delta_{14} = \frac{2743821}{710205} \approx 3,863421125, \quad \delta_{15} = \frac{16088178}{4164231} \approx 3,863421121,$$

$$\delta_{16} = \frac{41436938}{10725452} \approx 3,863421141, \quad \delta_{17} = \frac{60268937}{15599888} \approx 3,863421135,$$

$$\delta_{18} = \frac{353382159}{910176068} \approx 3,863421135.$$

3 Мішані періодичні рекурентні дроби

Розглянемо мішаний періодичний рекурентний дріб третього порядку з передперіодом 4 і періодом 3

$$\left[\begin{array}{c|ccccccccc}
q_0^* & & & & & & & & & \\
\frac{p_1^*}{q_1^*} & q_1^* & & & & & & & & \\
\frac{r_2^*}{p_2^*} & \frac{p_2^*}{q_2^*} & q_2^* & & & & & & & \\
0 & \frac{r_3^*}{p_3^*} & \frac{p_3^*}{q_3^*} & q_3^* & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 \\
\vdots & \multicolumn{8}{c}{\dotfill} & \ddots
\end{array}\right]_\infty,$$

де q_j^*, q_i та p_i – додатні числа. Розкладемо чисельник цього дробу за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(5)$, а знаменник — за елементами таблиці $T(4)$. Отримаємо,

$$\frac{[q_0^*]_{n+4}}{[q_1^*]_{n+3}}=\frac{[q_0^*]_4(q_1[q_2]_{n-1}+p_2[q_3]_{n-2}+r_3[q_4]_{n-3})+[q_0^*]_3(p_1[q_2]_{n-1}+r_2[q_3]_{n-2})+[q_0^*]_2r_1[q_2]_{n-1}}{[q_1^*]_3(q_1[q_2]_{n-1}+p_2[q_3]_{n-2}+r_3[q_4]_{n-3})+[q_1^*]_2(p_1[q_2]_{n-1}+r_2[q_3]_{n-2})+[q_1^*]_1r_1[q_2]_{n-1}}.$$

В чисельнику і знаменнику вираз у перших дужках є розкладом параперманента $[q_1]_n$ за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_0^*]_4[q_1]_n+[q_0^*]_3(p_1[q_2]_{n-1}+r_2[q_3]_{n-2})+[q_0^*]_2r_1[q_2]_{n-1}}{[q_1^*]_3[q_1]_n+[q_1^*]_2(p_1[q_2]_{n-1}+r_2[q_3]_{n-2})+[q_1^*]_1r_1[q_2]_{n-1}}.$$

Перегрупуємо доданки

$$\frac{[q_0^*]_4[q_1]_n+([q_0^*]_3p_1+[q_0^*]_2r_1)[q_2]_{n-1}+[q_0^*]_3r_2[q_3]_{n-2}}{[q_1^*]_3[q_1]_n+([q_1^*]_2p_1+[q_1^*]_1r_1)[q_2]_{n-1}+[q_1^*]_2r_2[q_3]_{n-2}},$$

поділимо чисельник і знаменник на $[q_3]_{n-2}$, отримаємо

$$\frac{[q_0^*]_4\frac{[q_1]_n}{[q_2]_{n-1}}\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_3]_{n-2}}+([q_0^*]_3p_1+[q_0^*]_2r_1)\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_3]_{n-2}}+[q_0^*]_3r_2}{[q_1^*]_3\frac{[q_1]_n}{[q_2]_{n-1}}\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_3]_{n-2}}+([q_1^*]_2p_1+[q_1^*]_1r_1)\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_3]_{n-2}}+[q_1^*]_2r_2}.$$

Нехай існують границі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[q_0^*]_{n+4}}{[q_1^*]_{n+3}}=x^*,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[q_1]_n}{[q_2]_{n-1}}=x,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_3]_{n-2}}=y.$$

Тоді останній вираз запишеться у вигляді

$$x^*=\frac{[q_0^*]_4xy+([q_0^*]_3p_1+[q_0^*]_2r_1)y+[q_0^*]_3r_2}{[q_1^*]_3xy+([q_1^*]_2p_1+[q_1^*]_1r_1)y+[q_1^*]_2r_2},$$

де x, y – розв'язки системи (5) для періодичного рекурентного дробу

$$\left[\begin{array}{c|cccccc}
q_1 & & & & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\
\frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\
0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & \\
0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right].$$

Приклад 3.1. *Нехай* $q_0^* = 3$, $q_1^* = 2$, $q_2^* = 3$, $q_3^* = 2$, $p_1^* = 4$, $p_2^* = 3$, $p_3^* = 4$, $r_2^* = 1$, $r_3^* = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 1$, *тоді мішаний рекурентний дріб матиме вигляд*

$$\left[\begin{array}{c|cccccccccc}
3 & & & & & & & & & & \\
\frac{4}{2} & 2 & & & & & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & & & & & & & \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{4}{2} & 2 & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 1 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 1 & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_{\infty}.$$

Значення мішаного періодичного рекурентного дробу збігається до числа

$$x^* = \frac{127xy + 100y + 120}{27xy + 22y + 27},$$

де

$$x = \frac{1}{9} \cdot (\sqrt[3]{1630 + 45 \cdot \sqrt{561}} + \sqrt[3]{1630 - 45 \cdot \sqrt{561}} + 4) \approx 2.9089474235938$$

— корінь кубічного рівняння

$$9x^3 = 12x^2 + 33x + 24,$$

або

$$3x^3 = 4x^2 + 11x + 8,$$

два інші корені якого – комплексні, а

$$y = \frac{6}{x^2 - x - 4}.$$

Отже,

$$x^* \approx 4.5462675971938.$$

Знайдемо раціональні вкорочення цього дробу, отримаємо

$$\delta_1 = \frac{10}{2} = 5, \quad \delta_2 = \frac{40}{9} = 4,44, \quad \delta_3 = \frac{123}{27} = 4,555,$$

$$\delta_4 = \frac{346}{76} \approx 4,553, \quad \delta_5 = \frac{1527}{336} \approx 4,5446, \quad \delta_6 = \frac{1996}{439} \approx 4,54670,$$

$$\delta_7 = \frac{7738}{1702} \approx 4,54642, \quad \delta_8 = \frac{33783}{7431} \approx 4,546225, \quad \delta_9 = \frac{43517}{9572} \approx 4,546281,$$

$$\delta_{10} = \frac{170076}{37410} \approx 4,546271, \quad \delta_{11} = \frac{742128}{163239} \approx 4,5462665,$$

$$\delta_{12} = \frac{955721}{210221} \approx 4,54626798, \quad \delta_{13} = \frac{3735850}{821740} \approx 4,54626767,$$

$$\delta_{14} = \frac{16301097}{3585600} \approx 4,546267570, \quad \delta_{15} = \frac{20992668}{4617561} \approx 4,54626761,$$

$$\delta_{16} = \frac{82059230}{18049802} \approx 4,5462675990, \quad \delta_{17} = \frac{358058985}{78758889} \approx 4,5462675965,$$

$$\delta_{18} = \frac{461110883}{101426252} \approx 4,54626759747.$$

Література

1. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування. – Івано-Франківськ: "Сімик", 2010. – 508 с.
2. Семенчук А.В. *Алгоритм обчислення раціональних вкорочень періодичного рекурентного дробу 3-го порядку* // Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – №.1. – С. 34-42.
3. Furshtenau E. *ber Kettenbrüche hoherer Ordnung*, Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik, (1876), 133-135.
4. Zatorsky R.A. *Theory of paradeterminants and its applications*, Algebra and Diskrete Mathematics, №.1 (2007), 109-138.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

м. Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 14.07.2010

Zatorsky R.A., Semenchuk A.V. *Periodic recurrent fractions of third degree*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 72–81.

Periodic recurrent fractions of third degree are investigated by means of parapermanents of triangular matrices.

Заторский Р.А., Семенчук А.В. *Периодичиские рекуррентные дроби третьего порядка* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 72–81.

При помощи параперманентов треугольных матриц исследуются периодичиские рекуррентные дроби третьего порядка.

Карпатські математичні публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №.1

УДК 517.988.6:517.988.8

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.

ЗАСТОСУВАННЯ ІТЕРАЦІЙНИХ АЛГОРИТМІВ ТА ГІЛЛЯСТИХ ДРОБІВ В.Я. СКОРОБАГАТЬКА ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ КОРЕНІВ ПОЛІНОМІВ У БАНАХОВИХ АЛГЕБРАХ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Застосування ітераційних алгоритмів та гіллястих дробів В.Я. Скоробагатька для апроксимації коренів поліномів у банахових алгебрах* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 82–86.

Досліджено ітераційні алгоритми для наближеної факторизації окремих класів поліномів з коефіцієнтами з банахової алгебри, які водночас є алгоритмами побудови аналогів гіллястих дробів В.Я. Скоробагатька у банахових алгебрах.

Для додатнього лінійного неперервного оператора $A : H \to H$ ($H-$ гільбертів простір), в [9] встановлено існування додатнього лінійного неперервного оператора $B : H \to H$, який задовольняє рівність $B^2 = A$, а в [5] обґрунтовано його єдиність. Докладну інформацію з цього приводу можна знайти в [2]. Оператор B називають квадратним коренем оператора A і позначають $B = A^{\frac{1}{2}}$. Достатні умови існування коренів m-го степеня ($m \geq 2$) з елементів банахової алгебри E з одиницею встановлені в [6]. Застосована в [6] методика не містить конструктивного алгоритму для знаходження цих коренів. Дослідженням методів знаходження коренів з матричних поліномів та їх застосуванням присвячені, зокрема, монографії [1]-[3]. У [7] запропоновано методику для обґрунтування існування та практичного знаходження коренів поліномів вигляду

$$F(s) = s^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} A_i s^i \tag{1}$$

та

$$F(s) = s^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} s^i A_i \tag{2}$$

з коефіцієнтами A_i, які належать до банахової алгебри E з одиницею. Зазначена методика використовує ітераційний алгоритм для апроксимації коренів полінома $F(x)$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 41A65, 30B70.
Ключові слова і фрази: банахова алгебра, корені полінома, ітераційні алгоритми, гіллясті дроби.

У пропонованій замітці досліджені ітераційні алгоритми для поліномів (1) та (2). Отримані результати охоплюють результати і з [7] (див. також [4]). Як частковий випадок отримано умови існування та спосіб наближеного знаходження коренів полінома $F(s)$ вигляду

$$F(s) = s^{m+1} - A_0,$$

де $A_0 \in E$. Вони не випливають з результатів [9]-[6]. Ітераційні алгоритми для знаходження $A^{\frac{1}{m+1}}$ не кореспондуються зі способом знаходження $A^{\frac{1}{2}}$, який використовується в [2].

Нехай $A_i\,(i = 0, 1, ..., m)$ є елементами банахової алгебри E з одиницею I і нульовим елементом θ. Розглянемо рівняння

$$F(s) = \theta, \tag{3}$$

вважаючи задля конкретності, що $F(s)$ є поліномом вигляду (1). Задамо попарно різні комплексні числа $\alpha_j\,(j = \overline{1,m})$ припустивши, що вони відмінні від нуля. Позначимо через M множину таких елементів $s \in E$, що числа α_j не є власними числами елементів $s \in M$. Іншими словами M є множиною елементів із E, для яких існують обернені елементи $(s - \alpha_j I)^{-1} \in E$. За цих обставин рівність (3) можна записати у вигляді

$$s = s_0 - F(s)\Phi^{-1}(s) \tag{4}$$

для довільного $s \in M$, де $\Phi(s) = \prod_{j=\overline{1,m}}(s - \alpha_j I)$. Рівність (4) подамо також у вигляді

$$s = s_0 - \sum_{i=\overline{1,m}} K_i(s - \alpha_i I)^{-1}. \tag{5}$$

Очевидно, що має місце тотожність

$$s - F(s)(\prod_{j=\overline{1,m}}(s - \alpha_j I))^{-1} \equiv s_0 - \sum_{i=\overline{1,m}} K_i(s - \alpha_i I)^{-1}. \tag{6}$$

Елементи $K_i\,(i = \overline{1,m})$ та $s_0 \in M$ знаходимо з таких міркувань. Зафіксуємо індекс j і помножимо обидві частини рівності (6) на $(s - \alpha_j I)$. Отримаємо

$$s(s-\alpha_j I) - F(s)\prod_{j=\overline{1,m}}(s-\alpha_j I)^{-1} = s_0(s-\alpha_j I) - K_j - \sum_{i=\overline{1,m},i\neq j} K_i(s-\alpha_i I)^{-1}(s-\alpha_j I). \tag{7}$$

Рівність (7) справджується для всіх $s \in M_j$, де множину M_j отримано з множини M приєднанням до неї елемента $s = \alpha_j I$. З рівності (7) при $s = \alpha_j I$ знаходимо

$$K_j = \frac{1}{\Phi'(\alpha_j)} F(\alpha_j I).$$

Тут $\Phi'(\alpha_j) = \prod_{i=\overline{1,m},i\neq j}(\alpha_j - \alpha_i)$. Оскільки до множини M належить нульовий елемент θ, то з рівності (6) при $s = \theta$ випливає рівність

$$s_0 = -\frac{A_0}{\prod_{i=\overline{1,m}}(-\alpha_i)} - \sum_{i=\overline{1,m}} \frac{F(\alpha_i I)}{\alpha_i \prod_{i=\overline{1,m}, i\neq j}(\alpha_j - \alpha_i)}. \tag{8}$$

Для обчислення s_0 можна скористатися також формулою

$$s_0 = -(A_m + I \sum_{i=\overline{1,m}} \alpha_i),$$

яку можна отримати, якщо після домноження рівності (6) справа на $\Phi(s)$, прирівняти коефіцієнти при s^m.

Отже, рівняння (5) можна подати у вигляді

$$s = -(A_m + I \sum_{i=\overline{1,m}} \alpha_i) - \sum_{i=\overline{1,m}} \frac{1}{\Phi'(\alpha_i)} F(\alpha_i I)(s - \alpha_i I)^{-1}.$$

Нехай $T_0 \in E$, $T_0 \neq \alpha_i I \, (i = \overline{1,m})$ і $\widetilde{M} = \{s : \|s - T_0\| < 1, s \in E\}$. Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$T_{n+1} = s_0 - \sum_{i=\overline{1,m}} K_i (T_n - \alpha_i I)^{-1}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Припустимо, що*

$$T_0 = S_0, T_1 \in \widetilde{M}, \alpha_i \neq 1, \|F(\alpha_i I)\| \leq k_j \Phi'(\alpha_j) \tag{10}$$

$$\sum_{i=\overline{1,m}} \frac{k_i}{(|\alpha_i| - 1)^2} \leq q \leq 1. \tag{11}$$

Тоді існує єдиний в кулі $\widetilde{M}$ розв'язок s^* рівняння (3) з означеним за (1) поліномом $F(s)$ і до s^* збігається не повільніше за геометричну прогресію зі знаменником q послідовність $\{T_n\}$, побудована з допомогою формули (9).

Доведення. На підставі рівності (5) із того, що $s', s'' \in M$, отримаємо

$$s' - s'' = \sum_{i=\overline{1,m}} K_i((s'' - \alpha_i I)^{-1} - (s' - \alpha_i I)^{-1}) = -(s' - s'') \sum_{i=\overline{1,m}} K_i((s' - \alpha_i I)^{-1}(s'' - \alpha_i I)^{-1}. \tag{12}$$

Тому співвідношення (9)-(12) призводять до нерівності

$$\|T_{n+1} - T_n\| \leq q \|T_n - T_{n-1}\|.$$

З умови (11) випливає також, що $T_n \in \widetilde{M}$ для довільного $n = 0, 1, \ldots.$ Отже, перетворення

$$T(s) \equiv s_0 - \sum_{i=\overline{1,m}} K_i (s - \alpha_i I)^{-1}$$

є стиском в $\widetilde{M}$. Це гарантує існування $\lim_{n\to\infty} T_n = s^* \in \widetilde{M}$. Елемент s^* є розв'язком рівняння (3) з означеним за (1) поліномом $F(s)$ і цей розв'язок є єдиним в $\widetilde{M}$. $\square$

Як наслідок з цієї теореми отримуємо наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай*

$$\alpha = \min_{i=\overline{1,m}} |\alpha_i|, k = \max K_i. \tag{13}$$

Якщо $T_o, T_1 \in \widetilde{M}$ *та*

$$\frac{km}{(\alpha-1)^2} \leq q < 1, \tag{14}$$

то послідовність $\{T_n\}$*, побудована за допомогою формули*

$$T_n = s_0 + k(T_n - \alpha I)^{-1}$$

збігається до єдиного розв'язку $s^* \in \widetilde{M}$ *рівняння (3) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q*, означеним за допомогою формул (13), (14). Конструкцію алгоритму (9) можна розглядати як алгоритм побудови гіллястого дробу В.Я. Скоробагатька, який отримується послідовним вкладенням* $(n+1)$*-ої ітерації в* n*-ту. В тому разі, коли* $F(s)$ *є поліномом у числовому полі* E*, зокрема, у полі комплексних чисел* C*, отримуються гіллясті дроби з числовими компонентами.*

Приклад 1. *Застосуємо алгоритм (9) до матричного рівняння* $X^2 - Ax = \theta$*, де*

$$A = \begin{pmatrix} 2,1000 & 0,3000 \\ 0,1000 & 2,2000 \end{pmatrix},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\alpha = 2$*, тоді*

$$s_0 = -A - \alpha I = \begin{pmatrix} 2,1000 & 0,3000 \\ 0,1000 & 2,2000 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1000 & 0,3000 \\ 0,1000 & 0,2000 \end{pmatrix}$$

$$f(\alpha I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,1000 & 0,3000 \\ 0,1000 & 2,2000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2000 & 0,6000 \\ 0,2000 & 0,4000 \end{pmatrix}$$

$$T_0 = s_0, T^{(1)} = \begin{pmatrix} -0,0624 & -0,1186 \\ -0,0023 & -0,0114 \end{pmatrix}, T^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,0194 & 0,168 \\ 0,0139 & 0,0998 \end{pmatrix},$$

$$T^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,0036 & -0,0001 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{pmatrix}$$

Приклад 2. *Для полінома* $F(s) = (s-2)(s-4)(s-10)$ *покладемо* $\alpha_1 = 1,8,\ \alpha_2 = 4,5$*. Тоді* $s_0 = 16 - \alpha_1 - \alpha_2 = 9,7$*. Застосовуючи алгоритм (9), знаходимо такі наближення:* $s_1 = 10,020521; s_2 = 9,998686; s_3 = 10,000084$ *для кореня* $s = 10$ *цього рівняння.*

Приклад 3. *Застосуємо алгоритм (9) для ітераційного уточнення кореня* $s = 2i$ *полінома* $F(s) = (s^2+1)(s^2+4)$*. Приймемо* $\alpha_1 = -0,9i, \alpha_2 = 0,9i, \alpha_3 = -2,1i$*. При* $s_0 = 2,1i$ *перші дві ітерації дають такі наближені уточнення* $s_1 = 2,0075331i, s_2 = 2,0006170i$ *до цього кореня.*

Література

1. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наукова думка, 1981. – 224 с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М: Наука, 1977.– 741 с.
3. Маршус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.
4. Обшта А., Шувар Б. *Гіллясті дроби та ітераційні алгоритми для апроксимації коренів поліномів* // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. – 2009. – С.294-295.
5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М: ЧЛ, 1954. – 589 с.
6. Рудин У. Функциональный анализ. – М: Мир, 1975. – 443 с.
7. Шувар Б.А., Шуляр М.А. *Про нулі полінома із коефіцієнтами із алгебри Банаха* // Вісник Львівського політехнічного інституту. Математика. Механіка.– 1977 – Т.119.
8. Kaczorek T. Polinomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. Springer: Communications and Control Engineering.Dordrecht, 2007. – 503 p.
9. Visser H. *Note on linear operators*, Akad. Wetensch. Anst. Rhoc, **40** (1937), 270-272.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 22.04.2010

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *On applications of iteration algorithms and Skorobagatko's branching fractions to approximation of roots of polynomials in Banach algebras*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 82–86.

Iteration algorithms for approximate factorization of some classes of polynomials with coefficients from a Banach algebra are investigated. These algorithms may be considered as methods of construction of analogues of V.Ya. Skorobagatko's branching fractions in Banach algebras.

Копач М.И., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Применение итерационных алгоритмов и ветвящихся дробей В.Я. Скоробагатька для аппроксимации корней полиномов в банаховых алгебрах* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 82–86.

Исследованы итерационные алгоритмы для приближенной факторизации некоторых классов полиномов с коэффициентами из банаховой алгебры, которые одновременно суть алгоритмы построения аналогов ветвящихся дробей В.Я. Скоробагатька в банаховых алгебрах.

Карпатські математичні
публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.2, №.1

УДК 517.98

Lopushansky O.V., Oleksienko M.V.

A POISSON TYPE FORMULA FOR HARDY CLASSES ON HEISENBERG'S GROUP

Lopushansky O.V., Oleksienko M.V. *A Poisson type formula for Hardy classes on Heisenberg's group*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 87–95.

The Hardy type class of complex functions with infinite many variables defined on the Schrödinger irreducible unitary orbit of reduced Heisenberg group, generated by the Gauss density, is investigated. A Poisson integral type formula for their analytic extensions on an open ball is established. Taylor coefficients for analytic extensions are described by the associated symmetric Fock space.

Introduction

Hardy type spaces $\mathcal{H}^2$ for irreducible representations of locally compact groups were introduced in [4]. In this work we concentrate on an important partial case of such spaces, defined by the Schrödinger irreducible unitary representation of reduced Heisenberg group.

The Hardy type space $\mathcal{H}^2$ on the reduced Heisenberg group $\mathbb{H}$, which acts irreducibly and unitarily over the complex Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$ with the help of Schrödinger's representation, is associated, in according to its definition, with a Gauss type density $\hbar$ on $\mathbb{R}$ and the Haar measure on $\mathbb{H}$. The Schrödinger representation of $\mathbb{H}$ contains the complex cyclic subgroup $\mathbb{T} = \{\tau = e^{\mathrm{i}\vartheta}\colon \vartheta \in [0, 2\pi)\}$, which means that the essential assumption of the work [4] is satisfied. We consider the Poisson type integral representation of analytic functions, belonging to $\mathcal{H}^2$, on the open ball

$$\Omega_{L^2(\mathbb{R})} = \Big\{\xi \in L^2(\mathbb{R})\colon \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})} < 2\sqrt{\pi}\Big\}.$$

The Hilbert space of Taylor coefficients for the space $\mathcal{H}^2$ is unitary equivalent to the Hermitian dual $\Gamma^*(\mathbb{R})$ of the symmetric Fock space $\Gamma(\mathbb{R})$, generated by the complex Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$. The corresponding isometry $\Gamma^*(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{H}^2$ is described in Theorem 2.

We establish in Theorem 3 the Poissson type integral formula

$$\mathfrak{P}[f](\xi) = \int_{\mathbb{H}} \mathfrak{P}\left[\xi, (x, y, \tau)\right] f(x, y, \tau)\ dx\, dy\, d\tau, \qquad \xi \in \Omega_{L^2(\mathbb{R})},$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* primary 46G20; secondary 46E50, 46J15.
Key words and phrases: Infinity-dimensional holomorphy, Poisson kernels, Heisenberg groups.

which for corresponding functions $f \in L^2(\mathbb{H})$, defined on $\mathbb{H}$, produces their unique analytic extensions $\mathfrak{P}[f]$ on $\Omega_{L^2(\mathbb{R})}$.

A theory of Hardy spaces $\mathcal{H}^p$ with $p \geq 1$ of infinitely many variables was advanced in [2]. Many Hardy type spaces on infinite-dimensional Banach domains important in applications have been studied in [6]. Hilbertian Hardy type classes $\mathcal{H}^2$, being reproducing kernel spaces, have been investigated in [5].

We refer for infinite dimensional holomorphy to [3] and for Heisenberg groups to [7].

1 Preliminaries and denotations

Consider the complex space $L^2(\mathbb{R})$ of all quadratically integrable functions on $\mathbb{R}$ with the scalar product $\langle \xi \mid \zeta \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \xi(t)\bar{\zeta}(t)\, dt$ and the norm $\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \xi \mid \xi \rangle^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}$, where $\xi, \zeta \in L^2(\mathbb{R})$. In $L^2(\mathbb{R})$ we consider the orthonormal basis

$$\varphi(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{\varepsilon_j(t)}{\sqrt{2^j j!}}, \qquad \varepsilon_j(t) = (-1)^j e^{t^2} \frac{d^j}{dt^j} e^{-t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

where ε_j denotes the Hermite polynomial of degree j.

Let $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_h^n L^2(\mathbb{R}) = \overline{\operatorname{span}}_{\mathbb{C}} \big\{ \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \colon \xi_1, \ldots, \xi_n \in L^2(\mathbb{R}) \big\}$ be the n-folds Hilbert tensor product of $L^2(\mathbb{R})$ endowed with the scalar product

$$\big\langle \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \bigm| \zeta_1 \otimes \ldots \otimes \zeta_n \big\rangle_{\bigotimes_h^n L^2(\mathbb{R})} = \langle \xi_1 \mid \zeta_1 \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \ldots \langle \xi_n \mid \zeta_n \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

and the norm $\|\omega\|_{\bigotimes_h^n L^2(\mathbb{R})} = \langle \omega \mid \omega \rangle^{1/2}_{\bigotimes_h^n L^2(\mathbb{R})}$ with $\omega \in \bigotimes_h^n L^2(\mathbb{R})$. Then the set of elements $\big\{ \varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_n} \colon (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}_+^n \big\}$ forms the Hermite orthonormal basis in $\bigotimes_h^n L^2(\mathbb{R})$. If $\mathfrak{s} \colon \{1, \ldots, n\} \longmapsto \{\mathfrak{s}(1), \ldots, \mathfrak{s}(n)\}$ runs through all n-elements permutations, then the codomain of the orthogonal projector

$$\mathfrak{s}_n \colon \bigotimes\nolimits_h^n L^2(\mathbb{R}) \ni \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \longmapsto \xi_1 \odot \ldots \odot \xi_n := \frac{1}{n!} \sum\nolimits_{\mathfrak{s}} \xi_{\mathfrak{s}(1)} \otimes \ldots \otimes \xi_{\mathfrak{s}(n)},$$

called a symmetric Hilbertian tensor power of $L^2(\mathbb{R})$, we denote by $\bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})$. A symmetric Fock space is defined as the orthogonal sum

$$\Gamma := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \big[\bigodot\nolimits_h^n L^2(\mathbb{R}) \big], \qquad \bigodot\nolimits_h^0 L^2(\mathbb{R}) = \mathbb{C},$$

with the scalar product and norm, respectively

$$\langle \psi \mid \omega \rangle_\Gamma = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \langle \psi_n \mid \omega_n \rangle_{\bigotimes_h^n L^2(\mathbb{R})}, \qquad \|\psi\|_\Gamma = \langle \psi \mid \psi \rangle^{1/2}_\Gamma,$$

where $\psi = \sum_n \psi_n, \ \omega = \sum_n \omega_n \in \Gamma$ and $\psi_n, \omega_n \in \bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})$. We will use the following short denotations

$$\xi^{\otimes n} := \xi \otimes \ldots \otimes \xi \in \bigodot\nolimits_h^n L^2(\mathbb{R}) \quad \text{with} \quad \xi \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$(k) := (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |(k)| := k_1 + \cdots + k_n, \quad (k)! := k_1! \ldots k_n!.$$

Consider the systems of elements

$$\Phi_n = \left\{\varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \in \bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})\colon (j),(k) \in \mathbb{Z}_+^n,\ |(k)| = n\right\}, \qquad \Phi = \left\{\Phi_n\colon\ n \in \mathbb{Z}_+\right\},$$

where we denote $\varphi_{(j)}^{\otimes(k)} := \varphi_{j_1}^{\otimes k_1} \odot \ldots \odot \varphi_{j_n}^{\otimes k_n}$ and $\varphi_{(j)}^{\otimes(k)} = 1$ for all (j) if $n = |(k)| = 0$. As is known (see e.g. [1, 2.2.2]), the system Φ forms an orthogonal basis in the symmetric Fock space Γ such that $\|\varphi_{(j)}^{\otimes(k)}\|_{\Gamma(\mathbb{R})} = \sqrt{(k)!/|(k)|!}$ (see e.g. [1, 2.2.2]).

In what follows $\mathbb{H} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ will stands for a reduced Heisenberg group with the multiplication

$$(x,y,e^{\mathrm{i}\vartheta})\cdot(u,v,e^{\mathrm{i}\eta}) = \left(x+u, y+v, e^{\mathrm{i}(\vartheta+\eta)}e^{\mathrm{i}(yu-xv)/2}\right)$$

endowed with the Haar measure $dx\,dy\,d\tau$, where $2\pi d\tau = d\vartheta$.

Let $L^2(\mathbb{H})$ be the space of all quadratically Haar integrable complex functions f on $\mathbb{H}$ with the norm $\|f\|_{L^2(\mathbb{H})} = \left(\int_{\mathbb{H}} |f(x,y,\tau)|^2\,dx\,dy\,d\tau\right)^{1/2}$ and let $L^\infty(\mathbb{H})$ be the space of all essentially bounded complex functions on $\mathbb{H}$.

The Schrödinger representation U from $\mathbb{H}$ into the C^*-algebra $\mathscr{L}\left(L^2(\mathbb{R})\right)$ of bounded linear operators on $L^2(\mathbb{R})$ has the form

$$U_{x,y,\tau}\xi(t) = \tau e^{\mathrm{i}xy/2}e^{\mathrm{i}yt}\xi(t+x), \qquad x,y,t\in\mathbb{R}, \quad \tau\in\mathbb{T}, \quad \xi\in L^2(\mathbb{R}).$$

It is unitary and irreducible. Easy to see that its codomain $U(\mathbb{H}) = \left\{U_{x,t,\tau}\colon (x,t,\tau)\in\mathbb{H}\right\}$ contains the cyclic group $\mathbb{T}$. Moreover, due to the Stone-von Neumann Theorem every irreducible unitary representation $\tilde U$ of $\mathbb{H}$ on a Hilbert space H, such that $\tilde U(0,0,\tau)\xi = \tau\xi$ for all $\tau\in\mathbb{T}$ and $\xi\in H$, is unitarily equivalent to the Schrödinger representation U.

Lemma 1.1. *The Gauss density function*

$$\hbar(t) := \pi^{-1/4}e^{-t^2/2}, \qquad t\in\mathbb{R}$$

has the property $\hbar \in L^2(\mathbb{R})\bigcap L^\infty(\mathbb{H})$ *and each basis element* $\varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \in \Phi$ *generates the continuous function*

$$\mathbb{H}\ni(x,y,\tau)\longmapsto \left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n} \mid \varphi_{(j)}^{\otimes(k)}\right\rangle_\Gamma = \langle U_{x,y,\tau}\hbar \mid \varphi_{j_1}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}^{k_1}\ldots\langle U_{x,y,\tau}\hbar \mid \varphi_{j_n}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}^{k_n} \tag{1}$$

which belongs to $L^2(\mathbb{H})$ *and for all* $(j)\in\mathbb{Z}_+^n$ *and* $(k)\in\mathbb{Z}_+^n$ *such that* $|(k)| = n$,

$$\left(\int_{\mathbb{H}}\left|\left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n} \mid \varphi_{(j)}^{\otimes(k)}\right\rangle_\Gamma\right|^2 dx\,dy\,d\tau\right)^{1/2} \le \sqrt{\frac{2^n\pi^{2+n}}{n}}. \tag{2}$$

Proof. We have $\hbar\in L^2(\mathbb{R})\bigcap L^\infty(\mathbb{H})$, since

$$\|\hbar\|_{L^\infty(\mathbb{H})} = \|\hbar\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{t\in\mathbb{R}}|\hbar(t)| = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}, \qquad \|\hbar\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt[4]{\pi}}\right|^2 dt\right)^{1/2} = 1.$$

Applying the Fourier transformation by the variable $t\in\mathbb{R}$, we can define a linear mapping $\hbar*\colon L^2(\mathbb{R})\longrightarrow L^2(\mathbb{H})$ in the following form

$$\begin{aligned}(\hbar*\varphi_j)(x,y,\tau) &:= \left\langle U_{x,y,\tau}\hbar \mid \varphi_j\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{\tau e^{\mathrm{i}xy/2}}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^j j!}}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}yt}\left[e^{-(x+t)^2/2}e^{-t^2/2}\varepsilon_j(t)\right]dt \\ &= \sqrt{2\pi}\frac{\tau e^{\mathrm{i}xy/2}}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^j j!}}(-1)^j(x-\mathrm{i}y)^j e^{-x^2/2+(x-\mathrm{i}y)^2/4}\end{aligned} \tag{3}$$

for any $\varphi_j \in \Phi_1$ and $j \in \mathbb{Z}_+$. For all (k) such that $|(k)| = n$ it follows

$$\left|\left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n} \mid \varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \right\rangle_\Gamma\right|^2 \le \left(2\sqrt{\pi}\right)^n e^{-n(x^2+y^2)/2} \prod_{l=1}^{n} \left[\frac{(x^2+y^2)^{j_l}}{2^{j_l}(j_l)!}\right]^{k_l}.$$

For any $u \ge 0$ and $j \in \mathbb{Z}_+$ we have

$$e^{-u}\frac{u^j}{j!} = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} (-1)^m \frac{(j+m)!}{j!m!} \frac{u^{j+m}}{(j+m)!} \le \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} (-1)^m 2^{j+m} \frac{u^{j+m}}{(j+m)!} \le e^{-2u}.$$

Since $|(k)| = n$ it follows that

$$\prod_{l=1}^{n} \left(e^{-u}\frac{u^{j_l}}{j_l!}\right)^{k_l} \le \prod_{l=1}^{n} \left(e^{-2u}\right)^{k_l} = e^{-2nu}.$$

Substituting above instead of u the polynomial $(x^2+y^2)/2$ we obtain

$$\left|\left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n} \mid \varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \right\rangle_\Gamma\right|^2 \le \left(2\sqrt{\pi}\right)^n \prod_{l=1}^{n} \left[e^{-(x^2+y^2)/2}\frac{(x^2+y^2)^{j_l}}{2^{j_l}(j_l)!}\right]^{k_l} \le \left(2\sqrt{\pi}\right)^n e^{-n(x^2+y^2)}.$$

As a consequence, the functions (1) belong to $L^2(\mathbb{H})$. The estimation (2) we immediately obtain by integrating the last inequality on $\mathbb{H}$. □

2 The main unitary isometry

Since the Schrödinger unitary representation of $\mathbb{H}$ over $L^2(\mathbb{R})$ contains the complex cyclic subgroup $\mathbb{T}$, we can apply the general result of [4] to the case of reduced Heisenberg group.

Definition 2.1. *The closure in $L^2(\mathbb{H})$ of the complex linear span of all functions (1), generated by the Fock symmetric basis Φ $\big($respectively by Φ_n with $n \in \mathbb{N}\big)$, we will denote by $\mathcal{H}^2$ $\big($respectively by $\mathcal{H}^2_n\big)$.*

Now we consider the unitary representation of the diagonal form

$$U^{\otimes n}\colon \mathbb{H} \ni (x,y,\tau) \longmapsto U^{\otimes n}_{x,y,\tau} \in \mathscr{L}\big({\textstyle\bigodot_h^n} L^2(\mathbb{R})\big) \quad \text{with} \quad U^{\otimes n}_{x,y,\tau} := {\textstyle\bigotimes^n} U_{x,y,\tau}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

where $U^{\otimes 0}$ is the unit in $\mathbb{C}$ and $\mathscr{L}\big(\bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})\big)$ denotes the C^*-algebra of all bounded linear operators on $\bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})$.

The next axillary statements immediately follow from [4] and the previous Lemma 1.1.

Lemma 2.1. (i) *The unitary representation $U^{\otimes n}$ is irreducible for any $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *For any $\varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \in \Phi$ with $|(k)| = n$ the constants*

$$\aleph_n := \sqrt{\frac{(k)!}{n!}} \left(\int_{\mathbb{H}} \left|\left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|} \mid \varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \right\rangle_\Gamma\right|^2 dx\,dy\,d\tau\right)^{-1/2} \tag{4}$$

are dependent on an index $n \in \mathbb{N}$ but independent of indexes $(j),(k) \in \mathbb{Z}_+^n$.

(iii) *For any element* $\psi_n \in \bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})$ *uniquely corresponds the function*

$$\widehat{\psi}_n \colon \mathbb{H} \ni (x,y,\tau) \longmapsto \widehat{\psi}_n(x,y,\tau) := \aleph_n \left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n} \mid \psi_n \right\rangle_\Gamma ,$$

which belongs to $\mathcal{H}^2$, *and the equality*

$$\int_{\mathbb{H}} \widehat{\psi}_n(x,y,\tau)\overline{\widehat{\omega}}_n(x,y,\tau)\, dx\, dy\, d\tau = \left\langle \omega_n \mid \psi_n \right\rangle_\Gamma , \qquad \psi_n, \omega_n \in \bigodot_h^n L^2(\mathbb{R}), \tag{5}$$

holds. The mapping of the form

$$\mathfrak{h} \colon \bigodot_h^n L^2(\mathbb{R}) \ni \psi_n \longmapsto \widehat{\psi}_n \in \mathcal{H}_n^2 \tag{6}$$

is an antilinear unitary equivalence between $\bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})$ *and* $\mathcal{H}_n^2$. *The following inequality holds for all* $\psi_n, \omega_n \in \bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{H}} \left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n} \mid \psi_n \right\rangle_\Gamma \overline{\left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n} \mid \omega_n \right\rangle_\Gamma} dx\, dy\, d\tau \right| \\ \le n!(n-1)!\, 2^n \pi^{1+n/2} \|\psi_n\|_\Gamma \|\omega_n\|_\Gamma .\end{aligned} \tag{7}$$

Proof. Elements $\psi_n, \omega \in \bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})$ present in the form of their Fourier decompositions on the orthogonal basis Φ_n,

$$\psi_n = \sum_{(k),(j)\in\mathbb{Z}_+^n} \alpha_{(j)}^{(k)} \varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \frac{n!}{(k)!}, \qquad \omega_n = \sum_{(m),(i)\in\mathbb{Z}_+^n} \beta_{(i)}^{(m)} \varphi_{(i)}^{\otimes(m)} \frac{n!}{(m)!}$$

with the Fourier coefficients $\alpha_{(j)}^{(k)}, \beta_{(i)}^{(m)} \in \mathbb{C}$, where $|(k)| = |(m)| = n$. Hence,

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\mathbb{H}} \left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|} \mid \psi_n \right\rangle_\Gamma \overline{\left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|} \mid \omega_n \right\rangle_\Gamma} dx\, dy\, d\tau \right| \\ &\le \sum |\alpha_{(j)}^{(k)} \beta_{(i)}^{(m)}| \frac{n!^2}{(k)!(m)!} \left| \int_{\mathbb{H}} \left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|} \mid \varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \right\rangle_\Gamma \overline{\left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|} \mid \varphi_{(i)}^{\otimes(m)} \right\rangle_\Gamma} dx\, dy\, d\tau \right| .\end{aligned}$$

Applying the Cauchy-Schwarz inequality, we obtain

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{(k),(j)\\(m),(i)}} |\alpha_{(j)}^{(k)} \beta_{(i)}^{(m)}| \frac{n!^2}{(k)!(m)!} \left| \int_{\mathbb{H}} \left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|} \mid \varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \right\rangle_\Gamma \overline{\left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|} \mid \varphi_{(i)}^{\otimes(m)} \right\rangle_\Gamma} dx\, dy\, d\tau \right| \\ &\qquad \le \sum_{(k),(j),(m),(i)} |\alpha_{(j)}^{(k)} \beta_{(i)}^{(m)}| \frac{n!^2}{(k)!(m)!} \\ &\times \left(\int_{\mathbb{H}} \left| \left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n} \mid \varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \right\rangle_\Gamma \right|^2 dx\, dy\, d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{H}} \left| \left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n} \mid \varphi_{(j)}^{\otimes(k)} \right\rangle_\Gamma \right|^2 dx\, dy\, d\tau \right)^{1/2} .\end{aligned}$$

Applying the inequality (2) and the Cauchy-Schwarz inequality one more, we have

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{H}} \left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|} \mid \psi_n \right\rangle_\Gamma \overline{\left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|} \mid \omega_n \right\rangle_\Gamma} dx\, dy\, d\tau \right| &\le \frac{\pi\, (2\sqrt{\pi})^n}{n} \sum |\alpha_{(j)}^{(k)} \beta_{(i)}^{(m)}| \frac{n!^2}{(k)!(m)!} \\ &\le \frac{\pi\, (2\sqrt{\pi})^n}{n} \left(\sum |\alpha_{(j)}^{(k)}|^2 \frac{n!^2}{(k)!^2} \right)^{1/2} \left(\sum |\beta_{(i)}^{(m)}|^2 \frac{n!^2}{(m)!^2} \right)^{1/2} .\end{aligned}$$

It follows (7), as $\max\limits_{(k)\in\mathbb{Z}_+^n}\dfrac{n!}{(k)!}=\max\limits_{(m)\in\mathbb{Z}_+^n}\dfrac{n!}{(m)!}=n!$ and $\|\psi_n\|_\Gamma^2=\sum\limits_{(k),(j)}\big|\alpha_{(j)}^{(k)}\big|^2\dfrac{n!}{(k)!}$, $\|\omega_n\|_\Gamma^2=\sum\limits_{(m),(i)}\big|\beta_{(i)}^{(m)}\big|^2\dfrac{n!}{(m)!}$. So, the integral $\int_{\mathbb{H}}\big\langle(U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|}\mid\psi_n\big\rangle_\Gamma\overline{\big\langle(U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes|(k)|}\mid\omega_n\big\rangle_\Gamma}dx\,dy\,d\tau$ is a Hermitian bounded form on $\bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})$, which is antilinear by $\psi_n\in\bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})$ and linear by $\omega_n\in\bigodot_h^n L^2(\mathbb{R})$. Therefore, the statements (i) and (iii) directly follow from [4]. □

Let us consider properties of the systems

$$\widehat{\Phi}:=\Big\{\widehat{\Phi}_n\colon n\in\mathbb{Z}_+\Big\},\qquad \widehat{\Phi}_n:=\Big\{\widehat{\varphi}_{(j)}^{(k)}\colon\ (j),(k)\in\mathbb{Z}_+^n,\ |(k)|=n\Big\},$$

which is generated by the orthogonal basis Φ of the Fock space Γ, and where is denoted

$$\widehat{\varphi}_{(j)}^{(k)}:=\widehat{\varphi_{(j)}^{\otimes(k)}}\quad\text{with}\quad \widehat{\varphi_{(j)}^{\otimes(k)}}(x,y,\tau)=\aleph_{|(k)|}\big\langle U_{x,y,\tau}\hbar\mid\varphi_{j_1}\big\rangle_{L^2(\mathbb{R})}^{k_1}\ldots\big\langle U_{x,y,\tau}\hbar\mid\varphi_{j_n}\big\rangle_{L^2(\mathbb{R})}^{k_n}$$

with $\aleph_0=1$. Using that the Schrödinger representation U of $\mathbb{H}$ contains the cyclic subgroup $\mathbb{T}$, we similarly to [4] obtain the following.

Theorem 1. *The system $\widehat{\Phi}$ forms an orthogonal basis in $\mathcal{H}^2$ and the subsystem $\widehat{\Phi}_n$ does so in $\mathcal{H}_n^2$. If $m\neq n$ then $\mathcal{H}_m^2$ is orthogonal to $\mathcal{H}_n^2$ in $L^2(\mathbb{H})$ and the orthogonal Hilbertian decomposition*

$$\mathcal{H}^2=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{H}_n^2,\qquad \mathcal{H}_0^2=\mathbb{C},$$

holds. The surjective mapping $\big($which is a linear extension of (6)$\big)$

$$\mathfrak{h}\colon\Gamma\ni\psi=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\psi_n\longmapsto\widehat{\psi}=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\widehat{\psi}_n\in\mathcal{H}^2,\tag{8}$$

where $\widehat{\psi}_0=\psi_0\in\mathbb{C}$, realizes an antilinear unitary equivalence between the Fock space Γ and the space $\mathcal{H}^2$. Moreover, the following equality holds

$$\int_{\mathbb{H}}\widehat{\psi}(x,y,\tau)\overline{\widehat{\omega}}(x,y,\tau)\,dx\,dy\,d\tau=\big\langle\omega\mid\psi\big\rangle_\Gamma,\qquad \psi,\omega\in\Gamma.\tag{9}$$

3 Integral formulas for analytic extensions

Lemma 3.1. *For any function $f=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}f_n\in\mathcal{H}^2$ with $f_n\in\mathcal{H}_n^2$ its integral transform*

$$\mathfrak{C}[f](\xi)=\int_{\mathbb{H}}\mathfrak{C}\left[\xi,(x,y,\tau)\right]f(x,y,\tau)\ dx\,dy\,d\tau,\qquad \xi\in\Omega_{L^2(\mathbb{R})},\tag{10}$$

with the Cauchy type reproducing kernel of the form

$$\mathfrak{C}\left[\xi,(x,y,\tau)\right]=1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{2^{1+n}\pi^{1+3n/4}}\left[\tau e^{\mathrm{i}xy}\int_{\mathbb{R}}\xi(t)e^{\mathrm{i}yt-(t+x)^2/2}\,dt\right]^n,\qquad (x,y,\tau)\in\mathbb{H},\tag{11}$$

is a unique analytic extension of f on $\Omega_{L^2(\mathbb{R})}$ with the Taylor coefficients at the origin

$$\frac{d_0^n\mathfrak{C}[f](\xi)}{n!}=\frac{n}{2^{1+n}\pi^{1+3n/4}}\int_{\mathbb{H}}\left[\tau e^{\mathrm{i}xy}\int_{\mathbb{R}}\xi(t)e^{\mathrm{i}yt-(t+x)^2/2}\,dt\right]^n f_n(x,y,\tau)\ dx\,dy\,d\tau,\tag{12}$$

where $\xi\in L^2(\mathbb{R})$ and $n\in\mathbb{N}$.

Proof. Applying the property that $\aleph_n$ is independent on indexes $(j),(k)\in\mathbb{Z}_+^n$ and after the formula (3) at $j=0$, we conclude that these constants can be calculated by the formulas

$$\begin{aligned}\aleph_n^{-2} &= \frac{n!}{n!}\int_{\mathbb{H}} \left|\left\langle (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n} \mid \varphi_0^{\otimes n}\right\rangle_\Gamma\right|^2 dx\,dy\,d\tau = \int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2+(x-\mathrm{i}y)^2/4}\right|^{2n} dx\,dy\\ &= \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-ny^2/2}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\,dy = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}}\right)^n\frac{2\pi}{n} = \frac{2^{1+n}\pi^{1+n/2}}{n}.\end{aligned}$$

It follows that the radius of convergence of the power series (12) is the inverse of

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\aleph_n^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^{1+n}\pi^{1+n/2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Therefore the power series of the form

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}\left[\cdot,(x,y,\tau)\right]:\xi\longmapsto & 1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{2^{1+n}\pi^{1+n/2}}\left\langle \xi \mid U_{x,y,\tau}\hbar\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}^n\\ &= 1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{2^{1+n}\pi^{1+n/2}}\left[\frac{\tau e^{\mathrm{i}xy}}{\sqrt[4]{\pi}}\int_{\mathbb{R}}\xi(t)e^{\mathrm{i}yt-(t+x)^2/2}\,dt\right]^n\end{aligned}$$

is an analytic $L^\infty(\mathbb{H})$-valued function by the variable $\xi\in\Omega_{L^2(\mathbb{R})}$. For any function $f\in L^2(\mathbb{H})$ the linear functional $F\colon L^\infty(\mathbb{H})\ni g\longmapsto\int_{\mathbb{H}}fg\,dx\,dy\,d\tau$ is continuous. Since $\mathfrak{C}[f](\xi) = F\circ\mathfrak{C}(\xi,\cdot)$, the function $\mathfrak{C}[f]$, determined by the formula (10), is analytic by $\xi\in\Omega_{L^2(\mathbb{R})}$ in view of [3, 3.1.2]. Therefore, differentiating $\mathfrak{C}[f]$ in the formula (10) at the origin, we obtain

$$\frac{d_0^n\mathfrak{C}[f](\xi)}{n!} = \frac{n}{2^{1+n}\pi^{1+n/2}}\int_{\mathbb{H}}\left\langle \xi^{\otimes n} \mid (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n}\right\rangle_\Gamma f_n(x,y,\tau)\;dx\,dy\,d\tau = \mathfrak{C}[f_n](\xi)$$

for all $\xi\in\Omega_{L^2(\mathbb{R})}$. By the Cauchy-Schwarz inequality

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{C}[f_n](\xi)\right| &\le \frac{n}{2^{1+n}\pi^{1+n/2}}\int_{\mathbb{H}}\left|\left\langle \xi^{\otimes n} \mid (U_{x,y,\tau}\hbar)^{\otimes n}\right\rangle_\Gamma f_n(x,y,\tau)\right|\,dx\,dy\,d\tau\\ &\le \frac{n}{2^{1+n}\pi^{1+n/2}}\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})}^n\|f_n\|_{L^2_\chi(\mathbb{H})}\qquad\text{for all}\qquad \xi\in L^2(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Hence, every element $f_n\in\mathcal{H}_n^2$ has a unique continuous extension to a n-homogenous polynomial $\mathfrak{C}[f_n]$ defined on $L^2(\mathbb{R})$, which takes the form (12). As is known [3, 2.4.2], continuous Taylor coefficients uniquely define the analytic function $\mathfrak{C}[f]$ on $\Omega_{L^2(\mathbb{R})}$. So, uniqueness of the analytic extension $\mathfrak{C}[f]$ is proved. □

Definition 3.1. *Following to [4] we mean the space of analytic functions*

$$\mathcal{H}^2\left(\Omega_{L^2(\mathbb{R})}\right) := \left\{\mathfrak{C}[f]\colon f\in\mathcal{H}^2\right\},$$

defined by the formula (10) *with the finite norm*

$$\|\mathfrak{C}[f]\|_{\mathcal{H}^2} := \sup_{r\in[0,1)}\left(\int_{\mathbb{H}}\left|\mathfrak{C}[f](rU_{x,y,\tau}\hbar)\right|^2\,dx\,dy\,d\tau\right)^{1/2},$$

the Hardy type space associated with the Heisenberg group $\mathbb{H}$ and the Gaussian density $\hbar$.

Applying Lemma 3.1 similarly to [4] we can prove the following statement.

Theorem 2. *The following is an antilinear surjective isometry*

$$(\mathfrak{C}\circ\mathfrak{h})\colon \Gamma\ni\psi\longmapsto \mathfrak{C}[\widehat{\psi}]\in\mathcal{H}^2\left(\Omega_{L^2(\mathbb{R})}\right).$$

Now consider an analogue of analytic extension in a Poisson form. For this purpose we need the positive function

$$\mathfrak{C}(\xi,\xi)=1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{2^{1+n}\pi^{1+n/2}}\|\xi\|^{2n}_{L^2(\mathbb{R})},\qquad \xi\in\Omega_{L^2(\mathbb{R})},$$

where the series is convergent by Lemma 3.1.

Theorem 3. *The integral transform*

$$\mathfrak{P}[f](\xi):=\int_{\mathbb{H}}\mathfrak{P}\left[\xi,(x,y,\tau)\right]f(x,y,\tau)\;dx\,dy\,d\tau,\qquad f\in\mathcal{H}^2$$

with the Poisson type reproducing kernel

$$\mathfrak{P}\left[\xi,(x,y,\tau)\right]:=\frac{\left|\mathfrak{C}\left[\xi,(x,y,\tau)\right]\right|^2}{\mathfrak{C}(\xi,\xi)}>0,\qquad \xi\in\Omega_{L^2(\mathbb{R})},\quad (x,y,\tau)\in\mathbb{H}$$

satisfies the equalities

$$\mathfrak{P}[f]=\mathfrak{C}[f],\qquad \mathfrak{P}\left[\operatorname{Re}f\right]=\operatorname{Re}\mathfrak{C}[f].$$

Proof. If we put $g(x,y,\tau):=\dfrac{\overline{\mathfrak{C}}\left[\xi,(x,y,\tau)\right]}{\mathfrak{C}(\xi,\xi)}f(x,y,\tau)$ with $\xi\in\Omega_{L^2(\mathbb{R})}$, then $g\in\mathcal{H}^2$, since the function $\dfrac{\mathfrak{C}\left[\xi,(x,y,\tau)\right]}{\mathfrak{C}(\xi,\xi)}$ is uniformly bounded by the variables $(x,y,\tau)\in\mathbb{H}$ for any fixed element $\xi\in\Omega_{L^2(\mathbb{R})}$ via Lemma 3.1. For instance, we obtain $\mathfrak{C}[f](\xi)=\mathfrak{C}[g](\xi)$. Therefore,

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}[f](\xi)&=\int_{\mathbb{H}}\mathfrak{C}\left[\xi,(x,y,\tau)\right]g(x,y,\tau)\;d\chi(x,y,\tau)\\&=\int_{\mathbb{H}}\mathfrak{P}\left[\xi,(x,y,\tau)\right]f(x,y,\tau)\;d\chi(x,y,\tau)=\mathfrak{P}[f](\xi)\end{aligned}$$

via Theorem 3.1, that it was necessary to prove. □

REFERENCES

1. Berezanski Yu.M., Kondratiev Yu.G. Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

2. Cole B., Gamelin T.W. *Representing measures and Hardy spaces for the infinite polydisk algebra*, Proc. London Math. Soc., **53** (1986), 112-142.

3. Hervé M. Analyticity in Infinite Dimensional Spaces, de Gruyter Stud. in Math., vol. 10, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1989.

4. Lopushansky O. *Hardy spaces for irreducible representations of locally compact groups*, Topology, **48**, 2–4 (2009), 169–177.

5. Lopushansky O.V., Zagorodnyuk A.V. *Representing measures and infinite-dimensional holomorphy*, J. Math. Anal. & App., **333**, 2 (2007), 614–625.

6. Pinasco D., Zalduendo I. *Integral representations of holomorphic functions on Banach spaces*, J. Math. Anal. & Appl., **308** (2005), 159–174.

7. Thangavelu S. Harmonic Analysis on the Heisenberg Group, Progress in Math. 159, Birkhauser, Boston, 1998.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Lviv, Ukraine.

Received 7.06.2010

Revised 5.09.2010

Лопушанський О.В., Олексієнко М.В. *Формула типу Пуассона для класів Харді на групах Хейзенберґа* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 87–95.

Досліджується клас типу Харді комплексних функцій нескінченої кількості змінних, визначених на унітарній орбіті породженій ґауссівською функцією густини при незвідному представленні Шредінґера редукованої групи Хейзенберґа. Встановлено інтегральну формулу типу Пуассона для їх аналітичних розширень у відкриту кулю. Коефіцієнти Тейлора аналітичних розширень описано за допомогою симетричних просторів Фока.

Лопушанский О.В., Олексиенко М.В. *Формула типа Пуассона для классов Харди на группах Хейзенберга* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 87–95.

Исследуется класс типа Харди комплексных функций бесконечного числа переменных, определённых на унитарной орбите порождённой гауссовской функцией плотности при неприводимом представлении Шрёдингера редуцированной группы Хейзенберга. Установлено интегральную формулу типа Пуассона для их аналитических расширений в открытую кулю. Коэффициєнты Тейлора аналитичесних расширений описаны при помощи ассоциированых симметрических пространств Фока.

Карпатські математичні
публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.2, №.1

УДК 515.12+512.58

Prykarpatsky A.K.[1], Artemovich O.D.[2], Popowicz Z.[3], Pavlov M.V.[4]

RIEMANN TYPE ALGEBRAIC STRUCTURES AND THEIR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC INTEGRABILITY ANALYSIS

Prykarpatsky A.K., Artemovich O.D., Popowicz Z., Pavlov M.V. *Riemann type algebraic structures and their differential-algebraic integrability analysis*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 96–108.

The differential-algebraic approach to studying the Lax type integrability of generalized Riemann type equations is devised. The differentiations and the associated invariant differential ideals are analyzed in detail. The approach is also applied to studying the Lax type integrability of the well known Korteweg-de Vries dynamical system.

1 Introduction

Nonlinear hydrodynamic equations are of constant interest since the classical works by B. Riemann in the general three-dimensional case, having paid special attention to their one-dimensional spatial reduction, for which he devised the generalized method of characteristics and Riemann invariants. These methods appeared to be very effective [21, 15] in investigating many types of nonlinear spatially one-dimensional systems of hydrodynamical type and, in particular, the characteristics method in the form of a "reciprocal" transformation of variables has been used recently in studying the so called Gurevich-Zybin system [6, 5] in [13] and the Whitham type system in [17, 2, 19]. Moreover, this method was further effectively applied to studying solutions to a generalized [4] (owing to D. Holm and M. Pavlov) Riemann type hydrodynamical system

$$D_t^N u = 0, \quad D_t := \partial/\partial t + u\partial/\partial x, \quad N \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

where $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ is a smooth function. The case $N = 2$ was recently analyzed in detail in [2, 4] making use of the standard symplectic theory techniques. In particular, there was demonstrated that the Riemann type hydrodynamical system (1) at $N = 2$, looking upon putting $z := D_t u$ equivalently as

$$\left.\begin{array}{r} u_t = z - uu_x \\ z_t = -uz_x \end{array}\right\}, \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 13N15, 12H05,12H10,37K10.
Key words and phrases: Differential-algebraic structures, Lax type integrability, invariant differential ideals, generalized Riemann type equations.

allows the following Lax type representation

$$\begin{gathered}\partial f/\partial x = \ell[u,z;\lambda]f, \quad \partial f/\partial t = p(\ell)f, \qquad p(\ell) := -u\ell[u,z;\lambda] + q(\lambda), \\ \ell[u,z;\lambda] := \begin{pmatrix} -\lambda u_x & -z_x \\ 2\lambda^2 & \lambda u_x \end{pmatrix}, \quad q(\lambda) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \\ p(\ell) = \begin{pmatrix} \lambda u_x u & z_x u \\ -\lambda - 2\lambda^2 u & -\lambda u_x u \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{3}$$

where $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ is an arbitrary spectral parameter. Making use of a method devised in [16, 11, 7] and based on the spectral theory and related very complicated symplectic theory relationships in [4, 2, 14] the corresponding Lax type representations for the cases $N = 3, 4$ were constructed in explicit form.

In this work a new and very simple differential-algebraic approach to studying the Lax type integrability of the generalized Riemann type hydrodynamic equations at $N = 3, 4$ is devised. It can be easily generalized for treating the problem for arbitrary integers $N \in \mathbb{Z}_+$. The approach is also applied to studying the Lax type integrability of the well known Korteweg-de Vries dynamical system.

2 The differential-algebraic description of the Lax type integrability of generalized Riemann type hydrodynamical equation at $N = 3$ and 4

2.1 *The differential-algebraic preliminaries*

Take the ring $\mathcal{K} := \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, of convergent germs of real-valued smooth functions from $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ and construct [18, 9, 20, 3] the associated differential polynomial ring $\mathcal{K}\{u\} := \mathcal{K}[\Theta u]$ with respect to a functional variable u, where Θ denotes the standard monoid of all operators generated by commuting differentiations $\partial/\partial x := D_x$ and $\partial/\partial t$. The ideal $I\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$ is called [18, 9] differential if the condition $I\{u\} = \Theta I\{u\}$ holds.

Consider now the additional differentiation

$$D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}, \tag{4}$$

depending on the functional variable u, which satisfies the Lie-algebraic commutator condition

$$[D_x, D_t] = (D_x u) D_x, \tag{5}$$

for all $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. As a simple consequence of (5) the following general (suitably normalized) *representation* of the differentiation (4)

$$D_t = \partial/\partial t + u\partial/\partial x \tag{6}$$

in the differential ring $\mathcal{K}\{u\}$ holds. Impose now on the differentiation (4) a new Riemann type algebraic constraint

$$D_t^N u = 0, \tag{7}$$

defining some smooth functional set (or "*manifold*") $\mathcal{M}^{(N)}$ of functions $u \in \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$, and which allows to reduce naturally the initial ring $\mathcal{K}\{u\}$ to the basic ring $\mathcal{K}\{u\}|_{\mathcal{M}_{(N)}} \subseteq$

$\mathbb{R}\{\{x,t\}\}$. In this case the following natural problem of constructing the corresponding representation of differentiation (4) arises: *to find an equivalent linear representation of the reduced differentiation* $D_t|_{\mathcal{M}_{(N)}} : \mathbb{R}^{p(N)}\{\{x,t\}\} \to \mathbb{R}^{p(N)}\{\{x,t\}\}$ *in the functional vector space* $\mathbb{R}^{p(N)}\{\{x,t\}\}$ *for some specially chosen integer dimension* $p(N) \in \mathbb{Z}_+$.

As it will be shown below for the cases $N = 3$ and $N = 4$, this problem is completely analytically solvable, giving rise to the corresponding Lax type integrability of the generalized Riemann type hydrodynamical system (1). Moreover, the same problem is also solvable for the more complicated constraint

$$D_t u - D_x^3 u = 0, \tag{8}$$

equivalent to the well known Lax type integrable nonlinear Korteweg-de Vries dynamical system.

2.2 The generalized Riemann type hydrodynamical equation: the case N=3

To proceed with analyzing the above formulated representation problem for the generalized Riemann type equation (7) at $N = 3$, we first construct an adjoint to the differential ring $\mathcal{K}\{u\}$ and invariant with respect to differentiation (6) so called "Riemann differential ideal" $R\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$ as

$$\begin{aligned} R\{u\} \; &:= \; \left\{ \lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(1)} D_x^n u - \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(2)} D_t D_x^n u + \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(3)} D_t^2 D_x^n u : D_t^3 u = 0, \right. \\ f_n^{(k)} \; &\in \; \left. \mathcal{K}\{u\}, k = \overline{1,3}, n \in \mathbb{Z}_+ \right\} \subset \mathcal{K}\{u\}, \end{aligned} \tag{9}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ is an arbitrary parameter, and formulate the following simple but important lemma.

Lemma 2.1. *The kernel* $Ker\ D_t \subset R\{u\}$ *of the differentiation* $D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$, *reduced modulo the Riemann differential ideal* $R\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$, *is generated by elements satisfying the following linear functional-differential relationships:*

$$D_t f^{(1)} = 0, \quad D_t f^{(2)} = \lambda f^{(1)}, \;\; D_t f^{(3)} = f^{(2)}, \tag{10}$$

where, by definition, $f^{(k)} := f^{(k)}(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(k)} \lambda^n \in \mathcal{K}\{u\}|_{\mathcal{M}_{(3)}} = \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$, $k = \overline{1,3}$, *and* $\lambda \in \mathbb{R}$ *is arbitrary.*

It is easy to see that equations (10) can be equivalently rewritten both in the matrix form as

$$D_t f = q(\lambda) f, \quad q(\lambda) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

where $f := (f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)})^\intercal \in \mathcal{K}^3\{u\}|_{\mathcal{M}_{(3)}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ is an arbitrary "spectral" parameter, and in the compact scalar form as

$$D_t^3 f_3 = 0 \tag{12}$$

for an element $f_3 \in \mathcal{K}\{u\}|_{\mathcal{M}_{(3)}}$. Here it is worth to note that the Riemann differential ideal (9), satisfying the D_t-invariance condition, is in this case maximal. Now we can construct by means of relationship (12) a new invariant, the so-called "Lax differential ideal" $L\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$, isomorphic to the Riemann differential ideal $R\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$ and realizing the Lax type integrability condition of the Riemann type hydrodynamical equation (1). Namely, based on the result of Lemma 2.1 the following proposition holds.

Proposition 2.1. *The expression (11) is an adjoint linear matrix representation in the space $\mathbb{R}^3\{\{x,t\}\}$ of the differentiation $D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$, reduced to the ideal $R\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$. The related D_x- and D_t-invariant Lax differential ideal $L\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$, which is isomorphic to the invariant Riemann differential ideal $R\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$, is generated by the element $f_3(\lambda) \in \mathcal{K}\{u\}, \lambda \in \mathbb{R}$, satisfying condition (12), and equals*

$$\begin{aligned} L\{u\} &:= \{g_1 f_3(\lambda) + g_2 D_t f_3(\lambda) + g_3 D_t^2 f_3(\lambda) : D_t^3 f_3(\lambda) = 0, \\ \lambda &\in \mathbb{R}, g_j \in \mathcal{K}\{u\}, j = \overline{1,3}\} \subset \mathcal{K}\{u\}. \end{aligned} \tag{13}$$

We now construct a related adjoint linear matrix representation in the functional vector space $\mathbb{R}^3\{\{x,t\}\}$ for the differentiation $D_x : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$, reduced modulo the Lax differential ideal $L\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$. For this problem to be solved, we need to take into account the commutator relationship (5) and the important invariance condition of the Lax differential ideal $L\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$ with respect to the differentiation $D_x : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$. As a result of simple but slightly tedious calculations one obtains the following matrix representation:

$$D_x f = \ell[u,v,z;\lambda] f, \quad \ell[u,v,z;\lambda] := \begin{pmatrix} \lambda u_x & -v_x & z_x \\ 3\lambda^2 & -2\lambda u_x & \lambda v_x \\ 6\lambda^2 r[u,v,z] & -3\lambda & \lambda u_x \end{pmatrix}, \tag{14}$$

where, by definition, $v := D_t u, z := D_t v$, $(...)_x := D_x(...)$, a vector $f \in \mathbb{R}^3\{\{x,t\}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ is an arbitrary spectral parameter and a smooth functional mapping $r : \tilde{\mathcal{M}}_{(3)} \to \mathbb{R}\{\{x,t\}\}, \tilde{\mathcal{M}}_{(3)} := \sqcap_{j=1}^3 D_t^j \mathcal{M}_{(3)}$, solves the following functional-differential equation

$$D_t r + r D_x u = 1. \tag{15}$$

Moreover, the matrix $\ell := \ell[u,v,z;\lambda] : \mathbb{R}^3\{\{x,t\}\} \to \mathbb{R}^3\{\{x,t\}\}$ satisfies the following determining functional-differential equation:

$$D_t \ell + \ell D_x u = [q(\lambda), \ell], \tag{16}$$

where $[\cdot,\cdot]$ denotes the usual matrix commutator in the functional space $\mathbb{R}^3\{\{x,t\}\}$. The following proposition solving the representation problem posed above, holds.

Proposition 2.2. *The expression (14) is an adjoint linear matrix representation in the space $\mathbb{R}^3\{\{x,t\}\}$ of the differentiation $D_x : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$, reduced modulo the invariant Lax differential ideal $L\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$, given by (13).*

Remark 2.1. *Here it is necessary to mention that the matrix representation (11) coincides completely with that obtained before in the work [4] by means of completely different methods, based mainly on the gradient-holonomic algorithm, devised in [16, 11, 7]. The presented derivation of these representations (11) and (14) is much easier and simpler that can be explained by a deeper insight into the integrability problem, devised above using the differential algebraic approach.*

To proceed further, it is now worth to observing that the invariance condition for the Lax differential ideal $L\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$ with respect to the differentiations $D_x, D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$ is also equivalent to the related Lax type representation for the generalized Riemann type equation 1 in the following dynamical system form:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= v - uu_x \\ v_t &= z - uv_x \\ z_t &= -uz_x \end{aligned}\right\} := K[u,v,z], \tag{17}$$

Namely, the following theorem, summing up the results obtained above, holds.

Theorem 1. *The linear differential-matrix expressions (11) and (14) in the space $\mathbb{R}^3\{\{x,t\}\}$ for differentiations $D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$ and $D_x : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$, respectively, provide us with the standard Lax type representation for the generalized Riemann type equation (1) in the equivalent dynamical system form (17), thereby implying its Lax type integrability.*

The next problem of great interest is to construct, making use of the differential-algebraic tools, the functional-differential solutions to the determining equation (19), and to construct the corresponding differential-algebraic analogs of the symplectic structures characterizing the differentiations $D_x, D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$, as well as the local densities of the related conservation laws, which were derived in [4, 14].

A was shown above and in [4, 14], the dynamical system (17) possesses the following Lax type representation:

$$f_x = \ell[u,v,z;\lambda]f, \quad f_t = p(\ell)f, \quad p(\ell) := -u\ell[u,v,z;\lambda] + q(\lambda),$$

$$\ell[u,v,z;\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda u_x & -v_x & z_x \\ 3\lambda^2 & -2\lambda u_x & \lambda v_x \\ 6\lambda^2 r[u,v,z] & -3\lambda & \lambda u_x \end{pmatrix}, \quad q(\lambda) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$p(\ell) = \begin{pmatrix} -\lambda u u_x & uv_x & -uz_x \\ -3u\lambda^2 + \lambda & 2\lambda u u_x & -\lambda u v_x \\ -6\lambda^2 r[u,v,z]u & 1 + 3u\lambda & -\lambda u u_x \end{pmatrix},$$

where $f \in L_\infty(\mathbb{R};\mathbb{E}^3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ is an arbitrary spectral parameter and a function $r : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ satisfies the following functional-differential equation:

$$D_t r + r D_x u = 1 \tag{19}$$

under the commutator condition (5).

Notwithstanding a slightly complicated form of the functional-differential equation 19, making use of the differential-algebraic approach devised above, one can easily derive the next supplementing theorem, describing its exact solutions on the corresponding functional manifold $\tilde{\mathcal{M}}_{(3)}$.

Theorem 2. *The following set of functional expressions*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}} =&\Big\{ r_1^{(1)} = \frac{v_x v^3}{6z^3} - \frac{u_x v^2}{2z^2} + \frac{u(uz - v^2)z_x}{6z^3} + \frac{v}{z},\ r_1^{(2)} = [(xv - u^2/2)/z]_x, \\ r_2 =& \frac{v_x}{z_x} - \frac{u_x^2}{2z_x}, r_3 = \left(\frac{u_x^3}{6z_x^2} - \frac{u_x v_x}{2z_x^2} + \frac{3}{4z_x}\right) \Big/ \left(\frac{u_x}{z_x} - \frac{v_x^2}{2z_x^2}\right) \Big\} \subset \mathcal{R}\end{aligned} \tag{20}$$

solves the functional-differential equation (15) on the corresponding manifold $\tilde{\mathcal{M}}_{(3)}$.

The set (20) coincides exactly with that constructed before in [4, 2, 14] by means of completely different techniques.

2.3 The generalized Riemann type hydrodynamical equation: the case N=4

Now consider the generalized Riemann type differential equation (1) at $N = 4$

$$D_t^4 u = 0 \tag{21}$$

on an element $u \in \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$ and construct the related invariant Riemann differential ideal $R\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$ as follows:

$$\begin{aligned}R\{u\} :=& \Big\{ \lambda^3 \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(1)} D_x^n u - \lambda^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(2)} D_t D_x^n u + \lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(3)} D_t^2 D_x^n u \\ &- \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(4)} D_t^3 D_x^n u \ :\ D_t^4 u = 0, \lambda \in \mathbb{R}, f_n^{(k)} \in \mathcal{K}\{u\}, k = \overline{1,4}, n \in \mathbb{Z}_+ \Big\}\end{aligned} \tag{22}$$

at a fixed function $u \in \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$. The Riemann differential ideal (22), satisfying the D_t-invariance condition, is in this case also maximal. The corresponding kernel $Ker\ D_t \subset R\{u\}$ of the differentiation $D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$, reduced upon the Riemann differential ideal (22), is given by the following linear differential relationships:

$$D_t f^{(1)} = 0,\ D_t f^{(2)} = \lambda f^{(1)},\ D_t f^{(3)} = \lambda f^{(2)},\ D_t f^{(4)} = \lambda f^{(3)}, \tag{23}$$

where $f^{(k)} := f^{(k)}(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(k)} \lambda^n \in \mathcal{K}\{u\}|_{\mathcal{M}_{(4)}} = \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$, $k = \overline{1,4}$ and $\lambda \in \mathbb{R}$ is arbitrary. The linear relationships (23) can be easily represented in the space $\mathbb{R}^4\{\{x,t\}\}$ in the following matrix form:

$$D_t f = q(\lambda) f, \quad q(\lambda) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

where $f := (f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)})^{\intercal} \in \mathbb{R}^4\{\{x,t\}\}$, and $\lambda \in \mathbb{R}$. Moreover, it is easy to observe that relationships (23) can be equivalently rewritten in the compact scalar form as

$$D_t^4 f^{(4)} = 0, \tag{25}$$

where an element $f_4 \in \mathcal{K}\{u\}$. Thus, now one can construct the invariant Lax differential ideal, isomorphically equivalent to (22), as follows:

$$\begin{aligned} L\{u\} &:= \{g_1 f^{(4)} + g_2 D_t f^{(4)} + g_3 D_t^2 f^{(4)} + g_4 D_t^3 f^{(4)} : D_t^4 f^{(4)} = 0, \\ g_j &\in \mathcal{K}\{u\}, j = \overline{1,4}\} \subset \mathcal{K}\{u\}, \end{aligned} \tag{26}$$

whose D_x-invariance should be checked separately. The latter gives rise to the representation

$$D_x f = \ell[u,v,w,z;\lambda] f, \quad \ell[u,v,w,z;\lambda] := \begin{pmatrix} -\lambda^3 u_x & \lambda^2 v_x & -\lambda w_x & z_x \\ -4\lambda^2 & 3\lambda^3 u_x & -2\lambda^2 v_x & \lambda w_x \\ -10\lambda^5 r_1 & 6\lambda^4 & -3\lambda^3 u_x & \lambda^2 v_x \\ -20\lambda^6 r_2 & 10\lambda^5 r_1 & -4\lambda^4 & \lambda^3 u_x \end{pmatrix}, \tag{27}$$

where we put, by definition,

$$D_t u := v, D_t v := w, D_t w := z, D_t z := 0, \tag{28}$$

$(u,v,w,z)^{\intercal} \in \tilde{\mathcal{M}}_{(4)} \subset \mathbb{R}^3\{\{x,t\}\}$, and the mappings $r_j : \tilde{\mathcal{M}}_{(4)} \to \mathbb{R}\{\{x,t\}\}, j = \overline{1,2}$, satisfy the following functional-differential equations:

$$D_t r_1 + r_1 D_x u = 1, \qquad D_t r_2 + r_2 D_x u = r_1, \tag{29}$$

similar to (15), considered above. The equations (29) possess many different solutions, amongst which are the functional expressions:

$$\begin{aligned} r_1 &= D_x\Big(\frac{uw^2}{2z^2} - \frac{vw^3}{3z^3} + \frac{vw^4}{24z^4} + \frac{7w^5}{120z^4} - \frac{w^6}{144z^5}\Big), \\ r_2 &= D_x\Big(\frac{uw^3}{3z^3} - \frac{vw^4}{6z^4} + \frac{3w^6}{80z^5} + \frac{vw^5}{120z^5} - \frac{w^7}{420z^6}\Big). \end{aligned} \tag{30}$$

Whence, we obtain the following proposition.

Proposition 2.3. *The expressions (24) and (27) are the linear matrix representations in the space $\mathbb{R}^4\{\{x,t\}\}$ of the differentiations $D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$ and $D_x : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$, respectively, reduced upon the invariant Lax differential ideal $L\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$ given by (13).*

Based now on the representations (24) and (27) one easily constructs a standard Lax type representation, characterizing the integrability of the nonlinear dynamical system

$$\left.\begin{aligned} u_t &= v - uu_x \\ v_t &= w - uv_x \\ w_t &= z - uw_x \\ z_t &= -uz_x \end{aligned}\right\} := K[u,v,w,z], \tag{31}$$

equivalent to the generalized Riemann type hydrodynamical system (21). Namely, the following theorem holds.

Theorem 3. *The dynamical system (31), equivalent to the generalized Riemann type hydrodynamical system (21), possesses the Lax type representation*

$$f_x = \ell[u,v,z,w;\lambda]f, \quad f_t = p(\ell)f, \quad p(\ell) := -u\ell[u,v,w,z;\lambda] + q(\lambda), \tag{32}$$

where $f \in \mathbb{R}^4\{\{x,t\}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *is a spectral parameter and*

$$\ell[u,v,w,z;\lambda] := \begin{pmatrix} -\lambda^3 u_x & \lambda^2 v_x & -\lambda w_x & z_x \\ -4\lambda^4 & 3\lambda^3 u_x & -2\lambda^2 v_x & \lambda w_x \\ -10\lambda^5 r_1 & 6\lambda^4 & -3\lambda^3 u_x & \lambda^2 v_x \\ -20\lambda^6 r_2 & 10\lambda^5 r_1 & -4\lambda^4 & \lambda^3 u_x \end{pmatrix}, \quad q(\lambda) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$p(\ell) = \begin{pmatrix} \lambda u u_x & -\lambda^2 u v_x & \lambda u w_x & -u z_x \\ \lambda + 4\lambda^4 u & -3\lambda^3 u u_x & 2\lambda^2 u v_x & -\lambda u w_x \\ 10\lambda^5 u r_1 & \lambda - 6\lambda^4 u & 3\lambda^3 u u_x & -\lambda^2 u v_x \\ 20\lambda^6 u r_2 & -10\lambda^5 u r_1 & \lambda + 4\lambda^4 u & -\lambda^3 u u_x \end{pmatrix}, \tag{33}$$

so it is a Lax type integrable dynamical system on the functional manifold $\tilde{\mathcal{M}}_{(4)}$.

The result obtained above can be easily generalized on the case of an arbitrary integer $N \in \mathbb{Z}_+$, thereby proving the Lax type integrability of the whole hierarchy of the Riemann type hydrodynamical equation (1). The related calculations will be presented and discussed in other work. Here we only do the next remark.

Remark 2.2. *The Riemann type hydrodynamical equation (1) as* $N \to \infty$ *can be equivalently rewritten as the following Benney type [1, 10, 15] chain*

$$D_t u^{(n)} = u^{(n+1)}, \quad D_t := \partial/\partial t + u^{(0)}\partial/\partial x, \tag{34}$$

for the suitably constructed moment functions $u^{(n)} := D_t^n u^{(0)}, u^{(0)} := u \in \mathbb{R}\{\{x,t\}\}, n \in \mathbb{Z}_+$.

This aspect of the problem is very interesting and we plan to treat it in detail by means of the differential-geometric tools elsewhere.

3 The differential-algebraic analysis of the Lax type integrability of the Korteweg-de Vries dynamical system

3.1 The differential-algebraic problem setting

We consider the well known Korteweg-de Vries equation in the following (8) differential-algebraic form:

$$D_t u - D_x^3 u = 0, \tag{35}$$

where $u \in \mathcal{K}\{u\}$ and the differentiations $D_t := \partial/\partial t + u\partial/\partial x, D_x := \partial/\partial x$ satisfy the commutation condition (5):

$$[D_x, D_t] = (D_x u)D_x. \tag{36}$$

We will also interpret relationship (35) as a nonlinear dynamical system

$$D_t u = D_{xxx} u \tag{37}$$

on a suitably chosen functional manifold $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$.

Based on the expression (35) we can easily construct a suitable invariant KdV-differential ideal $KdV\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$ as follows:

$$\begin{aligned} KdV\{u\} &:= \{\sum_{k=\overline{0,2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(k)} D_x^k D_t^n u \in \mathcal{K}\{u\} : \ D_t u - D_x^3 u = 0, \\ f_n^{(k)} &\in \mathcal{K}\{u\}, k=\overline{0,2}, n \in \mathbb{Z}_+\} \subset \mathcal{K}\{u\}. \end{aligned} \tag{38}$$

The ideal (38) proves to be not maximal, that seriously influences on the form of the reduced modulo it representations of derivatives D_x and $D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$. As the next step we need to find the kernel $Ker\ D_t \subset KdV\{u\}$ of the differentiation $D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$, reduced upon the KdV-differential ideal (38). We obtain by means of easy calculations that it is generated by the following differential relationships:

$$\begin{aligned} D_t f^{(0)} &= -\lambda f^{(0)}, \ \ D_t f^{(2)} = -\lambda f^{(2)} \ + 2 f^{(2)} D_x u, \\ D_t f^{(1)} &= -\lambda f^{(1)} \ + f^{(1)} D_x u + f^{(2)} D_{xx} u, \end{aligned} \tag{39}$$

where, by definition, $f^{(k)} := f^{(k)}(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n^{(k)} \lambda^n \in \mathcal{K}\{u\}|_{\mathcal{M}} = \mathbb{R}\{\{x,t\}\}, k = \overline{0,2}$, and $\lambda \in \mathbb{R}$ is an arbitrary parameter. Based on the relationships (39) the following proposition holds.

Proposition 3.1. *The differential relationships (39) can be equivalently rewritten in the following linear matrix form:*

$$D_t f = q(\lambda) f, \ \ q(\lambda) := \begin{pmatrix} D_x u - \lambda & D_{xx} u \\ 0 & 2D_x u - \lambda \end{pmatrix}, \tag{40}$$

where $f := (f_1, f_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2\{\{x,t\}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, giving rise to the corresponding linear matrix representation in the space $\mathbb{R}^2\{\{x,t\}\}$ of the differentiation $D_t : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$, reduced upon the KdV-differential ideal (38).

3.2 The Lax type representation

Now, making use of the matrix differential relationship (40), we can construct the Lax differential ideal related to the ideal (38)

$$\begin{aligned} L\{u\} &:= \{< g, f >_{\mathbb{E}^2} \in \mathcal{K}\{u\} : D_t f = q(\lambda) f, \\ f, g &\in \mathcal{K}^2\{u\} \ \} \subset \mathcal{K}\{u\}, \end{aligned} \tag{41}$$

where $< \cdot, \cdot >_{\mathbb{E}^2}$ denotes the standard scalar product in the Euclidean real space $\mathbb{E}^2$. Since the Lax differential ideal (41) is, by construction, D_t-invariant and isomorphic to the D_t-

and D_x-invariant KdV-differential ideal (38), it is necessary to check its D_x-invariance. As a result of this condition the following differential relationship

$$D_x f = \ell[u;\lambda]f,\ \ell[u;\lambda] := \begin{pmatrix} D_x\tilde{a} & 2D_{xx}\tilde{a}. \\ -1 & -D_x\tilde{a} \end{pmatrix} \tag{42}$$

holds, where the mapping $\tilde{a} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$ satisfies the functional-differential relationships

$$D_t\tilde{a} = 1, D_t u - D_x^3 u = 0, \tag{43}$$

and the matrix $\ell := \ell[u;\lambda] : \mathbb{R}^2\{\{x,t\}\} \to \mathbb{R}^2\{\{x,t\}\}$ satisfies for all $\lambda \in \mathbb{R}$ the determining functional-differential equation

$$D_t\ell + \ell D_x u = [q(\lambda), \ell] + D_x q(\lambda), \tag{44}$$

generalizing the similar equation (16). The result obtained above we formulate as the following proposition.

Theorem 4. *The derivatives $D_t : \mathbb{R}\{\{x,t\}\} \to \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$ and $D_x : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$ of the differential ring $\mathcal{K}\{u\}$, reduced upon the Lax differential ideal $L\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$, which isomorphic to the KdV-differential ideal $KdV\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$, allow the compatible Lax type representation (generated by the invariant Lax differential ideal $L\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$)*

$$\begin{aligned} D_t f &= q(\lambda)f,\ \ q(\lambda) := \begin{pmatrix} D_x u - \lambda & D_{xx}u \\ 0 & 2D_x u - \lambda \end{pmatrix}, \\ D_x f &= \ell[u;\lambda]f,\ \ell[u;\lambda] := \begin{pmatrix} D_x\tilde{a} & 2D_{xx}\tilde{a}. \\ -1 & -D_x\tilde{a} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{45}$$

where the mapping $\tilde{a} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$ satisfies the functional-differential relationships (43), $f \in \mathbb{R}^2\{\{x,t\}\}$ and $\lambda \in \mathbb{R}$.

It is interesting to mention that the Lax type representation (45) strongly differs from that given by the well known [12] classical expressions

$$\begin{aligned} D_t f &= q_{cl}(\lambda)f,\ \ q_{cl}(\lambda) := \begin{pmatrix} D_x u/6 & -(2u/3 - 4\lambda) \\ \begin{matrix} D_{xx}u/6 - (u/6-\lambda)\times \\ \times(2u/3 - 4\lambda) \end{matrix} & -11D_x u/6 \end{pmatrix}, \\ D_x f &= \ell_{cl}[u;\lambda]f,\ \ell_{cl}[u;\lambda] := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u/6 - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{46}$$

where, as above, the following functional-differential equation (equivalent to the nonlinear dynamical system (37) on the functional manifold $\mathcal{M}$)

$$D_t\ell_{cl} + \ell_{cl}D_x u = [q_{cl}(\lambda), \ell_{cl}] + D_x q_{cl}(\lambda), \tag{47}$$

holds for any $\lambda \in \mathbb{R}$. This fact, as we suspect, is related with the existence of different D_t-invarinat KdV-differential ideals of form (38), which are not maximal. Thus, a problem of constructing a suitable KdV-differential ideal $KdV\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$ generating the corresponding invariant Lax type differential ideal $L\{u\} \subset \mathcal{K}\{u\}$, invariant with respect to the differential representations (46), naturally arises, and we expect to treat this in detail elsewhere. There also is a very interesting problem of the differential-algebraic analysis of the related symplectic structures on the functional manifold $\mathcal{M}$, with respect to which the dynamical system (37) is Hamiltonian and suitably integrable. Here we need also to mention a very interesting work [22], where the integrability structure of the Korteweg-de Vries equation was analyzed from the differential-algebraic point of view.

4 Conclusion

The results presented provide convincing evidence that the differential-algebraic tools, when applied to a given set of differential relationships based on the derivatives D_t and $D_x : \mathcal{K}\{u\} \to \mathcal{K}\{u\}$ in the differential ring $\mathcal{K}\{u\}$ and parameterized by a fixed element $u \in \mathcal{K}\{u\}$, make it possible to construct the corresponding Lax type representation as that realizing the linear matrix representations of the derivatives reduced modulo the corresponding invariant Riemann differentail ideal. This scheme was elaborated in detail for the generalized Riemann type differential equation (1) and for the classical Korteweg-de Vries equation (37). As these equations are equivalent to the corresponding Hamiltonian systems with respect to suitable symplectic structures, this aspect presents a very interesting problem from the differential-algebraic point of view, which we plan to study in the near future.

5 Acknowledgements

The authors are very appreciated to the Organizing Committee of the Workshop "Modern problems in probability theory and mathematical analysis", held in Vorokhta, Ukraine, on 25-28 March 2010, for the invitation. The authors are also much obliged to Profs. Zbignew Peradzyński (Warsaw University, Poland), Jan Sławianowski (IPPT, Poland) and Denis Blackmore (NJIT, New Jersey, USA) for very valuable discussions. A.K.P. is cordially thankful to Dr. Camilla Hollanti (Turku University, Finland) for the invitation to take part in the "Cohomology Course-2010", to deliver a report and for the nice hospitality. M.V.P. was in part supported by RFBR grant 08-01-00054 and a grant of the RAS Presidium "Fundamental Problems in Nonlinear Dynamics". He also thanks the Wroclaw University for the hospitality. The last but least thanks go to Referees, whose many instrumental comments, suggestions and remarks made the exposition strongly improved.

References

1. Benney D.J. *Some properties of long nonlinear waves*, Stud. Appl. Math., **52** (1973), 45–50.
2. Bogolubov N. (jr.), Golenia J., Popowicz Z., Pavlov M., Prykarpatsky A. A new Riemann type hydrodynamical hierarchy and its integrability analysis, Preprint ICTP, IC/2009/095, 2010.
3. Crespo T., Hajto Z. Introduction to Differential Galois Theory, Preprint IMUJ, Cracow, 2007.

4. Golenia J., Pavlov M., Popowicz Z., Prykarpatsky A. *On a nonlocal Ostrovsky-Whitham type dynamical system, its Riemann type inhomogenious regularizations and their integrability*, SIGMA, **6** (2010), 1–13.

5. Gurevich A.V., Zybin K.P. *Large-scale structure of the Universe*, Analytic theory Sov. Phys. Usp., **38** (1995), 687–722.

6. Gurevich A.V., Zybin K.P. *Nondissipative gravitational turbulence*, Sov. Phys. JETP, **67** (1988), 1–12.

7. Hentosh O., Prytula M., Prykarpatsky A. Differential-geometric and Lie-algebraic foundations of investigating nonlinear dynamical systems on functional manifolds, Lviv University Publ., 2006 (in Ukrainian).

8. Kaplanski I. Introduction to differential algebra, NY, 1957.

9. Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, 1973.

10. Kupershmidt B.A., Manin Ju.I. *Long wave equations with a free surface. II. The Hamiltonian structure and the higher equations*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., **12**, 1 (1978), 25–37.

11. Mitropolsky Yu., Bogolubov N. (jr.), Prykarpatsky A., Samoylenko V. Integrable dynamical system: spectral and differential-geometric aspects, Kiev: "Naukova Dumka", 1987 (in Russian).

12. Novikov S.P. Theory of Solitons, Moscow, Nauka Publ., 1980 (in Russian).

13. Pavlov M. *The Gurevich-Zybin system*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), 3823–3840.

14. Popowicz Z., Prykarpatsky A. A. *The non-polynomial conservation laws and integrability analysis of generalized Riemann type hydrodynamical equations*, arXiv:submit/0044844 [nlin.SI], 21 May 2010.

15. Prykarpatsky A.K., Blackmore D., Bogolubov N.N. (jr.) *Hamiltonian structure of Benney type hydrodynamic systems and Boltzmann-Vlasov kinetic equations on an axis and some applications to manufacturing science*, Open systems and Information dynamics, **6** (1999), 335–373.

16. Prykarpatsky A., Mykytyuk I. Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects, Kluwer Academic Publishers, the Netherlands, 1998.

17. Prykarpatsky A.K., Prytula M.M., *The gradient-holonomic integrability analysis of a Whitham-type nonlinear dynamical model for a relaxing medium with spatial memory*, Nonlinearity, **19** (2006), 2115–2122.

18. Ritt J.F. Differential algebra, AMS-Colloqium Publications, vol. XXXIII, New York, NY, Dover Publ., 1966.

19. Sakovich S. *On a Whitham-Type Equation*, SIGMA, **5** (2009), 101.

20. Weil J.-A. Introduction to Diffeerential Algebra and Differential Galois Theory. CIMPA-UNESCO-VIETNAM Lectures: Hanoi, 2001.

21. Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves, Willey-Interscience, New York, 1974.

22. Wilson G. *On the quasi-Hamiltonian formalism of the KdV equation*, Physics Letters, **132**:8/9 (1988), 445–450.

[1] Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, Ukraine and
AGH University of Science and Technology, Craców, Poland
pryk.anat@ua.fm

[2] Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
Ivano-Frankivsk, Ukraine
artemo@usk.pk.edu.pl

[3] University of Wrocław, Poland
ziemek@ift.uni.wroc.pl

[4] Lebedev Physical Institute,
Moscow, Russia
m.v.pavlov@lboro.ac.uk

Received 26.07.2010

Прикарпатський А.К., Артемович О.Д., Поповіч З., Павлов М.В. *Алгебраїчні структури типу Рімана та диференціально-алгебраїчний аналіз їх інтегровності* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 96–108.

Розвивається диференціально-алгебраїчний підхід до інтегровності узагальнених рівнянь типу Рімана. Аналізується структура диференціювань та асоційованих з ними інваріантних диференціальних ідеалів. Підхід також застосовується до вивчення інтегровності за Лаксом відомої динамічної системи Кортевега-де Фріза.

Прикарпатский А.К., Артемович О.Д., Попович З., Павлов М.В. *Алгебраические структуры типа Римана и дифференциально-алгебраический анализ их интегрируемости* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 96–108.

Развивается дифференциально-алгебраический подход к изучению интегрируемости обобщенных уравнений типа Римана. Анализируется структура дифференцирований и ассоциированных с ними инвариантных дифференциальных идеалов. Подход также применяется к исследованию интегрируемости известной динамической системы Кортевега-де Фриза.

Карпатські математичні
публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.2, №.1

УДК 517.5

Скасків О.Б., Куриляк А.О.

ПРЯМІ АНАЛОГИ НЕРІВНОСТІ ВІМАНА ДЛЯ ФУНКЦІЙ АНАЛІТИЧНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ

Скасків О.Б., Куриляк А.О. *Прямі аналоги нерівності Вімана для функцій аналітичних в одиничному крузі* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 109–118.

Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – аналітична функція в $\{z : |z| < 1\}$, $h \in H$ і $\Omega_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Якщо

$$\beta_{fh} = \varliminf_{r\to 1} \frac{\ln\ln \Omega_f(r)}{\ln h(r)} = +\infty,$$

тоді виконується нерівність Вімана $M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r)$ для всіх $r \in (r_0, 1)\backslash E(\delta)$, де $h - \text{meas}\ E < +\infty$.

1 Вступ і формулювання результатів

Відома теорема Вімана-Валірона стверджує, що для кожної цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

і для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто $\int_E d\ln r < +\infty$) така, що $(\forall\ r \in (1, +\infty)\backslash E)$:

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r).$$

У 1929 – 1930 рр. П. Леві довів, що майже напевно у деякому ймовірнісному сенсі показник $1/2$ у цій нерівності можна замінити на $1/4$.

У подальшому, як сама нерівність Вімана, так і ефект виявлений Леві переносились на різні класи аналітичних функцій. Зокрема, Н. М. Сулейманов ([3]) встановлював аналоги нерівності Вімана у класі аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцій, а П. В. Філевич ([2]) досліджував у цих випадках наявність ефектів типу Леві.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B20.
Ключові слова і фрази: нерівність Вімана, аналітичні функції.

Теорема. *([3]) Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з радіусом збіжності $R(f)=1$. Якщо $h\in H:\beta_{fh}>0$, то $(\forall\,\delta>0)$ $(\exists E(\delta,f,h)=E\subset(0,1))$ $(\exists r_0\in(0,1))$ $(\forall\, r\in(r_0,1)\backslash E)$*

$$M_f(r)\le\frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\delta}}\ln^{1/2+\delta}\frac{\mu_f(r)}{1-r}\quad\text{та}\quad\int\limits_E\frac{dr}{1-r}<+\infty.$$

Разом з тим, у цих дослідженнях відсутні прямі аналоги нерівності Вімана, тому проведені у статті дослідження покликані заповнити цю прогалину. Отже, метою цієї статті є встановити, за яких умов у класі аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій правильна нерівність Вімана і дослідити наявність у цьому випадку ефекту Леві.

Нехай f – аналітична в одиничному крузі, яку можна подати у вигляді (1) з радіусом збіжності $R(f)=1$. Припустимо, що f має максимум модуля $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$ і максимальний член $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n:n\ge0\}$. Через H позначимо клас неперервних додатних на $(0,1)$ функцій, таких що $h(1-0)=+\infty$ і для деякого $r_0\in(0,1)$

$$\int_{r_0}^1 h(r)dr=+\infty.$$

Позначимо

$$\Omega_f(r)=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r^n,\qquad \beta_{fh}=\varliminf_{r\to1}\frac{\ln\ln\Omega_f(r)}{\ln h(r)},\qquad \alpha_{fh}=\varlimsup_{r\to1}\frac{\ln\ln\Omega_f(r)}{\ln h(r)}.$$

Теорема 1. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$. Якщо $h\in H$: $\beta_{fh}>0$, то $(\forall\,\delta>0)$ $(\exists E(\delta,f,h)=E\subset(0,1))$ $(\exists r_0\in(0,1))$ $(\forall\, r\in(r_0,1)\backslash E)$*

$$M_f(r)\le h(r)\mu_f(r)\ln^{1/2+\delta}\mu_f(r)\quad\text{та}\quad\int\limits_E h(r)dr<+\infty.\tag{2}$$

Зокрема, якщо $h\in H$ та $\beta_{fh}=+\infty$, то $\ln h(r)=o(\ln\ln\Omega_f(r))$ $(r\to1)$, тому і у першій нерівності (2) множник $h(r)$ можна опустити. Тобто, правильним буде такий наслідок.

Наслідок 1.1. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$. Якщо $h\in H$: $\beta_{fh}=+\infty$, то $(\forall\,\delta>0)$ $(\exists E(\delta,f,h)=E\subset(0,1))$ $(\exists r_0\in(0,1))$ $(\forall\, r\in(r_0,1)\backslash E)$*

$$M_f(r)\le \mu_f(r)\ln^{1/2+\delta}\mu_f(r)\quad\text{та}\quad\int\limits_E h(r)dr<+\infty.$$

У випадку, коли $0\le\alpha_{fh}<+\infty$, будуть справедливими такі твердження.

Теорема 2. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$. Якщо $h\in H$: $0\le\alpha_{fh}<+\infty$, то $(\forall\,\delta>0)$ $(\exists E(\delta,f,h)=E\subset(0,1))$ $(\exists r_0\in(0,1))$ $(\forall\, r\in(r_0,1)\backslash E)$*

$$M_f(r)\le h(r)\mu_f(r)\{\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\}^{1/2+\delta}\quad\text{та}\quad\int\limits_E h(r)dr<+\infty.$$

Через $K(f,Z)$ позначимо клас функцій вигляду

$$f(z,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nZ_n(t)z^n, \tag{3}$$

де f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$, і $Z=\{Z_n(t)\}$ – послідовність випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі Штейнгауза (Ω,A,P). Тут $\Omega=[0,1]$, A – σ–алгебра вимірних за Лебегом підмножин Ω, P – міра Лебега на прямій. Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини $Z_n=X_n+iY_n$ обчислюються за формулами

$$MZ_n=\int_\Omega X_nP(dt)+i\int_\Omega Y_nP(dt),\quad DZ_n=M(|Z_n-MZ_n|^2).$$

Відповідно будемо говорити, що деяка властивість виконується *майже напевно в* $K(f,Z)$, якщо Лебегова міра тих $t\in(0,1)$, при яких $f(z,t)$ володіє цією властивістю, дорівнює одиниці.

Послідовність X дійсних випадкових величин називається *мультиплікативною системою (МС)*, якщо $MX_{i_1}X_{i_2}\dots X_{i_k}=0$ для довільних $i_1<i_2<\dots<i_k, k\geq 1$, а послідовність $Z_n=X_n+iY_n$ називається МС, якщо $X=(X_n)$ і $Y=(Y_n)\in$ МС. Позначимо

$$M_f(r,t)=\max\{|f(z,t)|,|z|=r\}.$$

Теорема 3. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$, Z є МС і $|Z_n|\leq 1$ для майже всіх $t\in(0,1)$. Якщо $h\in H:\beta_{fh}>0$, то майже напевно в $K(f,Z)$* $(\forall\ \varepsilon>0)$ $(\exists\ E(\varepsilon,t)=E\subset(0,1))$ $(\exists r_0(t)\in(0,1))$ $(\forall\ r\in(r_0(t),1)\backslash E)$:

$$M_f(r,t)\leq\sqrt{h(r)}\mu_f(r)\ln^{1/4+\varepsilon}\mu_f(r)\quad\text{та}\quad\int\limits_E h(r)dr<+\infty.$$

Наслідок 1.2. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$, Z є МС і $|Z_n|\leq 1$ для майже всіх $t\in(0,1)$. Якщо $h\in H:\beta_{fh}=+\infty$, то майже напевно в $K(f,Z)$* $(\forall\ \varepsilon>0)$ $(\exists\ E(\varepsilon,t)=E\subset(0,1))$ $(\exists r_0(t)\in(0,1))$ $(\forall\ r\in(r_0(t),1)\backslash E)$:

$$M_f(r,t)\leq\mu_f(r)\ln^{1/4+\varepsilon}\mu_f(r)\quad\text{та}\quad\int\limits_E h(r)dr<+\infty.$$

Прийнявши в теоремі 3 $h(r)=\ln^\beta\Omega_f(r)$, при $r\geq r_0$, $\beta>0$, отримаємо $\beta_{fh}=1/\beta>0$ та $M_f(r,t)\leq\mu_f(r)\ln^{1/4+\beta/2+\varepsilon}\mu_f(r)$. Отже, ми отримали такий наслідок.

Наслідок 1.3. *Нехай f – аналітична функція вигляду (1) з $R(f)=1$, Z є МС і $|Z_n|\leq 1$ для майже всіх $t\in(0,1)$. Якщо $h\in H:\beta_{fh}\geq 2$, то майже напевно в $K(f,Z)$* $(\forall\ \varepsilon>0)$ $(\exists\ E(\varepsilon,t)=E\subset(0,1))$ $(\exists r_0\in(0,1))$ $(\forall\ r\in(r_0(t),1)\backslash E)$:

$$M_f(r,t)\leq\mu_f(r)\ln^{1/2+\varepsilon}\mu_f(r)\quad\text{та}\quad\int\limits_E h(r)dr<+\infty.$$

2 Доведення теорем 1 і 2.

Доведення теореми 1. Нехай $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|e^{nx}, x < 0$, і ξ – випадкова величина з розподілом

$$P(\xi = n) = \frac{1}{g(x)}|a_n|e^{nx}.$$

Тоді $M\xi = g_1'(x)$ і $D\xi = g_1''(x)$, де $g_1(x) = \ln g(x)$.

За нерівністю Чебишова отримуємо $P(|\xi - g_1'(x)| < \sqrt{2g_1''(x)}\ ) \geq 1/2$, тобто

$$g(x) \leq 2 \sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} |a_n|e^{xn}. \tag{4}$$

Приймемо $x = \ln r < 0$ у нерівності (4) і отримаємо

$$g(x) \leq 2\mu_f(r) \sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} 1.$$

Оскільки $g_1'(x) - \sqrt{2g_1''(x)} < n < g_1'(x) + \sqrt{2g_1''(x)}$, то

$$\sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} 1 = [g_1'(x) + \sqrt{2g_1''(x)}] - [g_1'(x) - \sqrt{2g_1''(x)}] \leq 2\sqrt{2g_1''(x)} + 1.$$

Отже,

$$g(x) \leq 2\mu_f(r)(2\sqrt{2{g_1}''(x)} + 1). \tag{5}$$

Нехай $\forall\ \varepsilon_1 > 0, \forall\ \varepsilon_2 > 0$

$$E_1 = \{x < 0 : g_1''(x) > h(e^x){g_1}'(x)(\ln g_1'(x))^{1+\varepsilon_1},\ g_1'(x) \geq 2\},$$

$$E_2 = \{x < 0 : g_1'(x) > h(e^x)(g_1(x))^{1+\varepsilon_2},\ g_1(x) \geq 1\},$$

$$\int_{E_1} h(e^x)\ dx \leq \int_{E_1} \frac{g_1''(x)}{g_1'(x)(\ln g_1'(x))^{1+\varepsilon_1}}\ dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^{1+\varepsilon_1}} < +\infty,$$

$$\int_{E_2} h(e^x)dx \leq \int_{E_2} \frac{{g_1}'(x)}{(g_1(x))^{1+\varepsilon_2}}dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon_2}} < +\infty.$$

Тоді,

$$\int_{E_1 \bigcup E_2} h(e^x)dx = \int_E \frac{h(r)}{r}dr < +\infty,$$

де $E-$ образ множини $E_1 \bigcup E_2$ при відображенні $r = e^x$. Очевидно, що $h - \text{meas}E = \int_E h(r)dr < +\infty$.

Тоді з (5) при $r \notin E$ отримаємо

$$g(\ln r) \leq 2\mu_f(r)(2\sqrt{2g_1''(x)} + 1) \leq 2\mu_f(r)(2\sqrt{2}\sqrt{h(e^x)g_1'(x)\ln^{1+\varepsilon_1} g_1'(x)} + 1)$$

$$\leq 4\mu_f(r)\left(\sqrt{2h^2(e^x)g_1^{1+\varepsilon_2}(x)}\ln^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}(h(e^x)g_1^{1+\varepsilon_2}(x)) + 1\right)$$

$$= 4\mu_f(r)\left(h(r)\sqrt{2g_1^{1+\varepsilon_2}(x)}\ln^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}(h(r)g_1^{1+\varepsilon_2}(x)) + 1\right)$$

$$\leq 16\mu_f(r)h(r)g_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2}}(x)\left(\ln h(r) + (1+\varepsilon_2)\ln g_1(x)\right)^{\frac{1+2\varepsilon_1}{2}}. \tag{6}$$

Врахувавши, що $\exists\varepsilon_0 > 0 : \ln h(r) < (\beta_{fh} - \varepsilon_0)^{-1}\ln g_1(x)$, отримаємо

$$g(x) \leq C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \beta_{fh})h(r)\mu_f(r)g_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}(x)(\ln g_1(x))^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1} \leq C_1 h(r)\mu_f(r)g_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon_3}(x), \tag{7}$$

$$g_1(x) = \ln g(x) \leq \ln C_1 + \ln\mu_f(r) + \ln h(r) + (0{,}5+\varepsilon)\ln g_1(x)$$

$$\leq \ln C_1 + \ln\mu_f(r) + C_2\ln g_1(x).$$

Отже, $g_1(x) - \ln C_1 - C_2\ln g_1(x) \leq \ln\mu_f(r),\ g_1(x) \leq 2\ln\mu_f(r),\ r \to 1.$
Тоді з (7) отримаємо

$$g(x) \leq C_1 h(r)\mu_f(r)(2\ln\mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon_3} \leq h(r)\mu_f(r)\ln^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\mu_f(r).$$

Оскільки $M_f(r) \leq g(\ln r)$, то

$$M_f(r) \leq h(r)\mu_f(r)\ln^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\mu_f(r).$$

$\square$

Доведення теореми 2. Аналогічно, як і у доведенні теореми 1, при $r \notin E$ отримуємо нерівність

$$g(\ln r) \leq 16\mu_f(r)h(r)g_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2}}(x)\left(\ln h(r) + (1+\varepsilon_2)\ln g_1(x)\right)^{\frac{1+2\varepsilon_1}{2}}.$$

Враховуючи, що $\exists\varepsilon_0 > 0 : \ln g_1(x) < (\alpha_{fh} + \varepsilon_0)\ln h(r)$, отримаємо

$$g(x) \leq C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha_{fh})h(r)\mu_f(r)g_1^{\frac{1+\varepsilon}{2}}(x)(\ln h(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1} \leq Ch(r)(\ln h(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\mu_f(r)g_1^{\frac{1+\varepsilon}{2}}(x).$$

$$g_1(x) = \ln g(x) \leq \ln C + \ln\mu_f(r) + (1+\varepsilon_0)\ln h(r) + 0{,}5(1+\varepsilon)\ln g_1(x).$$

Отже,

$$g_1(x) - \ln C - (0{,}5+\varepsilon)\ln g_1(x) \leq \ln\mu_f(r) + (1+\varepsilon_0)\ln h(r),$$

$$g_1(x) \leq 2(\ln\mu_f(r) + \ln h(r)) = 2\ln(h(r)\mu_f(r)), \quad r \to 1.$$

$$g(x) \leq Ch(r)(\ln h(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\mu_f(r)(2\ln(h(r)\mu_f(r)))^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \leq h(r)\mu_f(r)\{\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\}^{1/2+\delta}.$$

Тому

$$M_f(r) \leq h(r)\mu_f(r)\{\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\}^{1/2+\delta}.$$

$\square$

3 Допоміжні результати

Лема 3.1. *Нехай* $g_0(s)$ *– додатна, диференційовна, неспадна на* $(s_0, 0)$ *функція, а* $\varphi(x)$ *– додатна, неперервна, зростаюча на* $[0, +\infty)$ *функція, така що* $\int_o^{+\infty} \frac{dx}{\varphi(x)} < +\infty$*. Якщо* $h \in H$*, то* $(\exists E \subset (0,1))$ $(\forall\ r \in (e^{s_0}, 1)\backslash E)$

$$g_0'(\ln r) \le h(r)\varphi(g_0(\ln r)) \ \ \text{та} \ \ \int\limits_E h(r)dr < +\infty.$$

Доведення. Нехай $E \subset (0,1)$ – множина, на якій

$$g_0'(\ln r) > h(r)\varphi(g_0(\ln r)).$$

Позначимо $F = \{r \in E : r \ge e^{s_0}\}$, $\quad H = \{x : e^x \in F\}$. Тоді

$$h - \text{meas}E = \int\limits_E h(r)dr \le C + \int\limits_F h(r)dr \le C + \int\limits_F \frac{g_0'(\ln r)dr}{\varphi(g_0(\ln r))r}$$

$$= C + \int\limits_H \frac{g_0'(x)dx}{\varphi(g_0(x))} = C + \int\limits_{g_0(H)} \frac{dx}{\varphi(x)} < +\infty.$$

□

Позначимо $g_1(x) = \ln \Omega_f(e^x)$.

Лема 3.2. *Нехай* $\varphi_1(x)$ *і* $\varphi_2(x)$ *– додатні, неперервні, зростаючі функції на* $[0, +\infty)$: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\varphi_i(x)} < +\infty$, $h \in H$*. Тоді* $(\exists E \subset (0,1))$ $(\exists r_0 \in (0,1))(\forall\ r \in (r_0, 1)\backslash E)$

$$g_1''(\ln r) \le h(r)\varphi_2(h(r)\varphi_1(g_1(\ln r))) \ \ \text{та} \ \ \int\limits_E h(r)dr < +\infty.$$

Доведення. Очевидно, що функції $g_1(\ln r)$ і $g_1'(\ln r)$ задовольняють умови леми 3.1, тому

$$\forall\ r \in (r_0, 1)\backslash E_1 : \int\limits_{E_1} h(r)dr < +\infty \qquad g_1'(\ln r) \le h(r)\varphi(g_1(\ln r)),$$

$$\forall\ r \in (r_0, 1)\backslash E_2 : \int\limits_{E_2} h(r)dr < +\infty \qquad g_1''(\ln r) \le h(r)\varphi(g_1'(\ln r)).$$

Отже, для $r \notin E_1 \bigcup E_2 : h - \text{meas}\ E_1 \bigcup E_2 < +\infty$ отримаємо

$$g_1''(\ln r) \le h(r)\varphi_2(h(r)\varphi_1(g_1(\ln r))).$$

□

Позначимо $g_1(x) = \ln \Omega_f(e^x)$,

$$A(r) = g_1'(\ln r) = \frac{d \ln \Omega_f(r)}{d \ln r} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n|a_n|r^n}{\Omega_f(r)}, \quad B^2(r) = g_1''(\ln r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2|a_n|r^n}{\Omega_f(r)} - A^2(r).$$

Лема 3.3. $(\forall\ \varepsilon > 0)$ $(\exists E \subset (0,1))$ $(\exists r_0 \in (0,1))(\forall\ r \in (r_0,1)\backslash E)$

$$A(r) \le h(r)\ln\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon},$$

$$B^2(r) \le h^2(r)\ln\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{2+\varepsilon} \quad \text{та} \quad \int_E h(r)dr < +\infty,$$

як тільки виконується умова $\beta_{fh} > 0$.

Доведення. Виберемо в лемі 3.1 $\varphi(x) = (x+2)\ln^{1+\varepsilon_0}(2+x)$ і при $r \ge r_0$ отримаємо

$$g_1'(\ln r) = A(r) \le h(r)\varphi(g_1(\ln r)) \le h(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_1} g_1(\ln r),$$

$$A(r) \le h(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_1} g_1(\ln r). \tag{8}$$

Тепер виберемо в лемі 3.2 $\varphi_1(x) = (x+2)\ln^{1+\varepsilon_{02}}(2+x)$ та $\varphi_2(x) = (x+2)\ln^{1+\varepsilon_{03}}(2+x)$, і при $r \ge r_0$ отримаємо

$$B^2(r) \le h(r)\varphi_2(h(r)\varphi_1(g_1(\ln r))) \le h^2(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_2} g_1(\ln r)$$

$$\times\{\ln(h(r)g_1(\ln r)(g_1(\ln r))^{1+\varepsilon_2})\}^{1+\varepsilon_3} \le h^2(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_2} g_1(\ln r)$$

$$\times(\max\{\ln h(r), 2\ln g_1(\ln r)\})^{1+\varepsilon_4}. \tag{9}$$

Тепер, використавши теорему 1, маємо

$$g_1(\ln r) = \ln\Omega_f(r) \le \ln h(r) + \ln\mu_f(r) + (0,5+\varepsilon)\ln\ln\mu_f(r)$$

$$\le C\ln\ln\Omega_f(r) + (1+o(1))\ln\mu_f(r), \ \text{при } r \to 1-0.$$

$$\ln\Omega_f(r) \le C_1\ln\mu_f(r) \Rightarrow g_1(\ln r) \le C_1\ln\mu_f(r), \ \ln\ln\Omega_f(r) < C_2\ln\ln\mu_f(r). \tag{10}$$

Підставивши (10) в (8), отримаємо першу нерівність леми. З (9), врахувавши (10), одержимо

$$B^2(r) \le C_3 h^2(r)\ln\mu_f(r)\ (\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon_2}(\max\{C_4\ln\ln\Omega_f(r), 2\ln\ln\mu_f(r)\})^{1+\varepsilon_4},$$

$$B^2(r) \le h^2(r)\ln\mu_f(r)\ (\ln\ln\mu_f(r))^{2+\varepsilon}.$$

□

Лема 3.4. *([1]) X є МС, яка рівномірно обмежена числом 1. Тоді* $\forall\ \{b_k\} \subset \mathbb{Z}$ *і* $\forall\ \beta > 0$

$$P\left(\max_{0\le\psi\le2\pi}\left|\sum_{k=0}^{N} b_k e^{ik\psi}X_k(t)\right| \ge A_\beta S_N\ln^{1/2} N\right) \le \frac{1}{N^\beta}, \ N \ge 2,$$

A_β *– стала, залежна від* β, $\quad S_N^2 = \sum_{k=0}^{N}|b_k|^2$.

Лема 3.5. *([2]) Нехай $l(r)$ – неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $(0,1)$ функція, а відкрита множина $E \subset (0,1)$ така, що існує $\ 0 < p_1 \le ... \le p_n \to 1$ $(n \to +\infty)$ зовні E. Тоді існує нескінченна послідовність $0 < r_1 \le ... \le r_n \to 1$ $(n \to +\infty)$:*

(1) $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ r_n \notin E$;

(2) $(\forall n \in \mathbb{N}):\ \ln l(r_n) \geq \frac{n}{2}$;

(3) $(r_n; r_{n+1}) \cap E \neq (r_n, r_{n+1})$, $l(r_{n+1}) \leq el(r_n)$.

Лема 3.6. $\forall\ r \in (0,1) \qquad \Omega_f(r) \leq (3\sqrt{3}B(r) + 3/2)\mu_f(r)$.

Доведення. За нерівністю Чебишова для деякого $C > 0$ отримаємо

$$\Omega_f(r) \leq \frac{C}{C-1} \sum_{|n-A(r)| \leq \sqrt{CB^2(r)}} |a_n| r^n \leq \frac{C}{C-1}\mu_f(r)([A(r)+\sqrt{CB^2(r)}]-[A(r)+\sqrt{CB^2(r)}]+1),$$

тобто

$$\Omega_f(r) \leq \frac{C}{C-1}(2\sqrt{C}B(r)+1)\mu_f(r).$$

Залишається вибрати в останній нерівності $C = 3$. □

4 Доведення теореми 3

Доведення теореми 3. Розглянемо випадкову величину ξ з розподілом ймовірностей $P(\xi = n) = |a_n| r^n / \Omega_f(r)$. Легко перевірити, що математичне сподівання $M\xi = A(r)$, а дисперсія $D\xi = B^2(r)$. Нехай $C(r) = A(r)h(r)\ln \mu_f(r)$. За нерівністю Маркова

$$\sum_{n \geq C(r)} \frac{|a_n| r^n}{\Omega_f(r)} = P\{\xi \geq C(r)\} \leq \frac{M\xi}{C(r)} = \frac{A(r)}{C(r)} = \frac{1}{h(r)\ln \mu_f(r)}. \tag{11}$$

Нехай множина E – множина, зовні якої виконуються нерівності з вище наведених лем і нерівність теореми 1. За лемою 3.3 $B^2(r) \leq h^2(r)(\ln \mu_f(r))^{5/4}$, тому за лемою 3.6 маємо

$$\sum_{n \geq C(r)} |a_n| r^n \leq \frac{\Omega_f(r)}{h(r)\ln \mu_f(r)} \leq \frac{(3\sqrt{3}B(r)+3/2)\mu_f(r)}{h(r)\ln \mu_f(r)} \leq \frac{C\mu_f(r)}{\ln^{3/8} \mu_f(r)} \leq C_1 \mu_f(r).$$

За лемою 3.3 при $r \to 1$ $(r \notin E)$

$$C(r) = h(r)A(r)\ln \mu_f(r) \leq h^2(r)\ln^2 \mu_f(r)(\ln\ln \mu_f(r))^{1+\varepsilon} \leq h^2(r)\ln^{2+\varepsilon} \mu_f(r) \stackrel{def}{=} C_1(r),$$

де $\varepsilon > 0$. Прийнявши $\tilde{C}_1(r) = \max\{C_1(r), \ln^3 \mu_f(r) + \ln^2 h(r)\}$, отримаємо

$$\sum_{n \geq \tilde{C}_1(r)} |a_n| r^n \leq \sum_{n \geq C(r)} |a_n| r^n \leq C\mu_f(r).$$

Виберемо тепер у лемі 3.5

$$l(r) = \mu_f(r)\sqrt{h(r)}\ln^{\frac{1}{4}+\frac{6}{7}\varepsilon} \mu_f(r).$$

Якщо (r_k) – послідовність з леми 3.5, то нехай F_k – множина тих $t \in [0;1]$, для яких

$$\max\left\{\Big|\sum_{n \leq [\tilde{C}_1(r_k)]} a_n r^n e^{in\psi} X_n(t)\Big| :\ 0 \leq \psi \leq 2\pi\right\} \geq A_\beta S_{[\tilde{C}_1(r_k)]}(r_k)\ln^{1/2}[\tilde{C}_1(r_k)].$$

Зауважимо тепер, що $\ln l(r) \le \ln^{3/2}\mu_f(r) + \ln h(r)$ для всіх $r > r_1$, тому $\tilde{C}_1(r) \ge \ln^3\mu_f(r) + \ln^2 h(r)$ і $\tilde{C}_1(r_k) \ge 0{,}5\ln^2 l(r_k) \ge 0{,}5(k/2)^2$ для всіх $k > k_0$. Тоді за лемою 3.4 при $\beta = 1$, отримаємо

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} P(F_k) \le \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{1}{[\tilde{C}_1(r_k)]} \le \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{2}{([k/2])^2} < +\infty.$$

Звідси, за лемою Бореля-Кантелі серед подій F_k з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна кількість подій. Нехай F – подія, яка полягає в тому що, серед подій F_k відбувається нескінченна кількість подій. Тоді $F = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} F_k$, і за лемою Бореля-Кантелі $P(\overline{F}) = 1$. Зауважимо, що $\overline{F} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} F_k$ і $P\big([0;1]\setminus\overline{F}\big) = 0$, тобто для майже всіх $t \in [0;1]$ маємо $t \in \overline{F}$. Тому існує таке $k_0(t)$, що $t \in \bigcap_{k=k_0(t)}^{+\infty}\overline{F_k}$, звідки, для всіх $k \ge k_0(t)$ отримаємо $t \in \overline{F_k}$. Отже для майже всіх $t \in [0;1]$ при $k \ge k_0(t)$

$$W(r_k) \overset{\text{def}}{=} \max\left\{\Big|\sum_{n\le[\tilde{C}_1(r_k)]} a_n r^n e^{in\psi} X_n(t)\Big| :\ 0 \le \psi \le 2\pi\right\}$$
$$\le A_1 S_{[\tilde{C}_1(r_k)]}(r_k)\ln^{1/2}[\tilde{C}_1(r_k)].$$

Оскільки

$$S_N^2(r) = \sum_{k=0}^{N} |a_k|^2 r^{2k} \le \mu_f(r)\sum_{k=0}^{N}|a_k|r^k \le \mu_f(r)\Omega_f(r),$$

то, враховуючи нерівність (3), отримуємо

$$W(r_k) \le A_1\big(\mu_f(r_k)\Omega_f(r_k)\big)^{1/2}\ln^{1/2}\widetilde{C_1}(r_k) \le A_1\mu_f(r_k)\sqrt{h(r_k)}\ln^{1/4+\varepsilon/2}\mu_f(r_k)\ln^{1/2}\widetilde{C_1}(r_k).$$

Зауважимо, що для довільного досить малого $\delta > 0$

$$\ln\widetilde{C_1}(r) = \max\{2\ln h(r) + (2+\varepsilon)\ln\ln\mu_f(r), \ln(\ln^3\mu_f(r) + \ln^2 h(r))\}$$
$$\le 2\ln h(r) + 3\ln\ln\mu_f(r) \le C\ln\ln\Omega_f(r) + 3\ln\ln\mu_f(r) \le \ln^{2\delta}\mu_f(r) \quad (r\to 1).$$

Вибираючи $\delta < \frac{\varepsilon}{6}$, при $k \to +\infty$ отримаємо

$$W(r_k) \le A_1\mu_f(r_k)\sqrt{h(r_k)}\ln^{\frac14+\frac{2\varepsilon}{3}}\mu_f(r_k).$$

Оскільки $M_f(r,t) \le W(r) + \sum_{n\ge\tilde{C}_1(r)}|a_n|r^n$, то для майже всіх $t \in [0;1]$ і для всіх $k \ge k(t)$

$$M_f(r_k,t) \le A_1\sqrt{h(r_k)}\mu_f(r_k)\ln^{\frac14+\frac{2\varepsilon}{3}}\mu_f(r_k) + C\mu_f(r_k)$$
$$\le \sqrt{h(r_k)}\mu_f(r_k)\ln^{\frac14+\frac{6\varepsilon}{7}}\mu_f(r_k).$$

Нехай тепер $r \ge r_{k(t)}$, $r_i \notin E$. Тоді існує p, для якого $r \in (r_p, r_{p+1})$. Врахувавши, що $(r_p, r_{p+1}) \cap E \ne (r_p, r_{p+1})$, то за лемою маємо, 3.5 $l(r_{p+1}) \le el(r_p) \le el(r)$. Оскільки, $l(r) = \sqrt{h(r)}\mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{1/4+6/7\varepsilon}$, при $r \to 1$ $(r \in (r_p, r_{p+1}))$ отримуємо

$$M_f(r,t) \le M_f(r_{p+1}, f) \le l(r_{p+1}) \le el(r)$$
$$= e\sqrt{h(r)}\mu_f(r)\ln^{1/4+6/7\varepsilon}\mu_f(r) \le \sqrt{h(r)}\mu_f(r)\ln^{1/4+\varepsilon}\mu_f(r).$$

Теорему 3 доведено. □

Література

1. Кахан Ж.– П. Случайные функциональные ряды. – М: Мир, 1973. – 302с.
2. Скасків О.Б., Зрум О.В. *Про виняткову множину у нерівностях типу Вімана для цілих функцій* // Матем. Студії. – 2004. – Т.21, №1. – С.15–24.
3. Скасків О.Б. *Про класичну нерівність Вімана для цілих рядів Діріхле* // Вісн. Львів. ун–ту, сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С.180–182.
4. Скасків О.Б., Філевич П.В.*Про величину виняткової множини у теоремі Вімана* // Матем. Студії. – 1999. – Т.12, №1. – С.31–36.
5. Сулейманов Н.В. *Оценка типу Вимана–Валирона для степенних рядов с конечным радиусом сходимости и их точность* // ДАН СССР.– 1980. – Т.253, №4. – С.822–824.
6. Філевич П.В. *Випадкові цілі функції* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Київ: Інст. мат. – 1996. – Вип. 12. – С.199–208.
7. Філевич П.В. *Оцінки типу Вімана-Валірона для випадкових аналітичних у крузі функцій* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Київ: Інст. мат. – 1997. – Вип.15. – С.227–238.
8. Філевич П.В. *Співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом для випадкових цілих функцій* // Матем. Студії. – 1997. – Т.7, №2. – С.165–174.
9. Jakubovski J., Kwapien S. *On multiplicative system of functions*, Bull. L'Acad. Polon. Sci, **27** (1979), 689–694.
10. Rosenbloom P.C. *Probability and entire functions*, Stud. Math. Anal. and Related Topics, Stanford: Calif. Univ. Press, (1962), 325–332.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна

Надійшло 05.07.2010

Skaskiv O.B., Kuryliak A.O. *Direct analogues of Wiman's inequality for analytic functions in the unit disc*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 109–118.

Let $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ be an analytic function on $\{z:|z|<1\}$, $h\in H$ and $\Omega_f(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$. If

$$\beta_{fh}=\varliminf_{r\to1}\frac{\ln\ln\Omega_f(r)}{\ln h(r)}=+\infty,$$

then Wiman's inequality $M_f(r)\le\mu_f(r)\ln^{1/2+\delta}\mu_f(r)$ is true for all $r\in(r_0,1)\backslash E(\delta)$, where $h-\text{meas}\ E<+\infty$.

Скаскив О.Б., Куриляк А.О. *Прямые аналоги неравенства Вимана для функций аналитических в единичном круге* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 109–118.

Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ аналитическая функция в $\{z:|z|<1\}$, $h\in H$ и $\Omega_f(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$. Если

$$\beta_{fh}=\varliminf_{r\to1}\frac{\ln\ln\Omega_f(r)}{\ln h(r)}=+\infty,$$

тогда имеет место неравенство Вимана $M_f(r)\le\mu_f(r)\ln^{1/2+\delta}\mu_f(r)$ для всех $r\in(r_0,1)\backslash E(\delta)$, где $h-\text{meas}\ E<+\infty$.

Карпатські математичні
публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.2, №.1

УДК 512.536.7

Chuchman I.Ya., Gutik O.V.

TOPOLOGICAL MONOIDS OF ALMOST MONOTONE INJECTIVE CO-FINITE PARTIAL SELFMAPS OF POSITIVE INTEGERS

Chuchman I.Ya., Gutik O.V. *Topological monoids of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of the set of positive integers*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 119–132.

In this paper we study the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\nearrow}(\mathbb{N})$ of partial co-finite almost monotone bijective transformations of the set of positive integers $\mathbb{N}$. We show that the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\nearrow}(\mathbb{N})$ has algebraic properties similar to the bicyclic semigroup: it is bisimple and all of its non-trivial group homomorphisms are either isomorphisms or group homomorphisms. Also we prove that every Baire topology τ on $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\nearrow}(\mathbb{N})$ such that $(\mathscr{I}_{\infty}^{\,\nearrow}(\mathbb{N}),\tau)$ is a semitopological semigroup is discrete, describe the closure of $(\mathscr{I}_{\infty}^{\,\nearrow}(\mathbb{N}),\tau)$ in a topological semigroup and construct non-discrete Hausdorff semigroup topologies on $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\nearrow}(\mathbb{N})$.

Introduction and preliminaries

In this paper all spaces are assumed to be Hausdorff. Furthermore we shall follow the terminology of [6, 7, 10, 27]. By ω we shall denote the first infinite cardinal.

An algebraic semigroup S is called *inverse* if for any element $x \in S$ there exists the unique $x^{-1} \in S$ such that $xx^{-1}x = x$ and $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. The element x^{-1} is called the *inverse of* $x \in S$. If S is an inverse semigroup, then the function $\operatorname{inv}\colon S \to S$ which assigns to every element x of S its inverse element x^{-1} is called an *inversion*.

If S is a semigroup, then by $E(S)$ we shall denote the *band* (i. e. the subset of idempotents) of S. If the band $E(S)$ is a non-empty subset of S, then the semigroup operation on S determines the partial order $\leqslant$ on $E(S)$: $e \leqslant f$ if and only if $ef = fe = e$. This order is called *natural.* A *semilattice* is a commutative semigroup of idempotents. A semilattice E is called *linearly ordered* or *chain* if the semilattice operation admits a linear natural order on E. A *maximal chain* of a semilattice E is a chain which is properly contained in no other chain of E. The Axiom of Choice implies the existence of maximal chains in any partially ordered set. According to [25, Definition II.5.12] chain L is called ω-chain if L is isomorphic to $\{0,-1,-2,-3,\ldots\}$ with the usual order $\leqslant$. Let E be a semilattice and $e \in E$. We denote

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20M20, 20M18, 22A15, 54E52, 54H15.
Key words and phrases: Topological semigroup, semitopological semigroup, semigroup of bijective partial transformations, closure, Baire space.

${\downarrow}e = \{f \in E \mid f \leqslant e\}$ and ${\uparrow}e = \{f \in E \mid e \leqslant f\}$. By $(\mathscr{P}_{<\omega}(\mathbb{N}), \subseteq)$ we shall denote the free semilattice with identity over the set of positive integers $\mathbb{N}$.

If S is a semigroup, then by $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$ and $\mathscr{H}$ the Green relations on S (see [7]):

$$
\begin{aligned}
&a\mathscr{R}b \text{ if and only if } aS^1 = bS^1;\\
&a\mathscr{L}b \text{ if and only if } S^1a = S^1b;\\
&\mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L};\\
&\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}.
\end{aligned}
$$

A semigroup S is called *simple* if S does not contain proper two-sided ideals and *bisimple* if all elements of S are $\mathscr{D}$-equivalent.

A *semitopological* (resp. *topological*) *semigroup* is a topological space together with a separately (resp. jointly) continuous semigroup operation.

Let $\mathscr{I}_\lambda$ denote the set of all partial one-to-one transformations of a set X of cardinality λ together with the following semigroup operation: $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ if $x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \mid y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}$, for $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda$. The semigroup $\mathscr{I}_\lambda$ is called the *symmetric inverse semigroup* over the set X (see [7]). The symmetric inverse semigroup was introduced by Wagner [29] and it plays a major role in the theory of semigroups.

We denote $\mathscr{I}_\lambda^n = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \mid \operatorname{rank}\alpha \leqslant n\}$, for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Obviously, $\mathscr{I}_\lambda^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) is an inverse semigroup, $\mathscr{I}_\lambda^n$ is an ideal of $\mathscr{I}_\lambda$ for each $n = 1, 2, 3, \ldots$. Further, we shall call the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ the *symmetric inverse semigroup of finite transformations of the rank n*.

Let $\mathbb{N}$ be the set of all positive integers. By $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ we shall denote the semigroup of monotone, non-decreasing, injective partial transformations of $\mathbb{N}$ such that the sets $\mathbb{N} \setminus \operatorname{dom}\varphi$ and $\mathbb{N} \setminus \operatorname{rank}\varphi$ are finite for all $\varphi \in \mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$. Obviously, $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is an inverse subsemigroup of the semigroup $\mathscr{I}_\omega$. The semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is called *the semigroup of co-finite monotone partial bijections* of $\mathbb{N}$ [19].

We shall denote every element α of the semigroup $\mathscr{I}_\omega$ by $\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \ldots \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \ldots \end{pmatrix}$ and this means that α maps the positive integer n_i into m_i for all $i = 1, 2, 3, \ldots$. We observe that an element α of the semigroup $\mathscr{I}_\omega$ is an element of the semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ if and only if it satisfies the following conditions:

(*i*) the sets $\mathbb{N} \setminus \{n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots\}$ and $\mathbb{N} \setminus \{m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots\}$ are finite;

(*ii*) $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$ and $m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < \ldots$.

A partial map $\alpha \colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ is called *almost monotone* if there exists a finite subset A of $\mathbb{N}$ such that the restriction $\alpha|_{\mathbb{N}\setminus A} \colon \mathbb{N} \setminus A \rightharpoonup \mathbb{N}$ is a monotone partial map.

By $\mathscr{I}_\infty^{\,\lefteqn{\nearrow}\rceil}(\mathbb{N})$ we shall denote the semigroup of monotone, almost non-decreasing, injective partial transformations of $\mathbb{N}$ such that the sets $\mathbb{N} \setminus \operatorname{dom}\varphi$ and $\mathbb{N} \setminus \operatorname{rank}\varphi$ are finite for all $\varphi \in \mathscr{I}_\infty^{\,\lefteqn{\nearrow}\rceil}(\mathbb{N})$. Obviously, $\mathscr{I}_\infty^{\,\lefteqn{\nearrow}\rceil}(\mathbb{N})$ is an inverse subsemigroup of the semigroup $\mathscr{I}_\omega$ and the semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is an inverse subsemigroup of $\mathscr{I}_\infty^{\,\lefteqn{\nearrow}\rceil}(\mathbb{N})$ too. The semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\,\lefteqn{\nearrow}\rceil}(\mathbb{N})$ is called *the semigroup of co-finite almost monotone partial bijections* of $\mathbb{N}$. We observe that an element α of the semigroup $\mathscr{I}_\omega$ is an element of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\not\nearrow}(\mathbb{N})$ if and only if it satisfies conditions (i) and (iii):

(iii) there exists a positive integer i such that $n_i < n_{i+1} < n_{i+2} < n_{i+3} < \ldots$ and $m_i < m_{i+1} < m_{i+2} < m_{i+3} < \ldots$.

Further by $\mathbb{I}$ we shall denote the identity of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\not\nearrow}(\mathbb{N})$.

The bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$ is the semigroup with the identity 1 generated by elements p and q subject only to the condition $pq = 1$. The bicyclic semigroup is bisimple and every one of its congruences is either trivial or a group congruence. Moreover, every non-annihilating homomorphism h of the bicyclic semigroup is either an isomorphism or the image of $\mathscr{C}(p,q)$ under h is a cyclic group (see [7, Corollary 1.32]). The bicyclic semigroup plays an important role in algebraic theory of semigroups and in the theory of topological semigroups. For example the well-known result of Andersen [1] states that a (0–)simple semigroup is completely (0–)simple if and only if it does not contain the bicyclic semigroup. The bicyclic semigroup admits only the discrete topology and a topological semigroup S can contain $\mathscr{C}(p,q)$ only as an open subset [9]. Neither stable nor Γ-compact topological semigroups can contain a copy of the bicyclic semigroup [2, 21]. Also, the bicyclic semigroup does not embed into a countably compact topological inverse semigroup [18]. Moreover, in [3] and [4] the conditions were given when a countable compact or pseudocompact topological semigroup does not contain the bicyclic semigroup. However, Banakh, Dimitrova and Gutik constructed with set-theoretic assumptions (Continuum Hypothesis or Martin Axiom) an example of a Tychonoff countable compact topological semigroup which contains the bicyclic semigroup [4].

Many semigroup theorists have considered a topological semigroup of (continuous) transformations of an arbitrary topological space. Beĭda [5], Orlov [23, 24], and Subbiah [28] have considered semigroup and inverse semigroup topologies of semigroups of partial homeomorphisms of some classes of topological spaces.

Gutik and Pavlyk [14] considered the special case of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$: an infinite topological semigroup of $\lambda \times \lambda$-matrix units B_λ. They showed that an infinite topological semigroup of $\lambda \times \lambda$-matrix units B_λ does not embed into a compact topological semigroup and that B_λ is algebraically h-closed in the class of topological inverse semigroups. They also described the Bohr compactification of B_λ, minimal semigroup and minimal semigroup inverse topologies on B_λ.

Gutik, Lawson and Repovš [13] introduced the notion of a semigroup with a tight ideal series and investigated their closures in semitopological semigroups, particularly inverse semigroups with continuous inversion. As a corollary they showed that the symmetric inverse semigroup of finite transformations $\mathscr{I}_\lambda^n$ of infinite cardinal λ is algebraically closed in the class of (semi)topological inverse semigroups with continuous inversion. They also derived related results about the nonexistence of (partial) compactifications of classes of considered semigroups.

Gutik and Reiter [16] showed that the topological inverse semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ is algebraically h-closed in the class of topological inverse semigroups. They also proved that a topological semigroup S with countably compact square $S \times S$ does not contain the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$

for infinite cardinals λ and showed that the Bohr compactification of an infinite topological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ is the trivial semigroup.

In [17] Gutik and Reiter showed that the symmetric inverse semigroup of finite transformations $\mathscr{I}_\lambda^n$ of infinite cardinal λ is algebraically closed in the class of semitopological inverse semigroups with continuous inversion. There they described all congruences on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ and all compact and countably compact topologies τ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ such that $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is a semitopological semigroup.

Gutik, Pavlyk and Reiter [15] showed that a topological semigroup of finite partial bijections $\mathscr{I}_\lambda^n$ of infinite set with a compact subsemigroup of idempotents is absolutely H-closed. They proved that no Hausdorff countably compact topological semigroup and no Tychonoff topological semigroup with pseudocompact square contain $\mathscr{I}_\lambda^n$ as a subsemigroup. They proved that every continuous homomorphism from topological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ into a Hausdorff countably compact topological semigroup or Tychonoff topological semigroup with pseudocompact square is annihilating. Also they gave sufficient conditions for a topological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^1$ to be non-H-closed and showed that the topological inverse semigroup $\mathscr{I}_\lambda^1$ is absolutely H-closed if and only if the band $E(\mathscr{I}_\lambda^1)$ is compact [15].

In [19] Gutik and Repovš studied the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ of partial cofinite monotone bijective transformations of the set of positive integers $\mathbb{N}$. They showed that the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ has algebraic properties similar to the bicyclic semigroup: it is bisimple and all of its non-trivial group homomorphisms are either isomorphisms or group homomorphisms. They proved that every locally compact topology τ on $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ such that $(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}),\tau)$ is a topological inverse semigroup, is discrete and describe the closure of $(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}),\tau)$ in a topological semigroup.

We remark that the bicyclic semigroup is isomorphic to the semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)$ which is generated by partial transformations π and σ of the set of positive integers $\mathbb{N}$, defined as follows:

$$(n)\pi = n+1 \quad \text{if } n \geqslant 1, \qquad \text{and} \qquad (n)\sigma = n-1 \quad \text{if } n > 1.$$

Therefore the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ contains an isomorphic copy of the bicyclic semigroup $\mathscr{C}(p,q)$.

In the present paper we study the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ of partial co-finite almost monotone bijective transformations of the set of positive integers $\mathbb{N}$. We show that the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ has algebraic properties similar to the bicyclic semigroup: it is bisimple and all of its non-trivial group homomorphisms are either isomorphisms or group homomorphisms. Also we prove that every Baire topology τ on $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ such that $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau)$ is a semitopological semigroup is discrete, describe the closure of $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau)$ in a topological semigroup and construct non-discrete Hausdorff semigroup topologies on $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

1 Algebraic properties of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$

Proposition 1.1. *(i) An element α of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ is an idempotent if and only if $(x)\alpha = x$ for every $x \in \operatorname{dom}\alpha$, and hence $E(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})) = E(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}))$.*

(ii) If $\varepsilon,\iota \in E(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}))$, then $\varepsilon \leqslant \iota$ if and only if $\operatorname{dom}\varepsilon \subseteq \operatorname{dom}\iota$.

(*iii*) *The semilattice* $E(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N}))$ *is isomorphic to* $(\mathscr{P}_{<\omega}(\mathbb{N}),\subseteq)$ *under the mapping* $(\varepsilon)h=\mathbb{N}\setminus\operatorname{dom}\varepsilon$.

(*iv*) *Every maximal chain in* $E(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N}))$ *is an* ω*-chain.*

(*v*) *For every* $\varepsilon,\iota\in E(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N}))$ *there exists* $\alpha\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ *such that* $\alpha\alpha^{-1}=\varepsilon$ *and* $\alpha^{-1}\alpha=\iota$.

(*vi*) $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ *is a simple semigroup.*

(*vii*) $\alpha\mathscr{R}\beta$ *in* $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ *if and only if* $\operatorname{dom}\alpha=\operatorname{dom}\beta$.

(*viii*) $\alpha\mathscr{L}\beta$ *in* $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ *if and only if* $\operatorname{rank}\alpha=\operatorname{rank}\beta$.

(*ix*) $\alpha\mathscr{H}\beta$ *in* $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ *if and only if* $\operatorname{dom}\alpha=\operatorname{dom}\beta$ *and* $\operatorname{rank}\alpha=\operatorname{rank}\beta$.

(*x*) $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ *is a bisimple semigroup.*

Proof. Statements $(i)-(iv)$ are trivial and their proofs follow from the definition of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

(v) For the idempotents $\varepsilon=\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots \end{pmatrix}$ and $\iota=\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & \dots \end{pmatrix}$ we put $\alpha=\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & \dots \end{pmatrix}$. Then $\alpha\alpha^{-1}=\varepsilon$ and $\alpha^{-1}\alpha=\iota$.

(vi) Let $\alpha=\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \dots \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots \end{pmatrix}$ and $\beta=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & \dots \end{pmatrix}$ be any elements of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$, where $n_i,m_i,k_i,l_i\in\mathbb{N}$ for $i=1,2,3,\dots$. We put $\gamma=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \dots \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \dots \end{pmatrix}$ and $\delta=\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & \dots \end{pmatrix}$. Then we have that $\gamma\alpha\delta=\beta$. Therefore $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})\cdot\alpha\cdot\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})=\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ for any $\alpha\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ and hence $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ is a simple semigroup.

(vii) Let $\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ be such that $\alpha\mathscr{R}\beta$. Since $\alpha\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})=\beta\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ is an inverse semigroup, Theorem 1.17 [7] implies that $\alpha\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})=\alpha\alpha^{-1}\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$, $\beta\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})=\beta\beta^{-1}\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\alpha\alpha^{-1}=\beta\beta^{-1}$. Hence $\operatorname{dom}\alpha=\operatorname{dom}\beta$.

Conversely, let $\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ be such that $\operatorname{dom}\alpha=\operatorname{dom}\beta$. Then $\alpha\alpha^{-1}=\beta\beta^{-1}$. Since $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ is an inverse semigroup, Theorem 1.17 [7] implies that $\alpha\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})=\alpha\alpha^{-1}\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})=\beta\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ and hence $\alpha\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})=\beta\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

The proof of statement ($viii$) is similar to (vii).

Statement (ix) follows from (vii) and ($viii$).

(x) By statements (vii) and ($viii$) it is sufficient to show that every distinct idempotents of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$ are $\mathscr{D}$-equivalent. For idempotents $\varepsilon=\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots \end{pmatrix}$ and $\iota=\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & \dots \end{pmatrix}$ we put $\alpha=\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & \dots \end{pmatrix}$. Then by statements ($vii$) and ($viii$) we have that $\varepsilon\mathscr{R}\alpha$ and $\alpha\mathscr{L}\iota$, and hence $\varepsilon\mathscr{D}\iota$. $\square$

Proposition 1.2. *For every $\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$, both sets $\{\chi\in\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\mid\alpha\cdot\chi=\beta\}$ and $\{\chi\in\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\mid\chi\cdot\alpha=\beta\}$ are finite. Consequently, every right translation and every left translation by an element of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is a finite-to-one map.*

Proof. We denote $A=\{\chi\in\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\mid\alpha\cdot\chi=\beta\}$ and $B=\{\chi\in\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\mid\alpha^{-1}\cdot\alpha\cdot\chi=\alpha^{-1}\cdot\beta\}$. Then $A\subseteq B$ and the restriction of any partial map $\chi\in B$ to $\operatorname{dom}(\alpha^{-1}\cdot\alpha)$ coincides with the partial map $\alpha^{-1}\cdot\beta$. Since every partial map from the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is almost monotone (i. e., almost non-decreasing) and co-finite, the set B is finite and hence so is A. $\square$

For an arbitrary non-empty set X we denote by $\mathsf{S}_{\infty}(X)$ the group of all bijective transformations of X with finite supports (i. e., $\alpha\in\mathsf{S}_{\infty}(X)$ if and only if the set $\{x\in X\mid(x)\alpha\neq x\}$ is finite).

The definition of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ implies the following proposition:

Proposition 1.3. *Every maximal subgroup of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is isomorphic to $\mathsf{S}_{\infty}(\mathbb{N})$.*

The semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ contains $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ as a subsemigroup and Theorem 2.9 of [19] states that if S is a semigroup and $h\colon\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\to S$ is a non-annihilating homomorphism, then either h is a monomorphism or $(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}))h$ is a cyclic subgroup of S. This arises the following problem: *To describe all homomorphisms of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$.*

The definition of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ implies the following proposition:

Proposition 1.4. *For every $\gamma\in\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ there exists $n_{\gamma}\in\mathbb{N}$ such that $i-n_{\gamma}=(i)\alpha-(n_{\gamma})\alpha$ for all $i\geqslant n_{\gamma}$, $i\in\mathbb{N}$.*

Lemma 1.1. *For every $\gamma\in\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ there exists an idempotent $\varepsilon\in\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)$ such that $\gamma\cdot\varepsilon,\varepsilon\cdot\gamma\in\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)$. Consequently, for every idempotent $\iota\in\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ there exists $\varepsilon_0\in E(\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma))$ such that $\iota\cdot\varepsilon_0=\varepsilon_0\cdot\iota=\varepsilon_0$.*

Proof. Let $n_{\gamma}\in\mathbb{N}$ be such as in the statement of Proposition 1.4. We put $m_{\gamma}=\max\{n_{\gamma},(n_{\gamma})\gamma\}$ and define

$$\varepsilon=\left(\begin{array}{cccc} m_{\gamma} & m_{\gamma}+1 & m_{\gamma}+2 & \cdots\\ m_{\gamma} & m_{\gamma}+1 & m_{\gamma}+2 & \cdots\end{array}\right).$$

Then we have that $\gamma\cdot\varepsilon,\varepsilon\cdot\gamma\in\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)$.

Let ι be an arbitrary idempotent of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$. By the first assertion of the lemma there exists $\varepsilon\in E(\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma))$ such that $\iota\cdot\varepsilon\in\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)$. Since the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is inverse Theorem 1.17 [7] implies that $\varepsilon_0=\iota\cdot\varepsilon=\varepsilon\cdot\iota$ is an idempotent of $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)$. Hence we have that $\iota\cdot\varepsilon_0=\varepsilon_0\cdot\iota=\varepsilon_0$. $\square$

Lemma 1.2. *Let S be a semigroup and $h\colon\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\to S$ be a non-annihilating homomorphism such that the set $\big(E(\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma))\big)h$ is singleton. Then $\big(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\big)h=\big(\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)\big)h$.*

Proof. Suppose that $\big(E(\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma))\big)h=\{e\}$. Since $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ is an inverse semigroup and $E(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}))=E(\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma))$ we conclude that e is a unique idempotent in $\big(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\big)h$. Fix an arbitrary element γ of $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$. Let ε be such as in Lemma 1.1. Then we have

$$(\gamma)h=(\gamma\cdot\gamma^{-1}\cdot\gamma)h=(\gamma)h\cdot(\gamma^{-1}\cdot\gamma)h=(\gamma)h\cdot(\varepsilon)h=(\gamma\cdot\varepsilon)h\in\big(\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)\big)h,$$

the assertion of the lemma holds. □

We need the following theorem from [19]:

Theorem 1 ([19, Theorem 2.9]). *Let S be a semigroup and $h\colon \mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\to S$ a non-annihilating homomorphism. Then either h is a monomorphism or $(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}))h$ is a cyclic subgroup of S.*

Lemma 1.3. *Let S be a semigroup and $h\colon \mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})\to S$ be a homomorphism such that the restriction $h|_{\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)\to\big(\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(\pi,\sigma)\big)h\subseteq S$ is an isomorphism. Then h is an isomorphism.*

Proof. Suppose to the contrary that the map $h\colon \mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})\to S$ is not an isomorphism. Then by Theorem 1 we have that the restriction $h|_{\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})}\colon \mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\to(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}))h\subseteq S$ is an isomorphism. Since $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ is an inverse semigroup we conclude that if $(\alpha)h=(\beta)h$ for some $\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ then $\alpha\mathscr{H}\beta$. Otherwise if α and β are not $\mathscr{H}$-equivalent and $(\alpha)h\neq(\beta)h$ then $(\alpha^{-1})h\neq(\beta^{-1})h$ and therefore either $(\alpha\alpha^{-1})h\neq(\beta\beta^{-1})h$ or $(\alpha^{-1}\alpha)h\neq(\beta^{-1}\beta)h$, a contradiction to the assumption that the restriction $h|_{\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})}\colon \mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})\to(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}))h\subseteq S$ is an isomorphism. Thus by the Green Theorem (see [7, Theorem 2.20]) without loss of generality we can assume that $(\mathbb{I})h=(\alpha)h$ for some $\alpha\in H(\mathbb{I})$. Since the group $\mathsf{S}_{\infty}(\mathbb{N})$ has only one proper normal subgroup and such subgroup is the group $\mathsf{A}_{\infty}(\mathbb{N})$ of even permutations of $\mathbb{N}$ (see [22] and [12, pp. 313–314, Example]) we conclude that $(\mathsf{A}_{\infty}(\mathbb{N}))h=(\mathbb{I})h$. We denote

$$\beta=\left(\begin{array}{cccccccc}1&2&3&4&5&\cdots&n&\cdots\\2&3&1&4&5&\cdots&n&\cdots\end{array}\right)\qquad\text{and}\qquad\varepsilon_{1,2}=\left(\begin{array}{cccccc}3&4&5&\cdots&n&\cdots\\1&4&5&\cdots&n&\cdots\end{array}\right).$$

Then $\beta\in\mathsf{A}_{\infty}(\mathbb{N})$. Therefore we have that

$$(\varepsilon_{1,2})h=(\varepsilon_{1,2}\cdot\mathbb{I})h=(\varepsilon_{1,2})h\cdot(\mathbb{I})h=(\varepsilon_{1,2})h\cdot(\beta)h=(\varepsilon_{1,2}\cdot\beta)h$$

and similarly $(\varepsilon_{1,2})h=(\beta\cdot\varepsilon_{1,2})h$. Since

$$\beta\cdot\varepsilon_{1,2}=\left(\begin{array}{cccccc}2&4&5&\cdots&n&\cdots\\3&4&5&\cdots&n&\cdots\end{array}\right)\qquad\text{and}\qquad\varepsilon_{1,2}\cdot\beta=\left(\begin{array}{cccccc}3&4&5&\cdots&n&\cdots\\1&4&5&\cdots&n&\cdots\end{array}\right)$$

we conclude that $\beta\cdot\varepsilon_{1,2},\varepsilon_{1,2}\cdot\beta\in\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$. Hence by Theorem 1 the set $(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}))h$ contains only one idempotent and therefore the assertions of Lemma 1.2 hold. This completes the proof of the lemma. □

Theorem 1 and Lemmas 1.2 and 1.3 imply the following theorem:

Theorem 2. *Let S be a semigroup and $h\colon \mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})\to S$ a non-annihilating homomorphism. Then either h is a monomorphism or $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}))h$ is a cyclic subgroup of S.*

2 Topologizations of some classes of countable semigroups

Definition 2.1. *We shall say that a semigroup S has:*

- *an* S-property *if for every $a, b \in S$ there exist $c, d \in S^1$ such that $c \cdot a \cdot d = b$;*
- *an* F-property *if for every $a, b, c, d \in S^1$ the sets $\{x \in S \mid a \cdot x = b\}$ and $\{x \in S \mid x \cdot c = d\}$ are finite or empty;*
- *an* FS-property *if S has F- and S-properties.*

Remark 2.1. *We observe that*

1) *every simple (resp., left simple, right simple) semigroup has* S-property*;*
2) *every free (Abelian) semigroup has* F-property*;*
3) *$\mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$, $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and the bicyclic semigroup have FS-property.*

Lemma 2.1. *Let S be a Hausdorff semitopological semigroup with FS-property. If S has an isolated point then S is the discrete topological space.*

Proof. Let t be an isolated point in S. Since the semigroup S has the FS-*property* we conclude that for every $s \in S$ there exist $a, b \in S^1$ such that $a \cdot s \cdot b = t$ and the equation $a \cdot x \cdot b = t$ has a finite set of solutions. Therefore the continuity of translations in (S, τ) implies that the element s has a finite open neighbourhood, and hence Hausdorffness of (S, τ) implies that s is an isolated point of (S, τ). This completes the proof of the lemma. $\square$

A topological space X is called *Baire* if for each sequence $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ of nowhere dense subsets of X the union $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ is a co-dense subset of X [10].

Theorem 3. *Let S be a countable semigroup with FS-property. Then every Baire topology τ on S such that (S, τ) is a Hausdorff semitopological semigroup is discrete.*

Proof. We consider countable cover $\Gamma = \{s \mid s \in S\}$ of the Baire space (S, τ). Then there exists an isolated point t in S. By Lemma 2.1 the topological space is discrete. $\square$

A Tychonoff space X is called *Čech complete* if fot every compactification cX of X the remainder $cX \setminus c(X)$ is an F_σ-set in cX [10].

Since every Čech complete space (and hence every locally compact space) is Baire, Theorem 3 implies the following:

Corollary 2.1. *Every Hausdorff Čech complete (locally compact) countable semitopological semigroup with FS-property is discrete.*

A topological space X is called *hereditary Baire* if every closed subset of X is a Baire space [10]. Every Čech complete (and hence locally compact) space is hereditary Baire (see [10, Theorem 3.9.6]). We shall say that a Hausdorff semitopological semigroup S is an *I-Baire space* if either sS or Ss is a Baire space for every $s \in S$.

Remark 2.2. *We observe that every left ideal Ss and every right ideal sS of a regular semigroup S are generated by some idempotents of S. Therefore every principal left or right ideal of a regular Hausdorff semitopological semigroup S is a closed subset of S. Hence every regular Hausdorff hereditary Baire semitopological semigroup is the I-Baire space.*

Theorem 4. *Let S be a countable semilattice with F-property. Then every I-Baire topology τ on S such that (S,τ) is a Hausdorff semitopological semilattice is discrete.*

Proof. Let s be an arbitrary element of the semilattice S. We consider a countable cover $\Gamma = \{e \mid e \in sS\}$ of sS. Since (S,τ) is an I-Baire space we conclude that there exists an isolated point t in sS. Since S is a semilattice we have that $s \cdot t = t$. Then ${\uparrow_{sS}} t = \{x \in sS \mid x \cdot t = t\}$ is a finite subset of S which contains s and by Proposition VI-1.13 [11] we get that ${\uparrow_{sS}} t$ is an open subset of sS. Hence there exists an open neighbourhood $U(s)$ of s in S such that $U(s) \cap sS = \{s\}$. The continuity of translations in S implies that there exists an open neighbourhood $V(s) \subseteq U(s)$ such that $V(s) \subseteq \{x \in S \mid x \cdot s = s\}$. Since the semilattice S is Hausdorff and has F-property we have that s is an isolated point of S. □

Theorem 4 implies the following:

Corollary 2.2. *Every I-Baire topology τ on the countable free semilattice FSL_ω such that (FSL_ω,τ) is a Hausdorff semitopological semilattice is discrete.*

3 On topologizations and closures of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$

Theorem 3 implies the following two corollaries:

Corollary 3.1. *Every Baire topology τ on $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ such that $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau)$ is a Hausdorff semitopological semigroup is discrete.*

Corollary 3.2. *Every Baire topology τ on $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ such that $(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}),\tau)$ is a Hausdorff semitopological semigroup is discrete.*

We observe that Corollary 3.2 generalizes Theorem 3.3 from [19].

The following example shows that there exists a non-discrete topology τ_F on the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ such that $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau_F)$ is a Tychonoff topological inverse semigroup.

Example 3.1. *We define a topology τ_F on the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ as follows. For every $\alpha \in \mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ we define a family*

$$\mathscr{B}_F(\alpha) = \{U_\alpha(F) \mid F \text{ is a finite subset of } \operatorname{dom}\alpha\},$$

where

$$U_\alpha(F) = \{\beta \in \mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}) \mid \operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta, \operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta \text{ and } (x)\beta = (x)\alpha \text{ for all } x \in F\}.$$

Since conditions (BP1)–(BP3) [10] hold for the family $\{\mathscr{B}_F(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})}$ we conclude that the family $\{\mathscr{B}_F(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})}$ is the base of the topology τ_F on the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

Proposition 3.1. *$(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau_F)$ is a Tychonoff topological inverse semigroup.*

Proof. Let α and β be arbitrary elements of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$. We put $\gamma=\alpha\beta$ and let $F=\{n_1,\ldots,n_i\}$ be a finite subset of $\operatorname{dom}\gamma$. We denote $m_1=(n_1)\alpha,\ldots,m_i=(n_i)\alpha$ and $k_1=(n_1)\gamma,\ldots,k_i=(n_i)\gamma$. Then we get that $(m_1)\beta=k_1,\ldots,(m_i)\beta=k_i$. Hence we have that

$$U_\alpha(\{n_1,\ldots,n_i\})\cdot U_\beta(\{m_1,\ldots,m_i\})\subseteq U_\gamma(\{n_1,\ldots,n_i\})$$

and

$$\big(U_\gamma(\{n_1,\ldots,n_i\})\big)^{-1}\subseteq U_{\gamma^{-1}}(\{k_1,\ldots,k_i\}).$$

Therefore the semigroup operation and the inversion are continuous in $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau_F)$.

We observe that the group of units $H(\mathbb{I})$ of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ with the induced topology $\tau_F(H(\mathbb{I}))$ from $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau_F)$ is a topological group (see [12, pp. 313–314, Example] and [22]) and the definition of the topology τ_F implies that every $\mathscr{H}$-class of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ is an open-and-closed subset of the topological space $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau_F)$. Therefore Theorem 2.20 [7] implies that the topological space $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau_F)$ is homeomorphic to a countable topological sum of topological copies of $\big(H(\mathbb{I}),\tau_F(H(\mathbb{I}))\big)$. Since every T_0-topological group is a Tychonoff topological space (see [26, Theorem 3.10]) we conclude that the topological space $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau_F)$ is Tychonoff too. This completes the proof of the proposition. $\square$

Remark 3.1. *We observe that the topology τ_F on $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ induces discrete topologies on the subsemigroups $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $E(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}))$.*

Example 3.2. *We define a topology τ_{WF} on the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ as follows. For every $\alpha\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ we define a family*

$$\mathscr{B}_{WF}(\alpha)=\{U_\alpha(F)\mid F \textit{ is a finite subset of } \operatorname{dom}\alpha\},$$

where

$$U_\alpha(F)=\{\beta\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})\mid \operatorname{dom}\beta\subseteq\operatorname{dom}\alpha \textit{ and } (x)\beta=(x)\alpha \textit{ for all } x\in F\}.$$

Since conditions (BP1)–(BP3) [10] hold for the family $\{\mathscr{B}_{WF}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})}$ we conclude that the family $\{\mathscr{B}_{WF}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})}$ is the base of the topology τ_{WF} on the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

Proposition 3.2. *$(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau_{WF})$ is a Hausdorff topological inverse semigroup.*

Proof. Let α and β be arbitrary elements of the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$. We put $\gamma=\alpha\beta$ and let $F=\{n_1,\ldots,n_i\}$ be a finite subset of $\operatorname{dom}\gamma$. We denote $m_1=(n_1)\alpha,\ldots,m_i=(n_i)\alpha$ and $k_1=(n_1)\gamma,\ldots,k_i=(n_i)\gamma$. Then we get that $(m_1)\beta=k_1,\ldots,(m_i)\beta=k_i$. Hence we have that

$$U_\alpha(\{n_1,\ldots,n_i\})\cdot U_\beta(\{m_1,\ldots,m_i\})\subseteq U_\gamma(\{n_1,\ldots,n_i\})$$

and

$$\big(U_\gamma(\{n_1,\ldots,n_i\})\big)^{-1}\subseteq U_{\gamma^{-1}}(\{k_1,\ldots,k_i\}).$$

Therefore the semigroup operation and the inversion are continuous in $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau_{WF})$.

Later we shall show that the topology τ_{WF} is Hausdorff. Let α and β be arbitrary distinct points of the space $(\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}),\tau_{WF})$. Then only one of the following conditions holds:

(i) $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$;

(ii) $\operatorname{dom}\alpha \neq \operatorname{dom}\beta$.

In case $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$ we have that there exists $x \in \operatorname{dom}\alpha$ such that $(x)\alpha \neq (x)\beta$. The definition of the topology τ_{WF} implies that $U_\alpha(\{x\}) \cap U_\beta(\{x\}) = \varnothing$.

If $\operatorname{dom}\alpha \neq \operatorname{dom}\beta$, then only one of the following conditions holds:

(a) $\operatorname{dom}\alpha \subsetneqq \operatorname{dom}\beta$;

(b) $\operatorname{dom}\beta \subsetneqq \operatorname{dom}\alpha$;

(c) $\operatorname{dom}\alpha \setminus \operatorname{dom}\beta \neq \varnothing$ and $\operatorname{dom}\beta \setminus \operatorname{dom}\alpha \neq \varnothing$.

Suppose that case (a) holds. Let $x \in \operatorname{dom}\beta \setminus \operatorname{dom}\alpha$ and $y \in \operatorname{dom}\alpha$. The definition of the topology τ_{WF} implies that $U_\alpha(\{y\}) \cap U_\beta(\{x\}) = \varnothing$.

Case (b) is similar to (a).

Suppose that case (c) holds. Let $x \in \operatorname{dom}\beta \setminus \operatorname{dom}\alpha$ and $y \in \operatorname{dom}\alpha \setminus \operatorname{dom}\beta$. The definition of the topology τ_{WF} implies that $U_\alpha(\{y\}) \cap U_\beta(\{x\}) = \varnothing$.

This completes the proof of the proposition. $\square$

Remark 3.2. *We observe that the topology τ_{WF} on $\mathscr{I}_\infty^{\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N})$ induces non-discrete topologies on the semigroup $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and the semilattice $E(\mathscr{I}_\infty^{\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N}))$. Moreover, every $\mathscr{H}$-class of the semigroup $(\mathscr{I}_\infty^{\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N}), \tau_{WF})$ is homeomorphic to every $\mathscr{H}$-class of the semigroup $(\mathscr{I}_\infty^{\rlap{\nearrow}\nearrow}(\mathbb{N}), \tau_W)$*

The proof of the following proposition is similar to Theorem 3:

Proposition 3.3. *Every Hausdorff Baire topology τ on a countable group G such that left (right) translations in (G, τ) are continuous is discrete.*

Theorem 5. *Let S be a topological semigroup which contains an infinite dense discrete subspace A such that every equations $a \cdot x = b$ and $y \cdot c = d$ have finitely many solutions in A. Then $I = S \setminus A$ is an ideal of S.*

Proof. Suppose that I is not an ideal of S. Then at least one of the following conditions holds:

$$1)\ IA \nsubseteq I, \qquad 2)\ AI \nsubseteq I, \qquad \text{or} \qquad 3)\ II \nsubseteq I.$$

Since A is a discrete dense subspace of S, Theorem 3.5.8 [10] implies that A is an open subspace of S. Suppose there exist $a \in A$ and $b \in I$ such that $b \cdot a = c \notin I$. Since A is a dense open discrete subspace of S the continuity of the semigroup operation in S implies that there exists an open neighbourhood $U(b)$ of b in S such that $U(b) \cdot \{a\} = \{c\}$. But by Proposition 1.2 the equation $x \cdot a = c$ has finitely many solutions in A. This contradicts the assumption that $b \in S \setminus A$. Therefore $b \cdot a = c \in I$ and hence $IA \subseteq I$. The proof of the inclusion $AI \subseteq I$ is similar.

Suppose there exist $a, b \in I$ such that $a \cdot b = c \notin I$. Since A is a dense open discrete subspace of S the continuity of the semigroup operation in S implies that there exist open neighbourhoods $U(a)$ and $U(b)$ of a and b in S, respectively, such that $U(a) \cdot U(b) = \{c\}$.

But by Proposition 1.2 the equations $x \cdot a_0 = c$ and $b_0 \cdot y = c$ have finitely many solutions in A. This contradicts the assumption that $a, b \in S \setminus A$. Therefore $a \cdot b = c \in I$ and hence $II \subseteq I$. $\square$

Theorem 5 implies Corollaries 3.3 and 3.4:

Corollary 3.3. *Let S be a topological semigroup which contains a dense discrete subsemigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$. If $I = S \setminus \mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N}) \neq \varnothing$ then I is an ideal of S.*

Corollary 3.4 ([19])**.** *Let S be a topological semigroup which contains a dense discrete subsemigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\!\nearrow}(\mathbb{N})$. If $I = S \setminus \mathscr{I}_{\infty}^{\!\nearrow}(\mathbb{N}) \neq \varnothing$ then I is an ideal of S.*

Proposition 3.4. *Let S be a topological semigroup which contains a dense discrete subsemigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$. Then for every $c \in \mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ the set*

$$D_c(A) = \{(x, y) \in \mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N}) \times \mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N}) \mid x \cdot y = c\}$$

is a closed-and-open subset of $S \times S$.

Proof. Since $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ is a discrete subspace of S we have that $D_c(A)$ is an open subset of $S \times S$.

Suppose that there exists $c \in \mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ such that $D_c(A)$ is a non-closed subset of $S \times S$. Then there exists an accumulation point $(a, b) \in S \times S$ of the set $D_c(A)$. The continuity of the semigroup operation in S implies that $a \cdot b = c$. But $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N}) \times \mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ is a discrete subspace of $S \times S$ and hence by Corollary 3.3 the points a and b belong to the ideal $I = S \setminus \mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ and hence $p \cdot q \in S \setminus \mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ cannot be equal to c. $\square$

A topological space X is defined to be *pseudocompact* if each locally finite open cover of X is finite. According to [10, Theorem 3.10.22] a Tychonoff topological space X is pseudocompact if and only if each continuous real-valued function on X is bounded.

Theorem 6. *If a topological semigroup S contains $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ as a dense discrete subsemigroup then the square $S \times S$ is not pseudocompact.*

Proof. Since the square $S \times S$ contains an infinite closed-and-open discrete subspace $D_c(A)$, we conclude that $S \times S$ fails to be pseudocompact (see [10, Ex. 3.10.F(d)] or [8]). $\square$

Remark 3.3. *Recall that, a topological semigroup S is called Γ-compact if for every $x \in S$ the closure of the set $\{x, x^2, x^3, \ldots\}$ is a compactum in S (see [21]). Since the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\!\nearrow}(\mathbb{N})$ contains the bicyclic semigroup as a subsemigroup the results obtained in [2], [3], [4], [18], [21] imply that* if a topological semigroup S satisfies one of the following conditions: (i) S is compact; (ii) S is Γ-compact; (iii) the square $S \times S$ is countably compact; (iv) S is a countably compact topological inverse semigroup; or (v) the square $S \times S$ is a Tychonoff pseudocompact space, then S does not contain the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\!\nearrow}(\mathbb{N})$ and hence the semigroup $\mathscr{I}_{\infty}^{\,\Rsh\!\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

The proof of the following theorem is similar to Theorem 6:

Theorem 7. *If a topological semigroup S contains $\mathscr{I}_{\infty}^{\!\nearrow}(\mathbb{N})$ as a dense discrete subsemigroup then the square $S \times S$ is not pseudocompact.*

References

1. Andersen O. *Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis, Hamburg, 1952.
2. Anderson L.W., Hunter R.P., Koch R.J. *Some results on stability in semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., **117** (1965), 521—529.
3. Banakh T., Dimitrova S., Gutik O. *The Rees-Suschkiewitsch Theorem for simple topological semigroups*, Mat. Stud., **31**, 2 (2009), 211—218.
4. Banakh T., Dimitrova S., Gutik O. *Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups*, Topology Appl. (to appear) (arXiv:0811.4276).
5. Beĭda A.A. *Continuous inverse semigroups of open partial homeomorphisms,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **1** (1980), 64—65 (in Russian).
6. Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J. The Theory of Topological Semigroups, Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983; Vol. II, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.
7. Clifford A.H., PrestonG.B. The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961; Vol. II., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
8. Colmez J. *Sur les espaces précompacts*, C. R. Acad. Paris, **233** (1951), 1552—1553.
9. Eberhart C., Selden J. *On the closure of the bicyclic semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc., **144** (1969), 115—126.
10. Engelking R. General Topology, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
11. Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M.W., Scott D.S. *Continuous Lattices and Domains*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
12. Guran I.I. *Topology of an infinite symmetric group and condensation*, Comment. Math. Univ. Carol., **22**, 2 (1981), 311—316 (in Russian).
13. Gutik O., Lawson J., Repovš D. *Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups*, Semigroup Forum, **78**, 2 (2009), 326—336.
14. Gutik O.V., Pavlyk K.P. *On topological semigroups of matrix units*, Semigroup Forum, **71**, 3 (2005), 389—400.
15. Gutik O., Pavlyk K., Reiter A. *Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt* λ^0*-extensions*, Mat. Stud., **32**, 2 (2009), 115—131.
16. Gutik O.V., Reiter A.R. *Symmetric inverse topological semigroups of finite rank* $\leqslant n$, Mat. Metody Phis.-Mech. Polya., **53**, 3 (2009), 7—14.
17. Gutik O., Reiter A. *On semitopological symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math. (to appear).
18. Gutik O., Repovš D. *On countably compact* 0*-simple topological inverse semigroups*, Semigroup Forum, **75**, 2 (2007), 464—469.
19. Gutik O., Repovš D. *Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of* $\mathbb{N}$ *having cofinite domain and image*, Stud. Sci. Math. Hungar. (to appear).
20. Hewitt E., Ross K.A. Abstract Harmonic Analysis, Vol. 1, Springer, Berlin, 1963.
21. Hildebrant J.A., Koch R.J. *Swelling actions of* Γ*-compact semigroups*, Semigroup Forum, **33** (1988), 65—85.
22. Karras A., Solitar D. *Some remarks on the infinite symmetric groups*, Math. Z., **66** (1956), 64—69.

23. Orlov S.D. *Topologization of the generalized group of open partial homeomorphisms of a locally compact Hausdorff space*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **11** (1974), 61—68 (in Russian).

24. Orlov S.D. *On the theory of generalized topological groups*, Theory of Semigroups and its Applications, Sratov Univ. Press, **3** (1974), 80—85 (in Russian).

25. Petrich M. Inverse Semigroups, John Wiley & Sons, New York, 1984.

26. Pontryagin L.S. Topological Groups, Gordon & Breach, New York ets, 1966.

27. Ruppert W. Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1079, Springer, Berlin, 1984.

28. Subbiah S. *The compact-open topology for semigroups of continuous self-maps,* Semigroup Forum, **35**, 1 (1987), 29—33.

29. Wagner V.V. *Generalized groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **84** (1952), 1119—1122 (in Russian).

Ivan Franko Lviv National University,

Lviv, Ukraine.

chuchman_i@mail.ru,

o_gutik@franko.lviv.ua, ovgutik@yahoo.com

Received 24.06.2010

Чучман І.Я., Гутік О.В. *Топологічні моноїди майже монотонних ін'єктивних коскінченних часткових перетворень множини натуральних чисел* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 119–132.

У статті вивчається напівгрупа $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ майже монотонних ін'єктивних коскінченних часткових перетворень множини натуральних чисел. Доведено, що напіврупа $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ має алгебраїчні властиві близькі до властивостей бициклічної напівгрупи: вона є біпростою та всі її нетривиальні гомоморфізми є або ізоморфізмами, або ж груповими гомоморфізмами. Доведено, що кожна берівська топологія τ на $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ така, що $(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}), \tau)$ – напівтопологічна напівгрупа є дискретною та описано замикання напівгрупи $(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}), \tau)$ в топологічній напівгрупі.

Чучман И.Я., Гутик О.В. *Топологические моноиды почти монотонных инъективных коконечных частичных преобразований множества натуральных чисел* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 119–132.

В работе изучается полугруппа $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ почти монотонных инъективных коконечных частичных преобразований множества натуральных чисел. Доказано, что полугруппа $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ имеет алгебраические свойства близкие к свойствам бициклической полугруппы: она бипроста и все её нетривиальные гомоморфизмы являются или изоморфизмами, или групповыми гомоморфизмами. Доказано, что каждая бэровская топология τ на $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ такая, что $(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}), \tau)$ – полутопологическая полугруппа дискретна и описано замыкание полугруппы $(\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N}), \tau)$ в топологической полугруппе.