

22.1
В 53

$$I = (2\pi a)^{-N} \int_0^{+\infty} r^{N+1} e^{-r^2} M^x(r) dr$$

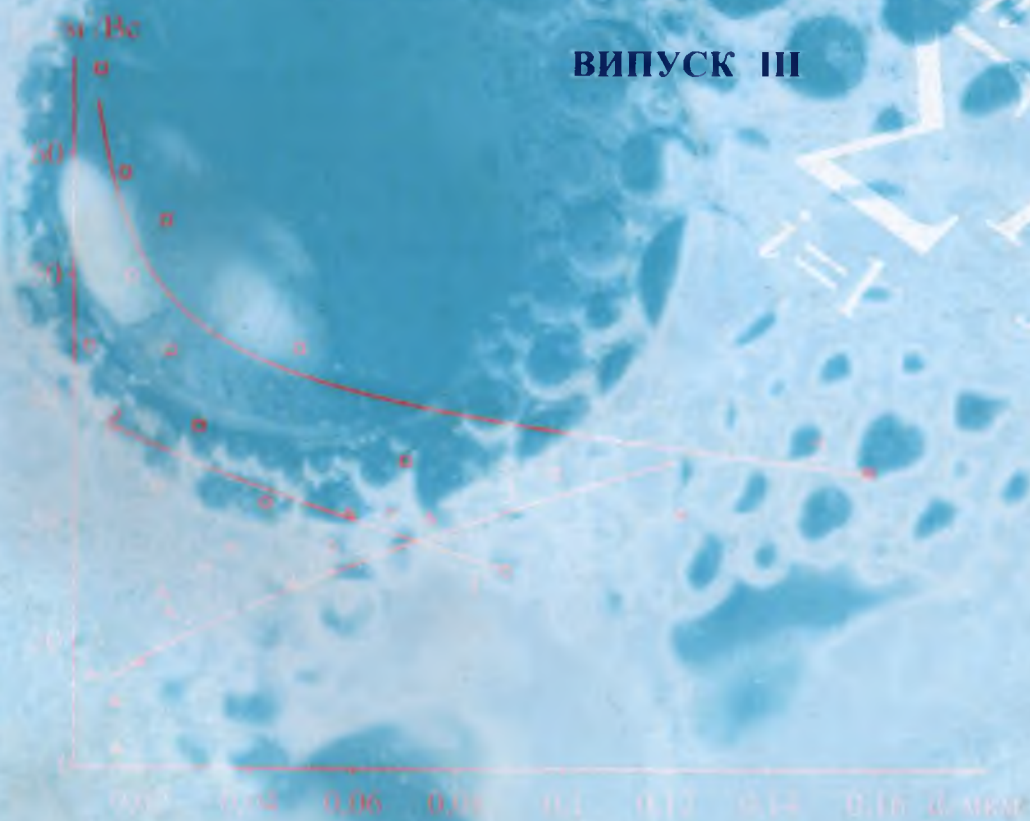
$$L_\infty[y] - \lambda \omega(x)y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} y^{(k)}$$

$$G(z) = \int_c^z g(\lambda) d\lambda$$

ВІСНИК ПРИКАРПАТСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

ВИПУСК III



ІВАНО-ФРАНКІВСЬК
2007

$$-TS_k + \Delta G_{el}$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА

Вісник Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
Математика. Фізика
Випуск III

ВІСНИК ПРИКАРПАТСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

Випуск III



ІВАНО-ФРАНКІВСЬК
2007

ІБ ПНУС



720937



Автори наукових статей із природничо-математичних наук висвітлюють актуальні проблеми в галузі математики й фізики.

Для науковців, викладачів, аспірантів, студентів, учителів та інженерів.

Bulletin of the Precarpathian University. Mathematics. Physics. 2007. Release III.

The authors of the scientific articles from naturally-mathematical sciences elucidate the present-day problems in branches of mathematics and physics.

For researches workers, graduate students, students, teachers and engineers.

Друкується за ухвалою Вченої ради Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Редакційна рада: д-р філол. наук проф. В.В.Грещук (голова ради); д-р філос. наук проф. С.М.Возняк; д-р філол. наук проф. В.І.Кононенко; д-р істор. наук проф. М.В.Кугутяк; д-р юрид. наук проф. В.В.Луць; д-р філол. наук проф. В.Г.Матвіїшин; чл.-кор. НАНУ Б.К.Остафійчук; д-р хім. наук проф. Д.М.Фреїк.

Редакційна колегія: д-р хім. наук проф. Д.М.Фреїк (голова редакційної колегії); д-р фіз.-мат. наук проф. Д.І.Боднар; д-р фіз.-мат. наук проф. М.М.Зарічний; д-р фіз.-мат. наук проф. С.Д.Івасишен; д-р фіз.-мат. наук проф. П.І.Каленюк; д-р фіз.-мат. наук проф. І.А.Климишин; д-р техн. наук проф. П.І.Мельник; чл.-кор. НАНУ Б.К.Остафійчук; чл.-кор. НАНУ Б.Й.Пташник; канд. фіз.-мат. наук доц. В.М.Пилипів; д-р фіз.-мат. наук проф. М.А.Рувінський; д-р хім. наук проф. М.М.Солтис; д-р техн. наук проф. М.В.Хабер; д-р хім. наук проф. О.В.Шийчук.

Рецензенти: зав. каф. вищої математики, д. ф.-м. н., проф. Копитко Б.І. (Львівський нац. ун-т ім. І.Франка), д. ф.-м. н., проф. Галушак М.О. (Івано-Франківський нац. ун-т нафти і газу).

Видається з 1993 р.
НАУКОВА БІБЛІОТЕКА
Інв. № 72 0937

Адреса редакційної колегії:
76025 Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57,
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника.
Тел.: 59-60-82, 50-37-52

© Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
© Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2007.
Тел.: (0342)59-60-51

**ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ
УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ**

І.В. Буртняк, Г.П. Малицька

Розглянуто стабілізацію інтеграла Пуассона для рівнянь Колмогорова, що мають три групи змінних, за якими є виродження параболічності.

Ключові слова: фундаментальний розв'язок, ультрапараболічне рівняння, задача Коші.

Одержані результати узагальнюють результати робіт [1; 2] і можуть бути застосовані в теорії стохастичних процесів.

Позначення $n \geq m_1 \geq m_2 \geq m_3$, n, m_1, m_2, m_3 – натуральні числа.

$$N_1 = n + 3m_1 + 5m_2 + 7m_3, \quad X = (x, y) \in R^N, \quad N = n + m_1 + m_2 + m_3,$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R^n, \quad y = (y_1, y_2, y_3), \quad y_1 = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m_1}) \in R^{m_1},$$

$$y_2 = (y_{21}, y_{22}, y_{23}, \dots, y_{2m_2}) \in R^{m_2}, \quad y_3 = (y_{31}, y_{32}, y_{33}, \dots, y_{3m_3}) \in R^{m_3},$$

$$x^{(k)} = (x_1, x_2, \dots, x_{m_k}), \quad k = 1, 2, 3, \quad y_1^{(k)} = (y_{11}, y_{12}, y_{13}, \dots, y_{1m_1}), \quad k = 1, 2, \quad y_2^{(3)} = (y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m_2}).$$

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u(t, X)}{\partial t} - \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial u(t, X)}{\partial y_{1j}} - \sum_{j=1}^{m_2} y_{1j} \frac{\partial u(t, X)}{\partial y_{2j}} - \sum_{j=1}^{m_3} y_{2j} \frac{\partial u(t, X)}{\partial y_{3j}} = a \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u(t, X)}{\partial x_k^2}, \quad a > 0, \quad (1)$$

$$u(t, X)|_{t=0} = u_0(X), \quad (2)$$

де $u_0(X)$ – вимірна, обмежена функція в R^N .

Фундаментальний розв'язок (1) – (2) має вигляд [3]:

$$Z(t, X; \tau, \Xi) = (12)^{\frac{m_1}{2}} (720)^{\frac{m_2}{2}} (25200)^{\frac{m_3}{2}} (4\pi a)^{\frac{N}{2}} (t - \tau)^{-\frac{N_1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{a} \rho(t, X; \tau, \Xi) \right\},$$

де

$$\begin{aligned} \rho(t, X; \tau, \Xi) = & |x - \xi|^2 (t - \tau)^{-1} 4^{-1} + 3(t - \tau)^{-3} |y_1 - \eta_1 + (x^{(1)} + \xi^{(1)})(t - \tau)2^{-1}|^2 + \\ & + 180(t - \tau)^{-5} |y_2 - \eta_2 + (y_1^{(1)} + \eta_1^{(1)})(t - \tau)2^{-1} + (x^{(2)} - \xi^{(2)})(t - \tau)2^{-1}|^2 + \\ & + 6300(t - \tau)^{-7} |y_3 - \eta_3 + (y_2^{(3)} + \eta_2^{(3)})(t - \tau)2^{-1} + (y_1^{(3)} - \eta_1^{(3)})(t - \tau)2^{-1} + \\ & + (x^{(3)} + \xi^{(3)})(t - \tau)3^{-1}|^2, \end{aligned}$$

$$\Xi = (\xi, \eta), \quad \xi \in R^n, \quad \eta \in R^{m_1+m_2+m_3}, \quad \eta_i \in R^{m_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$\rho(t, X; 0, \Xi) = r^2$ – сімейство поверхонь рівня фундаментального розв'язку задачі (1), (2). Через $F_{r,t}^X$ позначимо тіло, обмежене еліпсоїдом

$$\rho(t, X_0; 0, \Xi) = r^2, \quad (3)$$

де Ξ – змінна точка, v_N – об'єм тіла, обмеженого поверхнею:

$$\begin{aligned} & |\xi|^2 + |\eta_1 - \sqrt{3}\xi^{(1)}|^2 + |\eta_2 - \sqrt{15}\eta_1^{(2)} - \sqrt{5}\xi^{(2)}|^2 + \\ & + |\eta_3 - 2^{-1}\sqrt{35}\eta_2^{(3)} + \sqrt{21}\eta_1^{(3)} + 2^{-1}\sqrt{7}\xi^{(3)}|^2 = 1. \end{aligned}$$

Нехай $M_t^X(r)$ – середнє значення $u_0(X)$ по тілу $F_{r,t}^X$, обмеженому поверхнею (3).

Означення 1. Функція $u_0(X)$ має граничне середнє $M^X(r)$ по тілах $F_{r,t}^X$ при $t \rightarrow \infty$, якщо існує $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t^X(r) = M^X(r)$.

Точкова стабілізація інтеграла Пуассона для задачі Коші (1), (2). За аналогією до параболічних рівнянь, розв'язок задачі Коші (1), (2)

$$u(t, X) = \int_{R^N} Z(t, X; 0, \Xi) u_0(\Xi) d\Xi \quad (4)$$

назвемо інтегралом Пуассона задачі Коші (1), (2).

Теорема 1. Якщо $u_0(X)$ має граничне середнє по еліпсоїдах $F_{r,t}^X$, то інтеграл Пуассона (4) стабілізується (прямує при $t \rightarrow +\infty$) до числа

$$\ell = (2\pi a)^{-\frac{N}{2}} \nu_N \int_0^{+\infty} r^{N+1} e^{-r^2} M^X(r) dr.$$

Доведення. Розглянемо інтеграл Пуассона для рівняння (1) і введемо заміну змінних інтегрування

$$x - \xi = -2\sqrt{at}\alpha,$$

$$y_1 - \eta_1 + x^{(1)}t = -\frac{\sqrt{t^3 a \beta_1}}{\sqrt{3}},$$

$$y_2 - \eta_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} = -\frac{\sqrt{t^5 a \beta_2}}{6\sqrt{5}},$$

$$y_3 - \eta_3 + \frac{y_1^{(3)}t}{2} + y_2^{(3)}t^2 + \frac{x^{(3)}t^3}{6} = -\frac{\sqrt{t^7 a \beta_3}}{30\sqrt{7}}.$$

Тоді (4) матиме вигляд:

$$u(t, X) = \pi^{-\frac{N}{2}} \int_{R^N} \exp\left\{-|\alpha|^2 - |\beta_1 - \sqrt{3}\alpha^{(1)}|^2 - |\beta_2 - \sqrt{15}\beta_1^{(2)} - \sqrt{5}\alpha^{(2)}|^2 - \right. \\ \left. - |\beta_3 - \sqrt{35}\beta_2^{(3)} 2^{-1} + \sqrt{21}\beta_1^{(3)} + \sqrt{7}\alpha^{(3)} 2^{-1}|^2\right\} u_0(t, x + 2\sqrt{at}\alpha, y_1 + x^{(1)}t + \\ + \frac{\sqrt{at^3}\beta_1}{\sqrt{3}} + x^{(2)}t^2 2^{-1} + \frac{\sqrt{at^5}\beta_2}{6\sqrt{5}}, y_3 + y_2^{(3)}t + x^{(3)}t^3 6^{-1} + 2^{-1}y_1^{(3)}t^2 + \frac{\sqrt{at^7}\beta_3}{30\sqrt{7}}) dE, \quad (5)$$

$$E = (\alpha, \beta), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad E \in R^N.$$

Розглянемо додатно визначену квадратичну форму:

$$|\alpha|^2 + |\beta_1 - \sqrt{3}\alpha^{(1)}|^2 + |\beta_2 - \sqrt{15}\beta_1^{(2)} - \sqrt{5}\alpha^{(2)}|^2 + \\ + |\beta_3 + \sqrt{21}\beta_1^{(3)} - \sqrt{35}\beta_2^{(3)} 2^{-1} + \sqrt{7}\alpha^{(3)} 2^{-1}|^2 = \sum_{(i,j,k,s)} c_{ijkl} \alpha^i \beta_j^k \beta_s^l, \quad (6)$$

де $(i, j, k, s) = |i| + |j| + |k| + |s| = 2$,

$$\sum_{(i,j,k,s)} c_{ijkl} \alpha^i \beta_j^k \beta_s^l = r^2.$$

В інтегралі (5) перейдемо до нових змінних інтегрування:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= r\Phi(\Psi) \cos \Psi_1 \\ \alpha_2 &= r\Phi(\Psi) \sin \Psi_1 \cos \Psi_2 \\ &\dots \\ \beta_{3m_3} &= r\Phi(\Psi) \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 \dots \sin \Psi_{N-1} \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

де $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{N-1})$, $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \Psi_j \leq \pi$, $j = 1, 2, \dots, N-2$, $0 \leq \Psi_{N-1} \leq 2\pi$.

Функція $\Phi(\Psi)$ визначається рівністю:

$$\Phi^2(\Psi) \sum_{(i,j,k,s)} c_{ijkl} \alpha^i \beta_j^k \beta_s^l = 1,$$

з $\alpha_1' = \cos \Psi_1$, $\alpha_2' = \sin \Psi_1 \cos \Psi_2, \dots$, $\beta_{3m_3}' = \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 \dots \sin \Psi_{N-1}$. Якобіан перетворення (7)

$$J = r^{N-1} J_1,$$

$$J_1 = \Phi^N(\Psi) \sin^{N-2} \Psi_1 \sin^{N-3} \Psi_2 \dots \sin \Psi_{N-2}.$$

Позначимо через

$$u_0(t, r, \Psi, X) = u_0 \left(2r\sqrt{at}\Phi(\Psi) \cos \Psi_1 + x_1, \dots, r\sqrt{at^3} (30\sqrt{7})^{-1} \times \right. \\ \left. \times \Phi(\Psi) \sin \Psi_1 \dots \cos \Psi_{n+1} + y_{11} + x_1 t, \dots, \right. \\ \left. r\sqrt{at^5} (6\sqrt{5})^{-1} \Phi(\Psi) \sin \Psi_1 \dots \cos \Psi_{n+m+1} + y_{21} + y_{11} t + 2^{-1} x_1 t^2, \dots, \right. \\ \left. r\sqrt{at^7} (30\sqrt{7})^{-1} \Phi(\Psi) \sin \Psi_1 \dots \sin \Psi_{N-1} + y_{3m_3} + y_{2m_3} t + 2^{-1} y_{1m_3} t^2 + 6^{-1} x_{m_3} t^3 \right).$$

Тоді:

$$u(t, X) = \pi^{-\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{N-1} \int_{\Sigma_1} u_0(t, r, \Psi, X) J_1 d\Psi = \\ = \pi^{-\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \int_0^r \rho^{N-1} d\rho \int_{\Sigma_1} u_0(t, \rho, \Psi, X) J_1 d\Psi dr = \\ = 2\pi^{-\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \int_0^r \rho^{N-1} d\rho \int_{\Sigma_1} u_0(t, \rho, \Psi, X) J_1 d\Psi dr,$$

де Σ_1 – одинична сфера в R^N .

Виділимо $M_t^X(r)$:

$$u(t, X) = 2\pi^{-\frac{N}{2}} \nu_N \int_0^{+\infty} r^{N+1} e^{-r^2} (r^N \nu_N)^{-1} \int_0^r \rho^{N-1} d\rho \int_{\Sigma_1} u_0(t, \rho, \Psi, X) J_1 d\Psi dr = \\ = 2\pi^{-\frac{N}{2}} \nu_N \int_0^{+\infty} r^{N+1} e^{-r^2} M_t^X(r) dr. \quad (8)$$

Залишається здійснити граничний перехід під знаком інтеграла (8) при $t \rightarrow +\infty$. Це можна зробити на основі теореми Лебега, оскільки існує граничне середнє, а з обмеженості $u_0(X)$ безпосередньо випливає рівномірність (по t) обмеженості $M_t^X(r)$.

Зауважимо, що досить вимагати існування граничного середнього в деякій фіксованій точці X_1 , із цього вже безпосередньо випливає існування граничного середнього в будь-якій точці X і факт стабілізації на кожному компактi.

Теорема 2. Якщо $u_0(X) \geq 0$, то для стабілізації інтеграла Пуассона (4) до нуля необхідно й досить, щоб $u_0(X)$ мала граничне середнє $M^X(r)$, майже скрізь рівне нулю.

Доведення. Достатність випливає з теореми 1. Покажемо, що зі стабілізації (4) до 0 випливає існування нульового граничного середнього по $F_{r,t}^X$.

$$M_t^X(r) = \frac{1}{\text{mes} F_{r,t}^X} \int_{F_{r,t}^X} u_0(\Xi) d\Xi \leq$$

$$\leq c t^{-\frac{N}{6}} \int_{R^N} \exp\left\{-\rho(t^3, X, 0, \Xi)\right\} u_0(\Xi) d\Xi = c_1 u(t^{\frac{1}{3}}, X), \quad c, c_1 > 0. \quad (9)$$

У нерівності (9) $\text{mes} F_{r,t}^X$ замінено об'ємом куба зі стороною $t^{\frac{1}{3}}$, який міститься в $F_{r,t}^X$. Оскільки $u(t, X) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, із (9) випливає, що $M_{r,t}^X \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для будь-якого r . Теорема доведена.

При $n = m_1$, $n_2 = m_3 = 0$ одержимо теорему з [1].

Рівномірність стабілізації інтеграла Пуассона. Розглянемо задачу Коші для рівняння порядку $2b$ по змінних x :

$$(D_t - (x^{(1)}, D_{y_1}) - (y_1^{(2)}, D_{y_2}) - (y_2^{(3)}, D_{y_3}) - \sum_{|k|=2b} a_k D_x^k) u = 0, \quad (10)$$

де $D_x = \sum_{|k|=2b} a_k D_x^k$ – параболічний за Петровським оператор із сталими коефіцієнтами, $0 < b$.

Фундаментальний розв'язок задачі Коші (10), (2) задовольняє нерівності [2]:

$$|D_x^k D_y^l D_z^m Z(t, X; \tau, \Xi)| \leq c(t - \tau)^{-\frac{N_2}{2b}} \exp\{-\rho_1(t, X; \tau, \Xi)\}, \quad (11)$$

де $N_2 = |k| + n + (2b + 1)(m_1 + |l|) + (4b + 1)(m_2 + |j|) + (6b + 1)(m_3 + |s|)$.

$$\rho_1(t, X, \tau, \Xi) = \left(|x - \xi| (t - \tau)^{-\frac{1}{2b}} \right)^q + \left(|y_1 - \eta_1 + x^{(1)}(t - \tau)| (t - \tau)^{-\frac{(2b+1)}{2b}} \right)^q + \left(|y_2 - \eta_2 + y_1^{(2)}(t - \tau) + \frac{x^{(2)}(t - \tau)^2}{2}| (t - \tau)^{-\frac{(4b+1)}{2b}} \right)^q + \left(|y_3 - \eta_3 + y_2^{(3)}(t - \tau) + \frac{y_1^{(3)}(t - \tau)^2}{2} + \frac{1}{6}(t - \tau)^3 x^{(3)}| (t - \tau)^{-\frac{6b+1}{2b}} \right)^q, \quad q = \frac{2b}{2b-1}.$$

Нехай $u_0(X)$ має граничне середнє

$$\lim_{\substack{b_j \rightarrow \infty \\ \dots \\ b_N \rightarrow \infty}} \frac{1}{2^{2N} \prod_{s=1}^N b_s} \int_{-b_N}^{b_N} \dots \int_{-b_1}^{b_1} u_0(\Xi) d\Xi = \ell, \quad (12)$$

де $b_j \rightarrow \infty, j = 1, \dots, N$, незалежно одне від одного.

Теорема 3. Для того, щоб інтеграл Пуассона рівняння (10) рівномірно стабілізувався до ℓ при $t \rightarrow \infty$, необхідно й досить, щоб $u_0(X)$ мала граничне середнє, рівне ℓ .

Доведення. Нехай $u_0(X)$ має рівномірне граничне середнє, рівне 0. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $b_0(\varepsilon)$, що при всіх $b_j > b_0(\varepsilon)$ і при будь-якому X :

$$\left| \frac{1}{2^{2N} \prod_{j=1}^N b_j} \int_{-b_1+x_1}^{b_1+x_1} \dots \int_{-b_N+y_{3m_3}}^{b_N+y_{3m_3}} u_0(\Xi) d\Xi \right| < \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $u_0(X)$ має кутові граничні середні рівні 0.

В інтегралі Пуассона зробимо заміну змінних:

$$\begin{aligned} x - \xi &= -\xi' t^{\frac{1}{2b}}, \\ y_1 - \eta_1 + x^{(1)}t &= -\eta_1' t^{\frac{2b+1}{2b}}, \\ y_2 - \eta_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} &= -\eta_2' t^{\frac{4b+1}{2b}}, \\ y_3 - \eta_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} &= -\eta_3' t^{\frac{6b+1}{2b}}, \end{aligned}$$

тоді одержимо:

$$u(t, X) = t^{\frac{N_2}{2b}} \int_{R^N} Z^*(t, X; 0, \Xi') u_0(x + \xi' t^{\frac{1}{2b}}, y_1 + x^{(1)}t + \eta_1' t^{\frac{2b+1}{2b}}, y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \eta_2' t^{\frac{4b+1}{2b}}, y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \eta_3' t^{\frac{6b+1}{2b}}) d\Xi,$$

де $Z^*(t, X; 0, \Xi')$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші (10), (2) в нових змінних.

$$N_3 = n + (2b + 1)m_1 + (4b + 1)m_2 + (6b + 1)m_3,$$

або

$$u(t, X) = t^{\frac{N_2}{2b}} \int_{R^N} Z^*(t, X; 0, \Xi) \frac{\partial^N}{\partial \xi_1 \dots \partial \eta_{3m_3}} \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\eta_{3m_3}} u_0(x + t^{\frac{1}{2b}} \xi', y_1 + x^{(1)}t + \eta_1' t^{\frac{2b+1}{2b}}, y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \eta_2' t^{\frac{4b+1}{2b}}, y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \eta_3' t^{\frac{6b+1}{2b}}) d\Xi' d\Xi.$$

Проінтегрувавши частинами, матимемо:

$$u(t, X) = (-1)^{N_2} t^{\frac{N_2}{2b}} \int_{R^N} \frac{\partial^N Z^*(t, X; 0, \Xi')}{\partial \xi_1 \dots \partial \eta_{3m_3}} \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\eta_{3m_3}} u_0 \times \left(x + \xi' t^{\frac{1}{2b}}, \dots, y_{3m_3} + y_{2m_3}t + y_{1m_3} \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6} x_{m_3} t^3 - \eta_{3m_3}' t^{\frac{6b+1}{2b}} \right) d\Xi' d\Xi = I_1 + I_2 + I_3. \quad (13)$$

Інтеграл (13) розіб'ємо на інтеграли:

I_1 – інтеграл по ділянці, для якої виконується хоч одна з нерівностей:

$$|\xi_s| > B_s, |\eta_{ij}| > B_{ij}, \quad s = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, m_i.$$

I_2 – інтеграл по ділянці:

$$\{0 < h_s \leq |\xi_s| \leq B_s, 0 < h_{ij} \leq |\eta_{ij}| \leq B_{ij}\}.$$

I_3 – інтеграл по ділянці:

$$|\xi_s| \leq h_s, |\eta_{ij}| \leq h_{ij}.$$

Оскільки

$$\left| \frac{\partial^N Z^*(t, X; 0, \Xi)}{\partial \xi_1 \dots \partial \eta_{3m_3}} \right| \leq c_N t^{-\frac{N_2}{2b}} \exp\{-c|\Xi|^q\}, \quad (14)$$

з оцінки (14) випливає, що можна вибрати досить великі B_s, B_{ij} і досить малі h_s, h_{ij} , залежні тільки від ε , щоб для всіх X і $t: |I_1| < \frac{\varepsilon}{3}, |I_3| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Перейдемо до оцінки I_2 . Позначимо

$$g_t(\Xi) = \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\eta_{3m_3}} u_0 \left(x + \xi' t^{\frac{1}{2b}}, \dots, y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \eta_3' t^{\frac{6b+1}{2b}} \right) d\Xi.$$

Зробивши заміну змінних:

$$\begin{aligned} x + t^{\frac{1}{2b}} \xi' &= a, \quad y_1 + x^{(1)}t + \eta_1' t^{\frac{2b+1}{2b}} = \alpha_1, \quad y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \eta_2' t^{\frac{4b+1}{2b}} = \alpha_2, \\ y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \eta_3' t^{\frac{6b+1}{2b}} &= \alpha_3, \end{aligned}$$

$g_t(\Xi)$ запишемо у вигляді

$$g_t(\Xi) = t^{\frac{N_2}{2b}} \int_{\alpha_1}^{\xi_1 + \xi_1' t^{\frac{1}{2b}}} \dots \int_{\alpha_{3m_3} + y_{2m_3}t + y_{1m_3} \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6} x_{m_3} t^3 + \eta_{3m_3}' t^{\frac{6b+1}{2b}}}^{\alpha_{3m_3} + y_{2m_3}t + y_{1m_3} \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6} x_{m_3} t^3} u_0(A) dA.$$

Оскільки $u_0(X)$ має кутові граничні середні, то для будь-яких

$$X, |X| \leq K, \quad t > N_0, \quad |g_t(\Xi)| (\xi_{11} \dots \eta_{3m_3})^{-1} < \delta,$$

візьмемо

$$\delta = C_N^{-1} \frac{\varepsilon}{3} \left(\prod_{s=1}^n B_s \prod_{i,j} B_{ij} \int_{R^N} \exp\{-c_0|A|^q\} dA \right)^{-1},$$

тому $|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, а $|u(t, X)| < \varepsilon$.

Необхідність. Доведення від супротивного. Нехай

$$u(t, X) = \int_{R^N} Z(t, X; 0, \Xi) d\Xi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

рівномірно по X , а початкова функція $u_0(X)$ не має рівномірного граничного середнього (12), де $\ell = 0$. Це означає, що знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що для будь-якого додатного n_0 знайдеться $B > n_0$ і така точка M , що

$$|S(B, M)| = \left| \frac{1}{(2B)^N} \int_{V_B^M} u_0(\Xi) d\Xi \right| \geq \varepsilon_0,$$

де V_B^M – куб зі стороною B і центром у точці M .

Оскільки фундаментальний розв'язок $Z(t, X; 0, 0)$ можна записати:

$$Z(t, X; 0, 0) = t^{-\frac{N_1}{2b}} Z_1 \left(\frac{x}{t^{2b}}, \frac{y_1 + x^{(1)}t}{t^{2b+1}}, \left(y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} \right) t^{-\frac{4b+1}{2b}}, \right. \\ \left. \left(y_3 + y_2^{(3)}t + y_1^{(3)} \frac{t}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} \right) t^{-\frac{6b+1}{2b}} \right),$$

де Z_1 – ціла функція вказаних аргументів при $t > 0$, і

$$\int_{R^N} Z(t, X; 0, 0) dX = \int_{R^N} Z_1(A) dA = 1,$$

$$\int_{R^N} Z_1(A) dA = \int_{V_{B^*}} Z_1(A) dA + \int_{R^N - V_{B^*}} Z_1(A) dA,$$

V_{B^*} – куб зі стороною B^* , що

$$\int_{V_{B^*}} Z_1(A) dA < \frac{\varepsilon_0}{4}, \quad \int_{R^N - V_{B^*}} Z_1(A) dA \geq 1 - \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Після відповідної заміни змінних інтеграл Пуассона запишеться у вигляді:

$$u(t, X) = \int_{V_{B^*}} Z_1(A) \times u_0 \left(x + \alpha t^{2b}, \beta_1 t^{\frac{2b+1}{2b}} + y_1 + x^{(1)}t, \beta_2 t^{\frac{4b+1}{2b}} + y_2 + \right. \\ \left. + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(1)}t^2}{2}, \beta_3 t^{\frac{6b+1}{2b}} + y_3 + y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} \right) dA + \\ + \int_{R^N - V_{B^*}} Z_1(A) u_0 \left(x + \alpha t^{2b}, \beta_1 t^{\frac{2b+1}{2b}} + y_2 + x^{(1)}t, \beta_2 t^{\frac{4b+1}{2b}} + y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2}, \right. \\ \left. \beta_3 t^{\frac{6b+1}{2b}} + y_3 + y_2^{(3)}t + y_1^{(3)} \frac{t^2}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} \right) dA = I_1 + I_2.$$

Для простоти будемо вважати, що $|u_0(X)| \leq 1$, а B^* вибрано так, що

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Візьмемо послідовність $n_0^{(*)} \rightarrow \infty$, за нею знайдемо послідовності $B_{(k)} \rightarrow \infty$ і $M_{(k)}$ такі,

що $S(B_{(k)}, M_{(k)}) \geq \varepsilon_0$, визначимо тепер послідовність

$$t_{(k)} = \left(\frac{\varepsilon_0}{8NB^*} B_{(k)} \right)^{2b}.$$

Розглянемо

$$\left| \frac{1}{(2B_{(k)})^N} \int_{V_{B_{(k)}}^{M_{(k)}}} u(t_{(k)}, X) dX \right| \geq \int_{V_{B_{(k)}}^{M_{(k)}}} Z_1(A) dA S(B_{(k)}, M_{(k)}) - \int_{V_{B_{(k)}}^{M_{(k)}}} Z_1(A) dA \times \\ \times \left[\frac{1}{(2B_{(k)})^N} \int_{V_{B_{(k)}}^{M_{(k)}}} u_0 \left(x + \alpha t^{\frac{1}{2b}}, y_1 + x^{(1)}t + \beta_1 t^{\frac{2b+1}{2b}}, y_2 + y_1^{(2)}t + \frac{x^{(2)}t^2}{2} + \beta_2 t^{\frac{4b+1}{2b}}, \right. \right. \\ \left. \left. y_2^{(3)}t + \frac{y_1^{(3)}t}{2} + \frac{x^{(3)}t^3}{6} + \beta_3 t^{\frac{6b+1}{2b}} \right) dX - \int_{V_{B_{(k)}}^{M_{(k)}}} u_0(X) dX \right] - \frac{1}{(2B_{(k)})^N} \times \\ \times \int_{V_{B_{(k)}}^{M_{(k)}}} |I_2| \geq \frac{\varepsilon_0}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{4} \right) - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} \geq \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

З цієї нерівності випливає, що в кожному кубі $V_{B_{(k)}}^{M_{(k)}}$ є хоч одна точка $X_{(k)}$, в якій

$$u(t_{(k)}, X_{(k)}) \geq \frac{\varepsilon_0}{4}, \text{ а } t_{(k)} \rightarrow +\infty, \text{ що суперечить рівномірній збіжності.}$$

Теорема 3 доведена.

Зауваження. При $n = m_1, m_2 = m_3 = 0$ одержимо результати [2].

1. Малицька А.П., Репников В.Д., Эйдельман С.Д. О стабилизации решений задачи Коши для уравнения диффузии с инерцией // Труды НИИМ ВГУ. – Воронеж, 1972. – Вып. V – С.86–92.
2. Эйдельман С.Д., Малицька А.П. О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. XI. – С.1316–1330.
3. Малицька Г.П. Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії із змінною інерцією // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42. – №3. – С.56–60.
4. Малицька Г.П. Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією // Вісник Львівського національного університету. – 2000. – №411. – С.211–227.

In this paper we consider the stabilization of Poisson's integral Cauchy problem for Kolmogorov's equations that are three groups of variables with degeneration of parabolical equations.

Key words: fundamental solution, ultraparabolic equation, Cauchy problem.

УДК 517.948

ББК 22.161.67

Б.В. Василюшин, О.М. Голубчак, М.І. Копач, Б.А. Шувар

ІНТЕГРАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА З БАГАТЬМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

Для інтегральних рівнянь типу Вольєрра з багатьма незалежними змінними доведено нові теореми про оцінки розв'язків.

Ключові слова: інтегральні нерівності, диференціальні нерівності, оцінка розв'язку, N -вимірний аналог.

Теореми про диференціальні, інтегральні та інші класи операторних нерівностей мають широке застосування як у якісній, так і в кількісній теорії диференціальних рівнянь. У даній статті одержано деякі результати, які узагальнюють відомі теореми Гронуола, Біхарі, Вендрофа та деякі інші теореми про інтегральні нерівності. Вони близькі до відповідних результатів з [1] (див. [1, §20, 21]) і деколи теж є новими і для $N=1$. Зазначимо, що подані твердження не

вичерпують можливостей побудови інших аналогів й узагальнень згаданих теорем про інтегральні нерівності, і їх можна розглядати хіба що як ілюстрацію можливостей для побудови таких тверджень на основі використаного в [1] і в цій статті підходу.

1. Розглянемо спочатку рівняння:

$$x(t) = f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(\xi) x(\xi) d\xi \quad (1)$$

з дійсними неперервними при $t \in [a, b]$ функціями $f(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, де $t = \{t^1, \dots, t^N\}$, $a = \{a^1, \dots, a^N\}$, $b = \{b^1, \dots, b^N\}$ ($-\infty < a^j < b^j < \infty$), $[a, b] = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^N, b^N]$. Нехай для неперервних функцій $u(t)$, $v(t)$ при $t \in [a, b]$ маємо:

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t (\alpha^+(t) \beta^+(\xi) + \alpha^-(t) \beta^-(\xi)) u(\xi) d\xi - \int_a^t (\alpha^+(t) \beta^-(\xi) + \alpha^-(t) \beta^+(\xi)) v(\xi) d\xi, \quad (2)$$

$$v(t) \geq f(t) + \int_a^t (\alpha^+(t) \beta^+(\xi) + \alpha^-(t) \beta^-(\xi)) v(\xi) d\xi - \int_a^t (\alpha^+(t) \beta^-(\xi) + \alpha^-(t) \beta^+(\xi)) u(\xi) d\xi,$$

де

$$\alpha^+(t) = \sup\{\alpha(t), 0\}, \quad \alpha^-(t) = \alpha^+(t) - \alpha(t), \\ \beta^+(t) = \sup\{\beta(t), 0\}, \quad \beta^-(t) = \beta^+(t) - \beta(t),$$

а неперервний на $[a, b]$ розв'язок $x^*(t)$ рівняння (1) задовольняє нерівності:

$$u(t) \leq x^*(t) \leq v(t). \quad (3)$$

У тому випадку, коли $\alpha(t)$, $\beta(t)$ мають вигляд:

$$\alpha(t) = \prod_{i=1}^N \alpha_i(t^i), \quad \beta(t) = \prod_{i=1}^N \beta_i(t^i), \quad (4)$$

розв'язок рівняння (1) можна знайти в явному вигляді. Позначимо:

$$L_j(t^j) = \int_{a^j}^{t^j} \alpha_j(s^j) \beta_j(s^j) ds^j \quad (a^j \leq s^j \leq b^j, j = \overline{1, N}), \quad E_N(\eta^j) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta^j}{(i!)^N}, \quad (5)$$

$$g(t) = \int_a^t f(\xi) \beta(\xi) d\xi, \quad (6)$$

$$h^*(t, \xi) = E_N \left(\prod_{j=1}^N (L_j(t^j) - L_j(\xi^j)) \right), \quad a \leq \xi \leq t \leq b. \quad (7)$$

Теорема 1. Якщо справджуються співвідношення (4), то з існування неперервних при $t \in [a, b]$ функцій $u(t)$, $v(t)$, що задовольняють співвідношення (2), випливають для $t \in [a, b]$ оцінки

$$u(t) \leq f(t) + \alpha(t) g(t) + \alpha(t) \int_a^t g(s) \alpha(s) \beta(s) h^*(t, s) ds \leq v(t) \quad (8)$$

з означеними за формулами (5) – (7) функціями $g(t)$, $h^*(t, s)$.

Доведення. Рівняння (1) приводить до рівності

$$w(t) = g(t) + \int_a^t \alpha(s) \beta(s) w(s) ds \quad (9)$$

за допомогою заміни

$$w(t) = \int_a^t \beta(s) x(s) ds. \quad (10)$$

Єдиний для $t \in [a, b]$ неперервний розв'язок рівняння (9) очевидним способом можна записати у вигляді

$$w(t) = g(t) + \int_a^t \alpha(s) \beta(s) h^*(t, s) ds. \quad (11)$$

Оскільки з (1) і (10) випливає рівність $x(t) = f(t) + \alpha(t) w(t)$, то з (11) знаходимо

$$x(t) = f(t) + \alpha(t) g(t) + \alpha(t) \int_a^t g(s) \alpha(s) \beta(s) h^*(t, s) ds.$$

Це в зіставленні з (3) підтверджує нерівності (8).

Функція $E_1(t)$ для $n=1$ має вигляд $E_1(t) = e^t$. При $n=2$ будемо мати $E_2(t) = I_0(2\sqrt{t})$ – модифіковану функцію Бесселя нульового порядку.

Виокремимо частковий випадок, який одержуємо з теореми 1 при $\alpha(t) \geq 0$, $\beta(t) \geq 0$.

Наслідок 1. Якщо $\alpha(t) \geq 0$, $\beta(t) \geq 0$ і справджується нерівність

$$u(t) \leq f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s) u(s) ds$$

$$\left(v(t) \geq f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s) v(s) ds \right),$$

то справедлива оцінка

$$u(t) \leq f(t) + \alpha(t) g(t) + \alpha(t) \int_a^t g(s) \alpha(s) \beta(s) h^*(t, s) ds$$

$$\left(f(t) + \alpha(t) g(t) + \alpha(t) \int_a^t g(s) \alpha(s) \beta(s) h^*(t, s) ds \leq v(t) \right).$$

Результат, який містить цей наслідок, є загальнішим за N -вимірний аналог лемми Гронуолла, отриманий В.Вольєрром (див. [2, лема III, §19]). Саму лему В.Вольєрра отримаємо з наслідку 1 при $\alpha(t) \equiv 1$.

Наступні дві теореми можна вважати за узагальнення наслідку 1.

Теорема 2. Якщо справджуються умови теореми 1 з $\alpha(t) \geq 0$ і задана інтегровна при $t \in [a, b]$ функція $q(t)$ така, що

$$q(t) = \prod_{j=1}^N q_j(t^j), \quad q_j(t^j) \geq 0; \quad q_j(t^j) \geq \beta_j(t^j) \quad (t^j \in [a^j, b^j], j = \overline{1, N}), \quad (12)$$

то при $t \in [a, b]$ правдиві оцінки

$$u(t) \leq x^*(t) \leq f(t) + \alpha(t) \int_a^t f(s) \beta(s) ds +$$

$$+ \alpha(t) \int_a^t b(s) \alpha(s) q(s) \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) q(\xi) d\xi \right] ds, \quad \text{де } b(t) = \int_a^t f(s) q(s) ds.$$

Доведення. Очевидно, що для $j = \overline{1, N}$ будемо мати:

$$L_j(t^j) - L_j(s^j) = \int_{a^j}^{t^j} \alpha_j(\xi) \beta_j(\xi) d\xi - \int_{a^j}^{s^j} \alpha_j(\xi) \beta_j(\xi) d\xi = \int_{s^j}^{t^j} \alpha_j(\xi) \beta_j(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Для $z \geq 0$ отримуємо:

$$E_N(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{(i!)^N} = 1 + z + \frac{z^2}{(2!)^2} + \dots + \frac{z^N}{(N!)^N} + \dots \leq 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^N}{N!} + \dots = e^z, \quad (14)$$

де z^i – натуральний степінь числа z . Завдяки теоремі 1 та співвідношенням (12), (13), (14) можна знайти

$$u(t) \leq x^*(t) \leq f(t) + \alpha(t)g(t) + \alpha(t) \int_a^t g(s)\alpha(s)\beta(s) \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\int_a^t \alpha(\xi)\beta(\xi)d\xi \right)^i}{(i!)^N} \right) ds \leq f(t) + \alpha(t)g(t) +$$

$$+ \alpha(t) \int_a^t g(s)\alpha(s)\beta(s) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\int_a^t \alpha(\xi)\beta(\xi)d\xi \right)^i}{i!} \right) ds =$$

$$= f(t) + \alpha(t) \int_a^t f(s)\beta(s)ds + \alpha(t) \int_a^t b(s)\alpha(s)q(s) \exp \left[\int_a^t \alpha(\xi)q(\xi)d\xi \right] ds,$$

що й потрібно було довести.

В умовах цієї теореми можна прийняти, зокрема:

$$p_j(t) = \beta_j^+(t) \quad (\beta_j^+(t) = \sup\{\beta_j(t), 0\}, j = \overline{1, N}).$$

Теорема 3. Якщо справджуються умови теореми 1 з $\beta(t) \geq 0$ і задана інтегрована при $t \in [a, b]$ функція $p(t)$ така, що

$$p(t) = \prod_{j=1}^N p_j(t^j), \quad p_j(t^j) \geq 0; \quad p_j(t^j) \geq \alpha_j(t^j) \quad (t_j \in [a^j, b^j], j = \overline{1, N}),$$

то при $t \in [a, b]$ правдиві нерівності

$$u(t) \leq x(t) \leq f(t) + \alpha(t) \int_a^t f(s)\beta(s)ds +$$

$$+ p(t) \int_a^t \left(\int_a^{\tau} f(s)\beta(s)ds \right) p(\tau) \exp \left[\int_a^{\tau} p(\xi)\beta(\xi)d\xi \right] d\tau.$$

Доведення практично не відрізняється від доведення теореми 2.

В умовах теореми 3 можна, зокрема, прийняти

$$p_j(t) = \alpha_j^+(t) \quad (\alpha_j^+(t) = \sup\{\alpha_j(t), 0\}, j = \overline{1, N}).$$

Приклад 1. Розглянемо нерівність

$$u(x, y) \leq \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \int_1^x \int_1^y \frac{t}{s} u(s, t) ds dt, \quad (15)$$

де всі величини є дійсними числами. Функції $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $\alpha(x, y) = \frac{x}{y}$, $\beta(x, y) = \frac{y}{x}$ є

неперервними, причому $\beta(x, y) \geq 0$, $\alpha(x, y) \geq 0$ і справджуються співвідношення (4). При цьому система нерівностей (2) розпадається на дві нерівності. Нерівність (15) є однією з них. Отже, можна застосувати теорему 2 і з нерівності (15) отримати оцінку

$$u(x, y) \leq \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \int_1^x \int_1^y \frac{t}{s} ds dt + \frac{x}{y} \int_1^x \left(\int_1^y \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\xi} d\eta d\xi \right) \frac{t}{s} \cdot \frac{s}{t} \exp \left[\int_1^t \int_1^y \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\xi} d\eta d\xi \right] ds dt.$$

Після спрощень одержимо

$$u(x, y) \leq \frac{x}{y} + \frac{x}{y} (x-1)(y-x) + x^2 (\exp[(x-1)(y-1)] - 1).$$

Наведені результати для лінійного випадку можна тлумачити як узагальнення нерівностей Гронуолла – Беллмана та нерівностей Вендрофа (напр. [3]).

2. Перейдемо до нелінійних інтегральних нерівностей, які часто асоціюють із відомою нерівністю Біхарі.

Розглянемо рівняння

$$x(t) = C + \int_a^t \beta(s)g(x(s))ds \quad (C = const), \quad (16)$$

де $\beta(t) = \beta_1(t) - \beta_2(t)$, з неперервними невід'ємними при $t \in [a, b]$ функціями. Уважатимемо, що $g(x)$ – неперервна неспадна строго додатна при $x \in (\lambda_0, \lambda_1)$ функція. Як і раніше, $a = \{a^1, \dots, a^N\}$, $b = \{b^1, \dots, b^N\}$, $t = \{t^1, \dots, t^N\}$. Нехай: 1) неперервні функції $u(t)$, $v(t)$ при $t \in [a, b]$ задовольняють нерівності

$$u(t) \leq C + \int_a^t \beta_1(s)g(u(s))ds - \int_a^t \beta_2(s)g(v(s))ds, \quad (17)$$

$$v(t) \geq C + \int_a^t \beta_1(s)g(v(s))ds - \int_a^t \beta_2(s)g(u(s))ds;$$

2) система рівнянь

$$y(t) = C + \int_a^t \beta_1(s)g(y(s))ds - \int_a^t \beta_2(s)g(z(s))ds,$$

$$z(t) = C + \int_a^t \beta_1(s)g(z(s))ds - \int_a^t \beta_2(s)g(y(s))ds$$

має єдиний розв'язок $(y(t), z(t))$, такий, що $y(t) = z(t)$ і функція $x(t) = y(t) = z(t)$ – неперервна при $t \in [a, b]$; 3) задана достатньо гладка неспадна функція $G(x)$ ($x \in (\lambda_0, \lambda_1)$) така, що для всякої достатньо гладкої функції $x(t)$, для якої $x(a) = C$, або бодай для всякого розв'язку $x(t)$ рівняння (16) будемо мати:

$$\frac{\partial^N G(x)}{\partial t^1 \dots \partial t^N} \leq \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{\partial^N x}{\partial t^1 \dots \partial t^N}. \quad (18)$$

Теорема 4. Якщо справджуються умови 1)–3), то з нерівностей (17) випливає оцінка:

$$G(u(t)) \leq G(c) + \int_{t_0}^t \beta(s)ds. \quad (19)$$

Доведення. Диференціюємо N раз обидві частини рівності (16). Отримуємо

$$\frac{\partial^N x}{\partial t^1 \dots \partial t^N} = \beta(t)g(x(t)).$$

Зважаючи на те, що $g(x) > 0$, і скориставшись із (18), знаходимо

$$\frac{\partial^N G(x)}{\partial t^1 \dots \partial t^N} \leq \beta(t).$$

Інтегруючи N раз цю нерівність, будемо мати

$$G(x) \leq G(c) + \int_a^x \beta(s) ds. \quad (20)$$

Зважаючи на те, що справджуються умови теореми 4 й тому $u(t) \leq x(t) \leq v(t)$ ($t \in [a, b]$) та що функція $G(x)$ – неспадна, з нерівності (20) одержуємо оцінку (19). Теорему доведено.

Якщо у (18) маємо протилежну нерівність, тобто:

$$\frac{\partial^N G(x)}{\partial t^1 \dots \partial t^N} \geq \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{\partial^N x}{\partial t^1 \dots \partial t^N},$$

то з нерівностей (17) впливає оцінка:

$$G(v(t)) \geq G(c) + \int_a^t \beta(s) ds. \quad (21)$$

Якщо, зокрема, $\beta_2(t) = 0$, то з нерівності

$$u(t) \leq C + \int_a^t \beta(s) g(u(s)) ds$$

при збереженні інших умов теореми 4 впливає оцінка (19). За тих самих припущень при $\beta_2(t) = 0$ з нерівності

$$v(t) \geq C + \int_a^t \beta(s) g(v(s)) ds$$

впливає нерівність (21).

Зауваження 1. Припущення про те, що $C = const$ в умовах теореми 4 можна замінити, зберігши як саме формулювання її, так і основні міркування в доведенні, слабкішим припущенням

$$C(t) = \sum_{i=1}^N C_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (t_0^j - t^j), \text{ де } C_i = const.$$

3. Розглянемо випадок $N = 2$ дещо докладніше. Нехай рівняння (16) має вигляд

$$z(x, y) = C + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \beta(t, s) g(z(t, s)) ds dt, \quad (22)$$

де $\beta(t, s) \geq 0$ при $x \geq x_0, y \geq y_0$. Нехай $g(z)$ – двічі неперервно диференційовна неспадна строго додатна функція при $z \in \mathbb{R}^1, z \geq C$. Диференціюючи один раз (22) за x та за y , матимемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int_{y_0}^y \beta(x, s) g(z(x, s)) ds, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \int_{x_0}^x \beta(t, y) g(z(t, y)) dt.$$

З додатності $\beta(x, y), g(z)$ впливає $\frac{\partial z}{\partial x} \geq 0, \frac{\partial z}{\partial y} \geq 0$, а з монотонності й

диференційовності $g(z)$ маємо також $g'_z = \frac{dg}{dz} \geq 0$. Приймемо

$$G(z) = \int_c^z \frac{d\lambda}{g(\lambda)} (z \geq C) \quad (23)$$

і продиференціюємо цю рівність. З урахуванням рівності (22) будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(z)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(G'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \\ &= -\frac{g'_z}{g^2(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \leq \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

для всякого розв'язку $z(x, y)$ рівняння (22). Крім того, функція $G(z)$, означена за (23), не спадає при $z \geq C$. Отже, за теоремою 4 можна зробити висновок про справедливість оцінки

$$G(u) \leq G(C) + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \beta(t, s) dt ds.$$

Цей результат збігається з основним результатом Р.Гутовського [4].

Тоді, коли $g(z) = z$, можна прийняти $G(z) = \ln z$, і тоді з теореми 4 впливає нерівність

$$u(x, y) \leq C e^{\int \int \beta(t, s) dt ds},$$

яка відома як нерівність Вендрофа ([3]).

Подібним способом із теореми 4 можна отримати й інші, як відомі вже, так і нові оцінки розв'язків інтегральних нерівностей Вольтерра з багатьма незалежними змінними.

Оцінки (19) й інші оцінки, які отримуються з неї, непокращувані тільки тоді, коли співвідношення (18) є рівністю на єдиному неперервному розв'язку $x(t)$ рівняння (16).

1. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – К.: Наукова думка, 1980. – 267 с.
2. Walter W. Differential and integral inequalities. – Berlin etc.: Springer, 1970. – 355 p.
3. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
4. Gutowski R. Etude d'une inegalite integrale nonlineare en deux variables // Ann. Pol. Math. – 1977. – V.35. – №3. – P.247–252.

The new theorems about a estimations of the solutions for integral equations Voltera's type with many independents variables.

Key words: integral inequalities, differential inequalities, estimation of the solution, N-dimensional analog.

УДК 515.12

ББК 22.152.1

С.Ф. Григорів, О.Р. Никифорчин

ТОПОЛОГІЧНА ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ПАРИ $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ - ТА $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -МНОГОВИДІВ

Отримано топологічну характеристику пар просторів, глобально або локально влаштованих як $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty \times \{0\})$.

Ключові слова: нескінченновимірні многовиди, пряма границя, компакт.

Вступ. Характеризації і властивості простору \mathbb{R}^∞ , утвореного як пряма границя послідовно вкладених степенів $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \dots$, а також просторів, локально влаштованих як \mathbb{R}^∞ (\mathbb{R}^∞ -многовидів), добре відомі [1] й широко вживаються, наприклад, для класифікації вільних об'єктів над скінченновимірними компактами. Метою даної праці є отримання аналогічних характеристик для пар просторів (X, Y) (де $X \supset Y$), влаштованих як пара $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty \times \{0\})$ або пара з відкритої підмножини $U \subset (\mathbb{R}^\infty)^2$ та перетину $U \cap (\mathbb{R}^\infty \times \{0\})$. Такі пари виникають, наприклад, при дослідженні вільних універсальних алгебр із різними сигнатурами й визначальними системами співвідношень над скінченновимірними компактами.

Більшість результатів та методи їх отримання аналогічні до описаних у [1, 2].

1. Основні позначення і терміни. Щодо понять топологічного простору, внутрішності й замикання, компактного й гаусдорфового простору, вкладення та гомотопії див. [4]. Замикання довільно множини A позначаємо \bar{A} . Під відображенням розуміємо неперервне відображення, якщо не вказано іншого. Стосовно прямих границь топологічних просторів і їх відображень див. [2]. Пряму границю послідовності просторів $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ позначаємо $\varinjlim (X_n, i_n^m, \mathbb{N})$, де $i_n^m : X_m \hookrightarrow X_n$ – вкладення, або, коротше, $\varinjlim X_n$. Відображення пар просторів і їх гомотопії

описано у [3]. Компактом називаємо компактний гаусдорфів простір. Нагадаємо, що компакт є скінченновимірним відносно вимірності в сенсі покриттів чи великої або малої індуктивної вимірності, якщо і тільки якщо він вкладається у \mathbb{R}^n для деякого $n \in \mathbb{N}$.

Надалі позначаємо

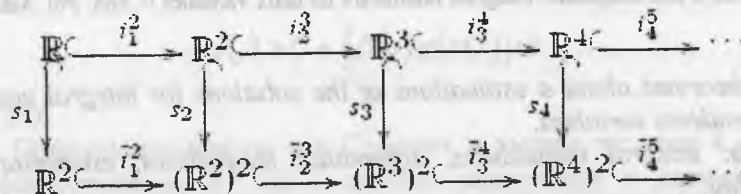
$$i_m^n : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n, i_m^n(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m})$$

$$\bar{i}_m^n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \bar{i}_m^n(x, y) = (i_m^n(x), i_m^n(y)),$$

тобто

$$\begin{aligned} \bar{i}_m^n((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) &= \\ &= ((x_1, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}), (y_1, \dots, y_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m})) \end{aligned}$$

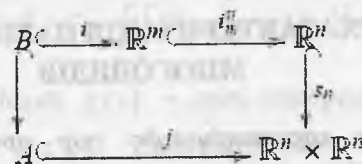
(при $m \leq n$). Задамо також вкладення \mathbb{R}^m у $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ як $s_m(x) = (x, 0)$. Якщо не вказано іншого, вважаємо, що при $m \leq n$ простір \mathbb{R}^m міститься у \mathbb{R}^n як образ вкладення i_m^n . Пряму границю $\lim(\mathbb{R}^n, i_m^n, \mathbb{N})$ позначаємо \mathbb{R}^∞ . Згідно з [2] $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty = \lim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \bar{i}_m^n, \mathbb{N})$, причому вкладення $s : \mathbb{R}^\infty \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty, s(x) = (x, 0)$ є прямою границею вкладень s_n :



Надалі отождиномо $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ з \mathbb{R}^n і $\mathbb{R}^\infty \times \{0\}$ з \mathbb{R}^∞ і вважаємо, що у парах $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ та $(\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty, \mathbb{R}^\infty)$ другий простір вкрито в перший за допомогою, відповідно, s_n та s .

2. Властивості й характеристики. Спершу доведемо допоміжні твердження.

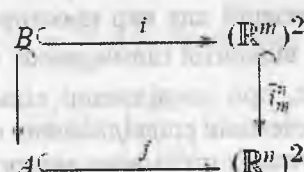
Лема 1. Нехай (A, B) – скінченновимірна компактна пара, й задано вкладення $i : B \hookrightarrow \mathbb{R}^m$. Тоді існує $n \geq m$ та вкладення $j : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, для якого комує діаграма



причому $j(A \setminus B) \subset (\mathbb{R}^n)^2 \setminus \mathbb{R}^n$.

Доведення є очевидним як і для наступної леми.

Лема 2. Нехай (A, B, C) – скінченновимірна компактна триада (тобто $B, C \subset A$), для якої існує вкладення $i : B \hookrightarrow (\mathbb{R}^m)^2$, причому $i(B \cap C) \subset \mathbb{R}^m, i(B \setminus C) \subset (\mathbb{R}^m)^2 \setminus \mathbb{R}^m$. Тоді існує $n \geq m$ і вкладення $j : A \hookrightarrow (\mathbb{R}^n)^2$, для якого комує діаграма



причому $i(A \cap C) \subset \mathbb{R}^n, i(A \setminus C) \subset (\mathbb{R}^n)^2 \setminus \mathbb{R}^n$.

Неважко помітити, що перша лема є частковим випадком другої (при $B = C$).

Теорема 1. (Характеризаційна.) Довільна пара (X, Y) є гомеоморфною до пари (U, V) , де U – відкрита підмножина в $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty, V = s^{-1}(U) = U \cap \mathbb{R}^\infty$, якщо і тільки якщо:

- (1) Y – замкнений підпростір в X ;

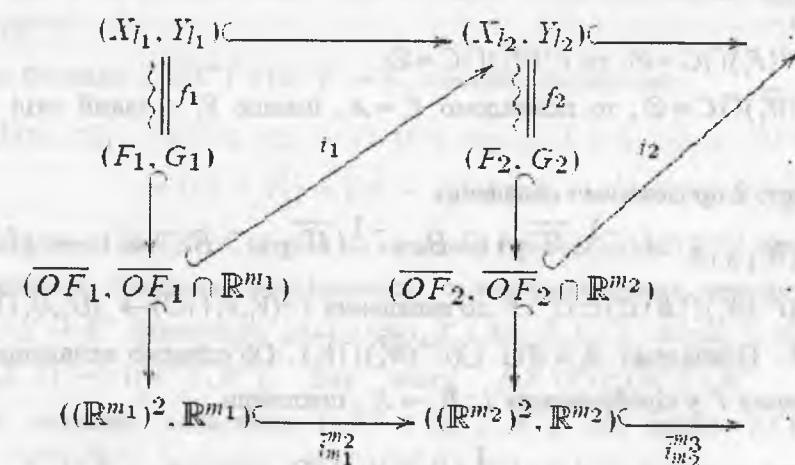
- (2) $X = \lim X_n$, де X_n – скінченновимірні компакти;

(3) для кожної скінченновимірної компактною триади $(A; B, C)$, для якої існує таке вкладення $i : B \hookrightarrow X$, що $i(B \cap C) \subset Y, i(B \setminus C) \subset X \setminus Y$, його можна продовжити до вкладення $j : OB \hookrightarrow X$ деякого околу OB множини B в A , для якого $j(OB \cap C) \subset Y, j(OB \setminus C) \subset X \setminus Y$.

Доведення. (Необхідність.) Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $(X, Y) = (U, V)$. Перший пункт випливає з того, що \mathbb{R}^∞ – замкнений підпростір в $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$, другий – з твердження 3.6 із [2] та з того, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ перетин $U \cap (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ є об'єднанням зліченної послідовності скінченновимірних компактів, кожен з яких міститься у внутрішності наступного.

Доведемо третій пункт. Нехай $i : B \hookrightarrow U$ – згадане вкладення. Тоді $i(B) \subset (\mathbb{R}^m)^2$ для деякого $m \in \mathbb{N}$, звідки $i(B \cap C) \subset (\mathbb{R}^m)^2 \cap \mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^m, i(B \setminus C) \subset (\mathbb{R}^m)^2 \setminus \mathbb{R}^\infty = (\mathbb{R}^m)^2 \setminus \mathbb{R}^m$. Згідно з лемою 2 існує вкладення $j' : A \hookrightarrow (\mathbb{R}^m)^2$ з властивостями $j'|_B = \bar{i}_m^m \circ i, j'(A \cap C) \subset \mathbb{R}^m, j'(A \setminus C) \subset (\mathbb{R}^m)^2 \setminus \mathbb{R}^m$. Залишається покласти $OB = (j')^{-1}(U), j = j'|_{OB}$.

(Достатність.) За умовою $X = \lim X_n$, де X_n – скінченновимірні компакти. Тоді $Y = \lim Y_n$, де $Y_n = X_n \cap Y$. Нехай $l_1 = 1$. За першою лемою існує вкладення $f_1 : X_{l_1} \hookrightarrow (\mathbb{R}^{m_1})^2$, для якого $f_1(Y_{l_1}) \subset \mathbb{R}^{m_1}, f_1(X_{l_1} \setminus Y_{l_1}) \subset (\mathbb{R}^{m_1})^2 \setminus \mathbb{R}^{m_1}$. Позначимо $F_1 = f_1(X_{l_1}), G_1 = f_1(Y_{l_1})$. Оскільки пара (F_1, G_1) гомеоморфна до (X_{l_1}, Y_{l_1}) , то вона, природно, вкладається в (X, Y) . З компактності й скінченновимірності пари (F_1, G_1) та умови випливає, що це вкладення можна продовжити до вкладення i_1 у (X, Y) (а, точніше, у (X_{l_2}, Y_{l_2}) для певного $l_2 > l_1$) деякого компактного замикання $\overline{OF_1}$ околу $OF_1 \supset F_1$ у $(\mathbb{R}^{m_1})^2$ причому так, щоб $i_1(\overline{OF_1} \cap \mathbb{R}^{m_1}) \subset Y_{l_2}, i_1(\overline{OF_1} \setminus \mathbb{R}^{m_1}) \subset X_{l_2} \setminus Y_{l_2}$. Продовжимо вкладення $i_1(\overline{OF_1}) \subset X_{l_2}$ в $(\mathbb{R}^{m_2})^2$ до такого вкладення $f_2 : X_{l_2} \hookrightarrow (\mathbb{R}^{m_2})^2, m_2 > m_1$, що $f_2(Y_{l_2}) \subset \mathbb{R}^{m_2}, f_2(X_{l_2} \setminus Y_{l_2}) \subset (\mathbb{R}^{m_2})^2 \setminus \mathbb{R}^{m_2}$, і т. д., згідно з діаграмою:



Залишається покласти

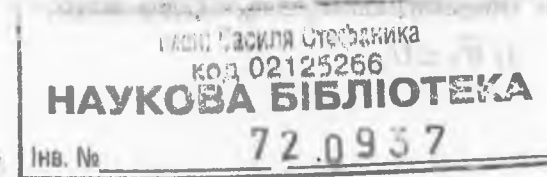
$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{OF_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} OF_i \subset \mathbb{R}^\infty, V = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{OF_i} \cap \mathbb{R}^\infty = (\bigcup_{i=1}^{\infty} OF_i) \cap \mathbb{R}^\infty,$$

$f = \lim f_i$. Неважко побачити, що f – гомеоморфізм $(X, Y) \cong (U, V)$. Теорема доведена.

Простеживши за доведенням необхідності, бачимо, що при $U = \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ можна продовжити вкладення на $OB = A$, тобто аналогічно отримуємо:

Теорема 2. (Характеризація пари $(\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty, \mathbb{R}^\infty)$.) Довільна пара (X, Y) є гомеоморфною до пари $(\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty, \mathbb{R}^\infty)$, якщо і тільки якщо:

- (1) Y – замкнений підпростір в X ;



(2) $X = \varinjlim X_n$, де X_n – скінченновимірні компакти;

(3) для кожної скінченновимірної компактної тріади $(A; B, C)$, для якої існує таке вкладення $i: B \hookrightarrow X$, що $i(B \cap C) \subset Y$, $i(B \setminus C) \subset X \setminus Y$, його можна продовжити до вкладення $j: A \hookrightarrow X$, для якого $j(C) \subset Y$, $j(A \setminus C) \subset X \setminus Y$.

Назвемо $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовидом кожну пару (X, Y) , для якої існує таке зліченне відкрите покриття простору X , що для кожного елемента U цього покриття пара $(U, U \cap Y)$ гомеоморфна або до $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$, або до $((\mathbb{R}^\infty)^2, \emptyset)$.

Теорема 3. (Про відкрите вкладення.) Пара $(X, Y) \in ((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовидом, якщо і тільки якщо вона гомеоморфна до пари (U, V) , де $U \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ – відкрита підмножина, $V = U \cap \mathbb{R}^\infty$.

Доведення. (Достатність.) Очевидно, що така пара (U, V) , а отже, і кожна гомеоморфна до неї пара $\in ((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовидами.

(Необхідність.) Нехай пара $(X, Y) \in ((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовидом. Доведемо, що вона задовольняє умову теореми 1. Згідно з означенням Y – замкнена підмножина у X , тобто виконано (1). За означенням X можна покрити зліченною кількістю відкритих множин U_l , $l \in \mathbb{N}$, для яких пара $(U_l, U_l \cap Y)$ гомеоморфна або до $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$, або до $((\mathbb{R}^\infty)^2, \emptyset)$. Але в обох випадках U_l є прямою границею скінченновимірних компактів $F_{l,k}$, $k \in \mathbb{N}$, гомеоморфних до $([-k, k]^k)^2$. Покладемо $F_k = \bigcup_{l=1}^k F_{l,k}$. Неважко побачити, що $X = \varinjlim F_l$, тобто виконано (2). Зафіксуємо використану послідовність множин U_l до кінця доведення. Нехай дано скінченновимірну компактну тріаду (A, B, C) і вкладення $i: B \hookrightarrow X$, для якого $i(B \cap C) \subset Y$, $i(B \setminus C) \subset X \setminus Y$. За компактністю образ $f(B)$ міститься в об'єднанні $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Відкрите покриття U_1, U_2, \dots, U_k компакта $f(B)$ стиснемо до його замкненого покриття F_1, F_2, \dots, F_n . Оберемо окіл $W_1 \supset F_1$ в X , для якого:

- 1) $\overline{W_1} \subset U_1$;
- 2) якщо $i^{-1}(F_1) \cap C = \emptyset$, то $i^{-1}(\overline{W_1}) \cap C = \emptyset$.

Якщо $i^{-1}(\overline{W_1}) \cap C \neq \emptyset$, то покладемо $V_1 = A$, інакше V_1 – такий окіл $i^{-1}(\overline{W_1})$ в A , що $\overline{V_1} \cap C = \emptyset$.

За теоремою 2 продовжимо вкладення

$$i|_{i^{-1}(\overline{W_1}) \cap B} : (i^{-1}(\overline{W_1}) \cap B, i^{-1}(\overline{W_1}) \cap B \cap C) \rightarrow (U_1, U_1 \cap Y)$$

з властивістю $i(i^{-1}(\overline{W_1}) \cap B \setminus C) \subset U_1 \setminus Y$ до вкладення $i': (\overline{V_1}, \overline{V_1} \cap C) \rightarrow (U_1, U_1 \cap Y)$ з властивістю $i'(\overline{V_1} \setminus C) \subset U_1 \setminus Y$. Покладемо $B_1 = B \cup \bigcup (i^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1})$. Об'єднаємо вкладення i та обмеження $i'|_{i^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1}}$ вкладення i' у відображення $i_1: B_1 \rightarrow X$, поклавши

$$i_1(x) = \begin{cases} i(x), & x \in B, \\ i'(x), & x \in i^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1}. \end{cases}$$

Оскільки $i'(i^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1}) \subset \overline{W_1}$, $i(B \setminus (i^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1})) \subset i(B \setminus (i^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1})) = i(B \setminus (i^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1})) \subset B \setminus \overline{W_1}$. Отже, відображення i' з компакта B_1 у гаусдорфів простір X є ін'єкцією, тому є вкладенням $i_1: B_1 \hookrightarrow X$, яке задовольняє умови $i_1(B_1 \cap C) \subset Y$, $i_1(B_1 \setminus C) \subset X \setminus Y$.

Оберемо окіл $W_2 \supset F_2$ в X , для якого:

- 1) $\overline{W_2} \subset U_2$;

2) якщо $i_1^{-1}(F_2) \cap C = \emptyset$, то $i_1^{-1}(\overline{W_2}) \cap C = \emptyset$.

Якщо $i_1^{-1}(F_2) \cap C \neq \emptyset$, то покладемо $V_2 = A$, інакше V_2 – такий окіл $i_1^{-1}(\overline{W_2})$ в A , що $\overline{V_2} \cap C = \emptyset$.

Знову згідно з теоремою 2 продовжимо вкладення

$$i_1|_{i_1^{-1}(\overline{W_2}) \cap B_1} : (i_1^{-1}(\overline{W_2}) \cap B_1, i_1^{-1}(\overline{W_2}) \cap B_1 \cap C) \rightarrow (U_2, U_2 \cap Y)$$

з властивістю $i_1(i_1^{-1}(\overline{W_2}) \cap B_1 \setminus C) \subset U_2 \setminus Y$ до вкладення $i_2': (\overline{V_2}, \overline{V_2} \cap C) \rightarrow (U_2, U_2 \cap Y)$ з властивістю $i_2'(\overline{V_2} \setminus C) \subset U_2 \setminus Y$. Покладемо $B_2 = B_1 \cup \bigcup (i_1^{-1}(\overline{W_2}) \cap \overline{V_2})$. Аналогічно об'єднаємо вкладення i_1 та обмеження $i_2'|_{i_1^{-1}(\overline{W_2}) \cap \overline{V_2}}$ вкладення i_2' у вкладення $i_2: B_2 \hookrightarrow X$, поклавши

$$i_2(x) = \begin{cases} i_1(x), & x \in B_1, \\ i_2'(x), & x \in i_1^{-1}(\overline{W_2}) \cap \overline{V_2}. \end{cases}$$

Так чинимо, доки не отримаємо вкладення $i_n: B_n \hookrightarrow X$, де $B_n = B \cup (i^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1}) \cup (i_1^{-1}(\overline{W_2}) \cap \overline{V_2}) \cup \dots \cup (i_{n-1}^{-1}(\overline{W_{n-1}}) \cap \overline{V_{n-1}})$. Але

$$\begin{aligned} B_n \supset OB &= (i^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1}) \cup (i_1^{-1}(\overline{W_2}) \cap \overline{V_2}) \cup \dots \cup (i_{n-1}^{-1}(\overline{W_{n-1}}) \cap \overline{V_{n-1}}) \supset \\ &\supset (i^{-1}(F_1) \cap \overline{V_1}) \cup (i_1^{-1}(F_2) \cap \overline{V_2}) \cup \dots \cup (i_{n-1}^{-1}(F_n) \cap \overline{V_n}) \supset \\ &\supset i^{-1}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) = B. \end{aligned}$$

Оскільки OB – окіл множини B , то $j = i_n|_{OB}: OB \hookrightarrow X$ вкладення, що задовольняє вимоги теореми 1. Отже, згідно з цією теоремою, пара (X, Y) гомеоморфна до пари (U, V) , де $U \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ – відкрита підмножина, $V = U \cap \mathbb{R}^\infty$. Теорема доведена.

Отже, теорема 1 характеризує $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовиди.

Теорема 4. (Про замкнене вкладення.) Для кожного $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовиду (X, Y) існує вкладення i у $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$, для якого $i(X \setminus Y) \subset (\mathbb{R}^\infty)^2 \setminus \mathbb{R}^\infty$, i образ $i(X)$ є замкненою підмножиною у $(\mathbb{R}^\infty)^2$.

Доведення. Функція $d: (\mathbb{R}^\infty)^2 \times (\mathbb{R}^\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, означена формулою

$$\begin{aligned} d(((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)), ((x'_1, x'_2, \dots), (y'_1, y'_2, \dots))) &= \\ &= |x_1 - x'_1| + |y_1 - y'_1| + |x_2 - x'_2| + |y_2 - y'_2| + \dots \end{aligned}$$

є неперервною метрикою на $(\mathbb{R}^\infty)^2$, хоча й не визначає топологію на $(\mathbb{R}^\infty)^2$. Згідно з теоремою 1 простір X є прямою границею послідовності скінченновимірних компактів X_n . Задамо відображення $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ формулою $\rho(x) = (d(x, X_1), d(x, X_2), \dots)$. Згідно з теоремою 3 існує вкладення $j: (X, Y) \hookrightarrow ((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$, для якого $j(X \setminus Y) \subset (\mathbb{R}^\infty)^2 \setminus \mathbb{R}^\infty$. Тоді формула $i(x) = (j(x), \rho(x))$ визначає вкладення $i: X \hookrightarrow ((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$, для якого $i(Y) \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$, $i(X \setminus Y) \subset ((\mathbb{R}^\infty)^2 \setminus \mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty$. Оскільки $i(X) \cap ((\mathbb{R}^\infty)^2 \times \mathbb{R}^\infty) = i(X_n)$, а згідно з твердженням [2, 3.6] маємо $(\mathbb{R}^\infty)^2 \times \mathbb{R}^\infty = \varinjlim (\mathbb{R}^\infty)^2 \times \mathbb{R}^\infty$, то $i(X)$ – замкнена підмножина в $(\mathbb{R}^\infty)^2 \times \mathbb{R}^\infty$. Залишається зауважити, що пара $((\mathbb{R}^\infty)^2 \times \mathbb{R}^\infty, \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty)$ гомеоморфна до пари $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$. Теорема доведена.

Лема 3. Нехай $(X; Y, Z)$ – компактна скінченновимірна тріада, $X_0 = X \cap Z$, $Y_0 = Y \cap Z$, (U, V) – $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовид, $f: (X, Y) \rightarrow (U, V)$ – неперервне відображення, $g: (X_0, Y_0) \hookrightarrow (U, V)$ – вкладення, $H: (X_0 \times I, Y_0 \times I) \rightarrow (U, V)$ – гомотопія, для якої $H(x, 0) = f(x)$ при $x \in X$, $H(x, 1) = g(x)$ при $x \in X_0$, і $g(X_0 \setminus Y_0) \subset U \setminus V$. Тоді існує така

гомотопія $\tilde{H} : (X \times I, Y \times I) \rightarrow (U, V)$, що $\tilde{H}|_{(X_0 \times I, Y_0 \times I)} = H$, при $x \in X$ маємо $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$, $\tilde{H}(x, 1) = \tilde{g}(x)$ і $\tilde{g} : (X, Y) \rightarrow (U, V)$ – вкладення, для якого $\tilde{g}(X \setminus Y) \subset U \setminus V$.

Доведення. Згідно зі сказаним вище можна вважати, що $U \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ – відкрита підмножина, $V = U \cap \mathbb{R}^\infty$. Позначимо $H_0 : X_0 \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow U$ відображення, означене як $H_0(x, t) = H(x, t)$ на $X_0 \times I$ і $H_0(x, 0) = f(x)$ на $X \times \{0\}$. Задамо відношення еквівалентності « \sim » на $X \times I$ так: $(x, t) \sim (x', t')$, якщо $(x, t) = (x', t')$ або $(x, t) = (x', 0)$ і $f(x) = f(x')$. Оскільки це відношення замкнене, і фактор-відображення приклеює замкнену підмножину $X_0 \times I \cup X \times \{0\}$ скінченновимірному компактному простору $X \times I$ до компактної, отже скінченновимірної множини в $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$, то фактор-простори $X' = X \times I / \sim$, $X'_0 = (X_0 \times I \cup X \times \{0\}) / \sim$, $Y' = (Y \times I \cup H_0^{-1}(V)) / \sim$, $Y'_0 = H_0^{-1}(V) / \sim$ є скінченновимірними компактами і $Y'_0 = Y' \cap X'_0$ в X' .

Якщо $q : (X_0 \times I \cup X \times \{0\}, H_0^{-1}(V)) \rightarrow (X'_0, Y'_0)$, – фактор-відображення, то рівність $H' \circ q = H_0$ визначає єдине неперервне вкладення $H' : (X'_0, Y'_0) \rightarrow (U, V)$. Його згідно з 1 можна продовжити до такого вкладення $H'' : W \rightarrow U$ деякого околу $W \subset X'$, $W \supset X'_0$, що $H''(W \cap Y') \subset V$, $H''(W \setminus Y') \subset U \setminus V$. Прообраз $W_0 = q^{-1}(W)$ є околом множини $X_0 \times I \cup X \times \{0\}$ у $X \times I$. За компактністю існують таке число $\delta > 0$ і замикання $\overline{OX_0}$ околу $OX_0 \supset X_0$ у X , що $\overline{OX_0} \times I \cup X \times [0, \delta] \subset W_0$. Згідно з теоремою Бракера – Тітці – Урисуна оберемо неперервну функцію $\varphi : X \rightarrow I$, для якої $\varphi(X_0) \subset \{1\}$, $\varphi(X \setminus \overline{OX_0}) \subset \{0\}$. Тоді формула $\tilde{H}(x, t) = H'' \circ q(x, (\delta + (1 - \delta)\varphi(x))t)$ визначає шукану гомотопію. Лема доведена.

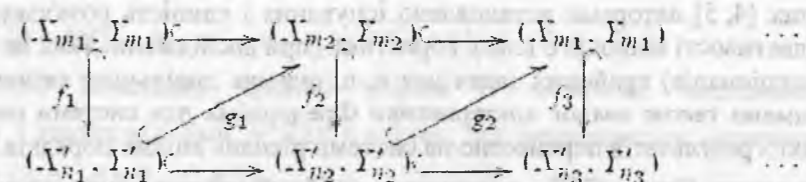
Теорема 5. (Класифікаційна). Нехай пари (X, Y) та (X', Y') є $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовидами. Тоді кожна гомотопійна еквівалентність $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ гомотопна до деякого ізоморфізму $\tilde{f} : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$, для якого $\tilde{f}(X \setminus Y) = X' \setminus Y'$.

Доведення. За умовою існує $g : (X', Y') \rightarrow (X, Y)$, для якого $g \circ f \sim \mathbf{1}_{(X, Y)}$, $f \circ g \sim \mathbf{1}_{(X', Y')}$. Крім того, $X = \varinjlim X_m$, $X' = \varinjlim X'_n$, де X_m, X'_n – скінченновимірні компакти. Тоді $Y = \varinjlim Y_m$, $Y' = \varinjlim Y'_n$, де $Y_m = X_m \cap Y$, $Y'_n = X'_n \cap Y'$.

Нехай $m_1 = 1$. За лемою 3 обмеження $f|_{X_{m_1}} : (X_{m_1}, Y_{m_1}) \rightarrow (X', Y')$ гомотопне до вкладення $f_1 : (X_{m_1}, Y_{m_1}) \rightarrow (X', Y')$, для якого $f_1(X_{m_1} \setminus Y_{m_1}) \subset X' \setminus Y'$. Насправді маємо $f_1 : (X_{m_1}, Y_{m_1}) \rightarrow (X'_{n_1}, Y'_{n_1})$ для деякого $n_1 \in \mathbb{N}$.

Оскільки $g|_{f_1(X_{m_1})} \sim g \circ f \circ f_1^{-1} \sim \mathbf{1}_X \circ f_1^{-1} = f_1^{-1}$, то знову, згідно з лемою 3, маємо існування гомотопного до g на (X'_{n_1}, Y'_{n_1}) вкладення $g_1 : (X'_{n_1}, Y'_{n_1}) \rightarrow (X_{m_2}, Y_{m_2}) \subset (X, Y)$, для якого $g_1(X'_{n_1} \setminus Y'_{n_1}) \subset X \setminus Y$. За побудовою $X_{m_2} \subset g_1(X'_{n_1}) \subset X_{m_2}$. Тепер, беручи до уваги, що $f|_{g_1(X'_{n_1})} \sim f \circ g \circ g_1^{-1} \sim \mathbf{1}_{X'} \circ g_1^{-1} = g_1^{-1}$, продовжимо цю гомотопію до гомотопії між $f|_{(X_{m_2}, Y_{m_2})}$ та деяким вкладенням $f_2 : (X_{m_2}, Y_{m_2}) \rightarrow (X'_{n_2}, Y'_{n_2}) \subset (X', Y')$, для якого $f_2(X_{m_2} \setminus Y_{m_2}) \subset X'_{n_2} \setminus Y'_{n_2}$. За побудовою f_2 є продовженням f_1 .

Далі будемо продовження $g_2 : (X'_{n_2}, Y'_{n_2}) \rightarrow (X_{m_3}, Y_{m_3}) \subset (X, Y)$ вкладення: $g_1 : (X'_{n_1}, Y'_{n_1}) \rightarrow (X_{m_2}, Y_{m_2})$ гомотопне до $g|_{f_2(X_{m_2})}$ і т. д. Маємо:



Покладемо $f_0 = \varinjlim f_i : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$, $g_0 = \varinjlim g_i : (X', Y') \rightarrow (X, Y)$. Тоді f_0 і g_0 взаємно обернені вкладення, гомотопні відповідно до f і g , і $f_0(X \setminus Y) = X' \setminus Y'$. Теорема доведена.

Звідси випливають дві теореми:

Теорема 6. Кожен стягуваний $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовид (X, Y) , де $Y \neq \emptyset$, гомеоморфний до пари $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$.

Теорема 7. (Стабільності). Для кожного $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовида (X, Y) пара $(X \times \mathbb{R}^\infty, Y \times \mathbb{R}^\infty)$ теж є $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовидом, гомеоморфним до (X, Y) .

1. Sakai K. On \mathbb{R}^∞ -manifolds and Q^∞ -manifolds // Topology Appl. – 1984. – V. 18. – P. 69–79.
2. Базилевич Л.С., Зарічний М.М. Вступ до топології нескінченновимірних многовидів. – К.: ІЗМН, 1996. – 40 с.
3. Борсук К. Теория ретрактів. – М.: Мир, 1971. – 291 с.
4. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология: основные конструкции. – М.: МГУ, 1988. – 288 с.

Topological characterization is obtained for pairs of spaces that are globally or locally homeomorphic to $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty \times \{0\})$.

Key words: infinite-dimensional manifolds, direct limit, compactum.

УДК 517.927
ББК 22.161.616

В.В. Мазуренко, М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій
ПРО ВЛАСТИВОСТІ МАТРИЦІ ГРІНА СИСТЕМИ З ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИМ РОЗПОДІЛОМ ПАРАМЕТРІВ

Досліджено структуру спектра крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із розподілами в коефіцієнтах. Отримано зображення розв'язку задачі в інтегральній формі за допомогою конструктивно побудованої матриці Гріна.

Ключові слова: квазидиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Гріна.

Вступ. Дослідження різноманітних фізичних явищ, які враховують природну єдність дискретного й неперервного, приводять до необхідності створення адекватних математичних моделей. Багато з них описується диференціальними й квазидиференціальними (к-д.) рівняннями з узагальненими функціями в коефіцієнтах ([1; 2]). Крайові задачі для диференціальних рівнянь із розподілами в коефіцієнтах успішно вивчаються математиками та механіками віддавна. Суттєвий поштовх для розвитку ця тематика отримала завдяки фундаментальним роботам М.Г.Крейна [3, с.648] стосовно диференціальних рівнянь другого порядку, що моделюють вільні коливання струни, маса якої допускає, крім неперервного, ще й точковий розподіл. До введення поняття δ -функції точкові сингулярності появлялись у задачах у формі специфічних умов спряження для розв'язку і його похідних у точках, котрі з погляду сучасної теорії належать до сингулярного носія коефіцієнтів рівняння. Такі дослідження здебільшого мали частковий характер.

У роботах [4, 5] авторами встановлено існування і єдиність розв'язку, а також вивчено спектральні властивості широкого класу коректних (при дослідженні яких не виникає проблеми множення функціоналів) крайових задач для к.-д. рівнянь довільного скінченного порядку. У статті [6] отримано також аналог альтернативи Фредгольма для системи першого порядку. У цій роботі деякі з результатів перенесено на системи рівнянь вищих порядків.

1. Позначення. Через $\mathbb{C}^{p \times q}$ позначаємо лінійний простір комплексних матриць розміру $p \times q$, а через $\overline{D}(I)$ – простір неперервних на інтервалі I дійсної осі функцій з компактним носієм, спряжений до якого є простором $\overline{D}'(I)$ векторних розподілів. Під $AC_p[a, b]$, $L_p[a, b]$ і $L_p^2[a, b]$ розуміємо простори матричних функцій $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{p \times p}$ відповідно з абсолютно неперервними, інтегровними за Лебегом та інтегровними з квадратом модуля на проміжку $[a, b]$ елементами $f_{ij}(x)$, а під $BV_p^+[a, b]$ – простір матриць, елементи $f_{ij}(x)$ яких є неперервними справа на проміжку $[a, b]$ функціями обмеженої варіації такими, що $f_{ij}(b-0) = f_{ij}(b)$. Відповідні простори вектор-функцій позначаємо з ризикою вгорі. Уживаємо також позначення: 0 – нульовий елемент (матриця, вектор, число), E_p – одинична матриця порядку p , τ – символ транспонування, $\Delta F(x) = F(x) - F(x-0)$ – стрибок функції $F \in BV_p^+[a, b]$ у точці x , (f, φ) – значення функціоналу f на функції $\varphi(x)$.

2. Постановка задачі. Розглядаємо к.-д. вираз довільного парного або непарного порядку m із матричними коефіцієнтами:

$$I_m[y] = (-1)^l \left\{ iB(x) [B(x)y^{(l)}]^{(m-2l)} \right\}^{(l)} + \sum_{r,s=0}^l (-1)^{l-s} (B_{rs}(x)y^{(l-r)})^{(l-s)}, \quad (1)$$

де $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^p$, $l, m \in \mathbb{N}$, $l \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $i = \sqrt{-1}$. До того ж при $m = 2n$ вважаємо, що $l = n$, $B(x) \equiv 0$, тобто $I_{2n}[y] = \sum_{r,s=0}^n (-1)^{n-s} (B_{rs}(x)y^{(n-r)})^{(n-s)}$.

К.-д. вирази вигляду (1) з достатньо гладкими, а також сумовними за Лебегом $(p \times p)$ -матричними коефіцієнтами досліджувалися багатьма авторами. Зокрема в [7] побудовано елементарну теорію і проведено спектральний аналіз операторів, породжених к.-д. виразами вигляду (1) тоді, коли $m = 2n$, $p = 1$, $B_{rs} \equiv 0$ ($r \neq s$). Випадок, коли в (1) m є довільним натуральним, $l = n$, $B_{rs} \equiv 0$ для всіх r, s таких, що $r \neq s + \{0, \pm 1\}$, для $p = 1$ розглянуто у [8], а для $p > 1$ – в [9]. К.-д. вирази дещо загальнішого вигляду розглядалися у роботах [10, 11].

У цій статті послаблюємо вимоги до коефіцієнтів к.-д. виразу (1) і вважаємо, що виконуються такі припущення: (А) якщо $m = 2n$, то $B_{00}^{-1}(x)$ є обмежена й вимірна при $x \in [a, b]$ матриця, $B_{r0}, B_{0s} \in L_p^2[a, b]$, $B_{rs} = A'_{rs}$, $A_{rs} \in BV_p^+[a, b] \forall r, s = \overline{1, n}$; інакше $B^{-1}(x)$ – обмежена й вимірна при $x \in [a, b]$, а $B_{00}, B_{r0}, B_{0s} \in L_p[a, b]$, $B_{rs} = A'_{rs}$, $A_{rs} \in BV_p^+[a, b] \forall r, s = \overline{1, n}$, якщо $l = n$, і $B_{rs} = A'_{rs}$, $A_{rs} \in BV_p^+[a, b] \forall r, s = \overline{0, l}$, якщо $l \neq n$; (В) $B_{j0}^* = B_{0j}$, $A_{rs}^* = A_{sr}$, де $j = \overline{0, n}$, $r, s = \overline{1, n}$, якщо $l = n$, і, $A_{rs}^* = A_{sr}$, де $r, s = \overline{1, n}$, якщо $l \neq n$. Крім того, коли $m = 2n + 1$, то $B^* = B$.

Відзначимо, що теореми існування і єдиності розв'язків початкових задач для к.-д. виразів із матричними коефіцієнтами, а також елементи лінійної теорії відповідних к.-д. рівнянь отримано в роботі [12].

На скінченному проміжку $[a, b]$ розглядаємо крайову задачу

$$I_m[y] - \lambda \omega(x)y = \sum_{j=0}^{m-l-1} (-1)^{j+1} f_j^{(j+1)}(x), \quad (2)$$

$$U_k(y) \equiv \sum_{v=1}^m [P_{kv}y^{v-1}(a) + Q_{kv}y^{v-1}(b)] = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad (3)$$

де λ – спектральний параметр, $\omega(x)$ і $f_j(x)$ задовольняють умову

$$(C) \quad \omega = \sigma', \quad \sigma \in BV_p^+[a, b], \quad \sigma^* = \sigma, \quad f_j \in \overline{BV}_p^+[a, b], \quad j = \overline{0, m-l-1},$$

і $U_k(y)$ – лінійно незалежні крайові форми із заданими числовими матрицями P_{kv}, Q_{kv} ($k, v = \overline{1, m}$) і квазіпохідними $y^{[k]}(x)$ ($k = \overline{0, m}$), що визначаються виразами (при $m = 2n$ тут слід покласти $l = n$, $B \equiv 0$, $f_n \equiv 0$):

$$\begin{aligned} y^{[k]} &= y^{(k)}, \quad k = \overline{0, l-1}; \quad y^{[l+k-1]} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} B(x)y^{(l+k-1)}, \quad k = \overline{1, m-2n}; \\ y^{[l+k]} &= -(y^{[l+k-1]})' + f'_{m-l-k}, \quad k = \overline{1, 2(n-l)}; \\ y^{[m-l]} &= -\frac{1+i}{\sqrt{2}} B(x)(y^{[m-l-1]})' + \sum_{r=0}^l B_{r0}(x)y^{(l-r)} + f'_l; \\ y^{[m-l+k]} &= -(y^{[m-l+k-1]})' + \sum_{r=0}^l B_{rk}(x)y^{(l-r)} + f'_{l-k}, \quad k = \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (4)$$

Означення 1. Під розв'язком крайової задачі (2), (3) розуміємо функцію $y \in \overline{AC}_p[a, b]$ таку, що $U_k(y) = 0$, $k = \overline{1, m}$ і справджується тотожність

$$(y^{[m]} - \lambda \omega y, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \overline{D}(I), \quad I \supseteq [a, b].$$

Якщо $f_j(x) \equiv \text{const}$ ($j = \overline{0, m-l-1}$), то задача (2), (3) набуває вигляду

$$I_m[y] = \lambda \omega(x)y, \quad U_k(y) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Значення λ , для яких задача (5) має нетривіальні розв'язки, є власними значеннями цієї задачі, а самі розв'язки – відповідними власними векторами.

3. Метод дослідження. Основна технічна ідея полягає в заміні крайової задачі для системи рівнянь високого порядку деякою еквівалентною задачею для системи першого порядку. Перевага такого підходу очевидна – присутність у системі лише перших похідних дає змогу звести аналіз сингулярностей до питання про розташування стрибків функцій, похідні яких породжують ці сингулярності.

Лема 1. Нехай справджуються умови (А)–(С) і співвідношення

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^l [P_{kj} P_{v, m-j+1}^* - P_{k, m-j+1} P_{vj}^*] + \sum_{j=l+1}^n (-1)^{j-l} i [P_{kj} P_{v, m-j+1}^* - P_{k, m-j+1} P_{vj}^*] + \\ &+ (-1)^{n-l+1} i P_{k, n+1} P_{v, n+1}^* = \sum_{j=1}^l [Q_{kj} Q_{v, m-j+1}^* - Q_{k, m-j+1} Q_{vj}^*] + \\ &+ \sum_{j=l+1}^n (-1)^{j-l} i [Q_{kj} Q_{v, m-j+1}^* - Q_{k, m-j+1} Q_{vj}^*] + (-1)^{n-l+1} i Q_{k, n+1} Q_{v, n+1}^* \end{aligned} \quad (6)$$

(якщо $m = 2n$, то в (6) слід покласти $l = n$, $P_{k, n+1} = Q_{k, n+1} = 0$, $k = \overline{1, 2n}$). Тоді задача (2), (3) еквівалентна такій задачі:

$$Jy' = [B'(x) + \lambda A'(x)]y + F'(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (7)$$

$$y(a) = My, \quad y(b) = Ny, \quad M^* JM = N^* JN, \quad (8)$$

де $J, M, N \in \mathbb{C}^{mp \times mp}$, $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{mp}$, $B, A \in BV_{mp}^+[a, b]$, $F \in \overline{BV}_{mp}^+[a, b]$, $v \in \mathbb{C}^{mp}$ – параметр, $\text{rank}(M|N) = mp$, до того ж $J^* = -J$, $J^* J = E_{mp}$, $B^* = B$, $A^* = A$.

Доведення. Система (2) приводиться до вигляду (7) за допомогою вектора $y = (y, y^{[1]}, \dots, y^{[m-1]})^T$, складеного з квазіпохідних (4). При цьому вектор

$$F = \left(-f_0, \dots, -f_{l-1}, \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int B^{-1} df_l, -if_{l+1}, \dots, (-1)^{n-l} if_n, \dots, if_{m-l-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_l \right)^T,$$

а матриці $J, A(x), B'(x)$ порядку mp мають таку блокову структуру (описуємо лише ненульові $(p \times p)$ -блоки $\hat{J}_{kv}, \hat{A}_{kv}, \hat{B}_{kv}$ ($k, v = \overline{1, m}$) кожної з матриць):

$$\hat{J}_{k,m-k+1} = \begin{cases} -E_p, & k = \overline{1, l}; \\ (-1)^{m-k} iE_p, & k = \overline{l+1, m-l}; \\ E_p, & k = \overline{m-l+1, m}; \end{cases} \quad \hat{A}_{11} = \sigma;$$

$$\hat{B}_{kv} = \begin{cases} B_{0,n-k+1} B_{00}^{-1} B_{n-v+1,0} - B_{n-v+1,n-k+1}, & k, v = \overline{1, n}; \\ -B_{0,n-k+1} B_{00}^{-1}, & k = \overline{1, n}, v = n+1; \\ -B_{00}^{-1} B_{n-v+1,0}, & k = n+1, v = \overline{1, n}; \\ -B_{00}^{-1}, & k = v = n+1; \\ E_p, & k = \overline{2, m}, k \neq n+1, v = m-k+2 \end{cases} \quad \text{для } m = 2n,$$

$$\hat{B}_{kv} = \begin{cases} -B_{l-v+1,l-k+1}, & k, v = \overline{1, l}; \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} B_{0,l-k+1} B^{-1}, & k = \overline{1, l}, v = l+1; \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} B^{-1} B_{l-v+1,0}, & k = l+1, v = \overline{1, l}; \\ -B^{-1} B_{00} B^{-1}, & k = v = l+1; \\ -\frac{1+i}{\sqrt{2}} B^{-1}, & k = l+1, v = m-l+1; \\ -\frac{1-i}{\sqrt{2}} B^{-1}, & k = m-l+1, v = l+1; \\ E_p, & k = \overline{2, m}, k \neq l+1, m-l+1, v = m-k+2 \end{cases} \quad \text{для } m = 2n+1.$$

Звідси на підставі умов (A) і (C) випливає $B, A \in BV_{mp}^+[a, b]$ і $F \in \overline{BV}_{mp}^+[a, b]$. Легко також установити, що $J^* = J$, $J^* J = E_{mp}$ і внаслідок умови (B) справджуються рівності $B^* = B$, $A^* = A$.

Умови (3) приводяться до вигляду (8) за допомогою матриць $M = JP^*$, $N = -JQ^*$, де P, Q – блокові матриці порядку mp , складені з коефіцієнтів P_{kv}, Q_{kv} крайових форм $U_k(y)$. При цьому маємо

$$M^* JM - N^* JN = PJ^* JJP^* - QJ^* JJQ^* = PJP^* - QJQ^* = 0.$$

Тут використано рівність (6), яка з огляду на структуру матриці J рівносильна умові $PJP^* = QJQ^*$. □

Зауваження 1. Коректність означення розв'язку ([13]) задачі (2), (3) випливає з умов (A), (C) і рівностей

$$\{J[\Delta B(x) + \lambda \Delta A(x)]\}^2 = 0, [\Delta B(x) + \lambda \Delta A(x)] J \Delta F(x) = 0, \quad (9)$$

котрі, як легко перевірити, справджуються для довільних $\lambda \in \mathbb{C}, x \in [a, b]$.

4. Основні результати. Далі вважаємо, що виконуються умови (A) – (C) і (6).

Теорема 1. Нехай $\sigma(x)$ неспадна при $x \in [a, b]$ і відмінна від сталої матриця. Тоді задача (5) має не більш ніж зліченну кількість дійсних власних значень $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, які не мають скінченної граничної точки. Власні вектори $y(x, \lambda_k)$, що відповідають різним власним значенням, є σ -ортогональними, тобто

$$\int_a^b y^*(x, \lambda_k) d\sigma(x) y(x, \lambda_v) = 0, \quad \lambda_k \neq \lambda_v. \quad (10)$$

Доведення. Нехай $y(x, \lambda_k)$ – власний вектор крайової задачі (5), що відповідає власному значенню λ_k . Тоді на підставі леми 1 маємо

$$Jy'_k = [B'(x) + \lambda_k A'(x)] y_k, \quad (11)$$

$$y_k(a) = Mv_k, \quad y_k(b) = Nv_k, \quad M^* JM = N^* JN, \quad (12)$$

$y_k(x) = (y(x, \lambda_k), y^{(1)}(x, \lambda_k), \dots, y^{(m-1)}(x, \lambda_k))^T$. Унаслідок (9) добутки $y_k^* J y'_v$ і $y_k^* J y_v$ існують у сенсі теорії узагальнених функцій, до того ж справджується рівність

$$(y_k^* J y'_v)' - y_k^* (J y'_v)' - (J y'_k)' y_v = y_k^* [B' + \lambda_k A'] y_v - y_k^* [B'' + \lambda_k A''] y_v = (\lambda_v - \lambda_k) y_k^* A' y_v,$$

тобто $y_k^*(b) J y_v(b) - y_k^*(a) J y_v(a) = (\lambda_v - \lambda_k) \int_a^b y_k^*(x) dA(x) y_v(x)$. Тут використано співвідношення (11) і властивості матриць $J, A(x), B(x)$. Ураховуючи умови (12), структуру матриці $A(x)$ і власного вектора $y_k(x)$, маємо:

$$(\lambda_v - \lambda_k) \int_a^b y^*(x, \lambda_k) d\sigma(x) y(x, \lambda_v) = 0. \quad (13)$$

Нехай $\lambda_v = \lambda_k$. Оскільки $\sigma(x)$ неспадна при $x \in [a, b]$ і відмінна від сталої матриця, то для довільного власного вектора $y(x, \lambda_k)$ справджується нерівність $\int_a^b y^*(x, \lambda_k) d\sigma(x) y(x, \lambda_k) > 0$. На ця підставі з (13) випливає, що $\lambda_k = \bar{\lambda}_k$, тобто всі власні значення задачі (5) є дійсними. При $\lambda_v \neq \lambda_k = \bar{\lambda}_k$ з (13) випливає σ -ортогональність (10) власних векторів $y(x, \lambda_k)$ і $y(x, \lambda_v)$.

Власні значення задачі є нулями визначника $\Delta(\lambda) = \det[U_k(Y_v)]_{k,v=1}^m$, де $Y_1(x, \lambda), Y_2(x, \lambda), \dots, Y_m(x, \lambda)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння

$$I_m[Y] - \lambda \omega(x) Y = 0, \quad Y: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{p \times p}, \quad (14)$$

асоційованого з рівнянням (5) [7, с.110]. За результатами роботи [14] ці розв'язки є цілими функціями від параметра λ , тому $\Delta(\lambda)$ – також ціла функція. Щойно було показано, що вона не має недійсних нулів, тому не анулюється тотожно. Отже, множина нулів цієї функції не має скінченної граничної точки.

Зауваження 2. Власні вектори, що відповідають кратному власному значенню, можна теж вибрати σ -ортогональними, застосувавши процес ортогоналізації.

Зауваження 3. Якщо $\sigma(x)$ – східчаста матрична функція зі скінченною кількістю точок розривів, тобто матриця $\omega = \sigma'$ містить особливості імпульсного типу, то задача (5) має скінченну кількість власних значень і відповідних їм власних векторів.

Теорема 3. Якщо λ не є власним значенням задачі (5), то неоднорідна задача (2), (3) має єдиний розв'язок $y \in AC_p[a, b]$, що зображається у вигляді

$$y(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_a^b \frac{\partial^j G(x, t, \lambda)}{\partial t^j} df_j(t). \quad (15)$$

Доведення. Для $j = \overline{0, m-1}$ побудуємо розв'язки задач

$$I_m[y] - \lambda \omega(x) y = (-1)^{j+1} f_j^{(j+1)}(x), \quad U_k(y) = 0, \quad k = \overline{1, m} \quad (16)$$

і просумуємо їх. Нехай функція $K: [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times p}$ за змінною x є розв'язком рівняння (14) таким, що $K_x^{[k]}(x, t, \lambda)|_{x=t} = 0, k = \overline{0, m-2}, K_x^{[m-1]}(x, t, \lambda)|_{x=t} = E_p$.

Тоді загальний розв'язок системи (16) має вигляд

$$y_j(x) = \begin{cases} \sum_{r=1}^m K^{*(r-1)*}(x, a, \lambda) c_r^j + \int_a^x K^{*(j)*}(x, t, \lambda) df_j(t), & j \neq l \\ \sum_{r=1}^m K^{*(r-1)*}(x, a, \lambda) c_r^j + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \int_a^x K^{*(l)*}(x, t, \lambda) B^{-1}(t) df_l(t), & j = l; \end{cases} \quad (17)$$

символ $\{*\}$ означає квазіпохідну в сенсі спряженого до (14) рівняння [12, с.50]. Ураховуючи вирази для квазіпохідних

$$\begin{aligned}
 Y^{(k)} &= Y^{(k)}, \quad k = \overline{0, l-1}; \quad Y^{(l+k-1)} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} B^*(x) Y^{(l+k-1)}, \quad k = \overline{1, m-2n}; \\
 Y^{(l+k)} &= (Y^{(l+k-1)})', \quad k = \overline{1, 2(n-l)}; \\
 Y^{(m-l)} &= \frac{1-i}{\sqrt{2}} B^*(x) (Y^{(m-l-1)})' - \sum_{s=0}^l B_{0s}^*(x) Y^{(l-s)}; \\
 Y^{(m-l+k)} &= -(Y^{(m-l+k-1)})' - \sum_{s=0}^l B_{ks}^*(x) Y^{(l-s)}, \quad k = \overline{1, l},
 \end{aligned} \tag{18}$$

перепишемо (16) у вигляді

$$y_j(x) = \sum_{r=1}^m K^{*(r-1)*}(x, a, \lambda) c_r^j + \int_a^x K^{*(r-1)*}(x, t, \lambda) df_j(t); \tag{19}$$

тут символ $\langle \cdot \rangle$ означає звичайну похідну (\cdot) для $j = \overline{0, l}$ і квазіпохідну $\{ \cdot \}$ для $j = \overline{l+1, m-l-1}$.

Розв'язок (19) містить m невідомих числових векторів. Для їх відшукування необхідно задовольнити крайові умови (3). Таким чином, приходимо до системи m матричних рівнянь $\sum_{r=1}^m U_k(K^{*(r-1)*}(x, a, \lambda)) c_r^j + \sum_{v=1}^m Q_{kv} \int_a^b K^{(v-1)*}(b, t, \lambda) df_j(t) = 0$. Оскільки за умовою теореми λ не є власним значенням, то визначник цієї системи не дорівнює нулеві. Тому вектори c_r^j ($r = \overline{1, m}$) визначаються із системи однозначно. Через $V_{kr}(\lambda)$ позначимо матрицю порядку p , складену з алгебричних доповнень елементів матриці $U_k(K^{*(r-1)*}(x, a, \lambda))$, $k, r = \overline{1, m}$ у визначнику $\Delta(\lambda)$.

Нехай $W_{kr}(\lambda) = -V_{kr}^t(\lambda)$. Тоді для $r = \overline{1, m}$

$$c_r^j = \sum_{k,v=1}^m \frac{W_{kr}(\lambda) Q_{kv}}{\Delta(\lambda)} \int_a^b K^{(v-1)*}(b, t, \lambda) df_j(t).$$

Підставляємо ці значення у формулу (19). Вираз

$$G_j(x, t, \lambda) = \begin{cases} \sum_{r,k,v=1}^m K^{*(r-1)*}(x, a, \lambda) \frac{W_{kr}(\lambda) Q_{kv}}{\Delta(\lambda)} K^{(v-1)*}(b, t, \lambda), & x < t; \\ \sum_{r,k,v=1}^m K^{*(r-1)*}(x, a, \lambda) \frac{W_{kr}(\lambda) Q_{kv}}{\Delta(\lambda)} K^{(v-1)*}(b, t, \lambda) + K^{*(r-1)*}(x, t, \lambda), & x \geq t \end{cases}$$

називаємо матрицею Гріна крайової задачі (19). З огляду на структуру цієї матриці очевидно є така її властивість:

$$G_j(x, t, \lambda) = \frac{\partial^j G_0(x, t, \lambda)}{\partial t^j} \equiv \frac{\partial^j G(x, t, \lambda)}{\partial t^j} \quad \forall j = \overline{0, l}. \tag{20}$$

На підставі (18) маємо $K^{*(l+k)*}(x, t, \lambda) = \frac{\partial^k K^{*(l)*}(x, t, \lambda)}{\partial t^k}$, $k = \overline{1, m-2l-1}$, тому

властивість (20) справджується також для $j = \overline{l+1, m-l-1}$, що й доводить (15).

Зауваження 4. Доведення цього твердження можна було б отримати як наслідок із теореми А зі статті [6], на підставі якої розв'язок крайової задачі (7), (8) за умови, що λ не є власним значенням, має вигляд

$$Y(x) = \int_a^b R(x, t, \lambda) dF(t), \tag{21}$$

де розв'язувальне ядро

$$R(x, t, \lambda) = \begin{cases} \Phi(x, a, \lambda) M [\Phi(b, a, \lambda) M - N]^{-1} \Phi(b, t, \lambda) J, & x < t; \\ \Phi(x, a, \lambda) M [\Phi(b, a, \lambda) M - N]^{-1} \Phi(b, t, \lambda) J - \Phi(x, t, \lambda) J, & x \geq t \end{cases}$$

є ермітовим у тому розумінні, що $R(x, t, \lambda) = R^*(t, x, \bar{\lambda})$, якщо $x \neq t$ (тут $\Phi(x, t, \lambda)$ – фундаментальна матриця відповідної однорідної системи).

Однак для отримання конкретного вигляду розв'язку вибраній нами шлях видається більш конструктивним. Порівнюючи зображення (15) і (21), легко зрозуміти, що перша $(p \times mp)$ -блокова стрічка ядра $R(x, t, \lambda)$ є такою:

$$\left(-G, \dots, -\frac{\partial^{l-1} G}{\partial t^{l-1}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\partial^l G}{\partial t^l} B^{-1}, i \frac{\partial^{l+1} G}{\partial t^{l+1}}, \dots, (-1)^{n-l+1} i \frac{\partial^n G}{\partial t^n}, \dots, -i \frac{\partial^{m-l-1} G}{\partial t^{m-l-1}}, \underbrace{0, \dots, 0} \right).$$

Теорема 4. Матриця Гріна $G_j(x, t, \lambda)$ має такі властивості:

- 1) $G_j(x, t, \lambda)$ на кожному з інтервалів $[a, t]$ і $(t, b]$ за змінною x є розв'язком крайової задачі (5);
- 2) $G_j(x, t, \lambda)$ та її квазіпохідні за змінною x до $(m-l-1)$ -го порядку включно є неперервними функціями за сукупністю змінних, абсолютно неперервними за кожною зі змінних при фіксованій іншій та цілими функціями від параметра λ ;
- 3) $G_j(x, t, \lambda)$ на діагоналі $x=t$ задовольняє умови стрибків:

$$G_j^{[q]}(t+0, t, \lambda) - G_j^{[q]}(t-0, t, \lambda) = 0, \quad q = \overline{0, m-l-1};$$

$$G_j^{[m-l-1+q]}(t+0, t, \lambda) - G_j^{[m-l-1+q]}(t-0, t, \lambda) =$$

$$= \sum_{r,k,v=1}^m \sum_{s=0}^{l-1} \Delta A_{l-s,q}(t) K^{*(r-1)*}(t, a, \lambda) \frac{W_{kr}(\lambda) Q_{kv}}{\Delta(\lambda)} K^{(v-1)*}(b, t, \lambda) + \Theta_{j+q,j},$$

$$q = \overline{1, l-1}, \quad \Theta_{kv} = \begin{cases} 0, & k \neq v; \\ E_p, & k = v; \end{cases}$$

$$G_j^{[m-1]}(t+0, t, \lambda) - G_j^{[m-1]}(t-0, t, \lambda) =$$

$$= \sum_{r,k,v=1}^m \left\{ \sum_{s=0}^{l-1} \Delta A_{l-s,q}(t) K^{*(r-1)*}(t, a, \lambda) - \lambda \Delta \sigma(t) K^{*(r-1)*}(t, a, \lambda) \right\} \times \\ \times \frac{W_{kr}(\lambda) Q_{kv}}{\Delta(\lambda)} K^{(v-1)*}(b, t, \lambda) + \Theta_{j0};$$

$$4) G_j(x, t, \lambda) = \frac{\partial^j G_0(x, t, \lambda)}{\partial t^j};$$

$$5) G_j(x, t, \lambda) = G_j^*(t, x, \bar{\lambda}) \text{ при } x \neq t.$$

Доведення. Властивість 5) є наслідком ермітовості розв'язувального ядра $R(x, t, \lambda)$. Властивість 4) встановлена вище. Властивості 1) – 3) випливають зі структури матриці Гріна й властивостей розв'язків операторного рівняння (14) і спряженого до нього. Дійсно, матричні функції $K^{*(r)*}(x, t, \lambda)$, $r = \overline{0, m-1}$ і $K^{[q]}(x, t, \lambda)$, $q = \overline{0, m-1}$ утворюють нормальні при $x=t$ фундаментальні системи розв'язків цих рівнянь, тому за результатами роботи [13] ці функції разом зі своїми квазіпохідними відповідно за змінними x і t до порядку $m-l-1$ включно належать до простору $AC_p[a, b]$ при фіксованій іншій змінній, а квазіпохідні вищих порядків є елементами простору $BV_p^+[a, b]$. До того ж для довільного $r = \overline{0, m-1}$

$$K^{*(r)*q}(x, t, \lambda) = \begin{cases} E_p, & r+q = m-1; \\ 0, & r+q \neq m-1, \end{cases} \quad \Delta_x K^{*(r)*q}(x, t, \lambda) = 0, \quad q = \overline{0, m-l-1},$$

$$\Delta_x K^{*(r)*[m-l-1+q]}(x, t, \lambda) = \sum_{s=0}^{l-1} \Delta A_{l-s,q}(x) K^{*(r)*[s]}(x, t, \lambda), \quad q = \overline{1, l-1},$$

$$\Delta_x K^{*(r)*[m-1]}(x, t, \lambda) = \sum_{s=0}^{l-1} \Delta A_{l-s,j}(x) K^{*(r)*[s]}(x, t, \lambda) - \lambda \Delta \sigma(x) K^{*(r)*}(x, t, \lambda).$$

5. Приклад. При дослідженні згинно-крутильних коливань балки [15, с.156] після відокремлення змінних виникає система диференціальних рівнянь

$$\begin{bmatrix} EI_z & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & EI_w \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varpi \\ \theta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GI_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varpi \\ \theta \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \rho F & 0 & -\rho F a_2 \\ 0 & \rho F & \rho F a_3 \\ -\rho F a_2 & \rho F a_3 & \rho I_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varpi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

де ϑ, ϖ – переміщення центра згину перетину балки, θ – кут закручування, $E, I_z, I_y, I_w, G, I_k, I_A, \rho, a_2, a_3$ – механічні та геометричні характеристики балки, λ – спектральний параметр, що дорівнює квадрату частоти вільних коливань, $(f_1, f_2, f_3)^T$ – вектор зовнішніх зусиль. Друга і третя матриці-коефіцієнти цієї системи та її права частина можуть містити узагальнені функції, що відповідає реальній фізичній моделі з дискретно-неперервним розподілом параметрів: кусково-змінний переріз, зосереджені маси, моменти, узагальнені зовнішні зусилля.

Якщо позначити $y = (\vartheta, \varpi, \theta)^T$, $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, а через B_{00}, B_{11}, ω відповідно першу, другу і третю матриці-коефіцієнти, то систему можна переписати у вигляді векторного к.-д. рівняння

$$(B_{00}(x)y'')' - (B_{11}(x)y')' - \lambda \omega(x)y = f(x), \quad (22)$$

що є, вочевидь, частинним випадком рівняння (2). Приєднуючи до рівняння (22) один із наборів крайових умов

$$\begin{aligned} y^{[0]}(a) = y^{[1]}(a) = y^{[0]}(b) = y^{[1]}(b) = 0, \quad y^{[0]}(a) = y^{[2]}(a) = y^{[0]}(b) = y^{[2]}(b) = 0, \\ y^{[1]}(a) = y^{[3]}(a) - c_1 y^{[0]}(a) = y^{[1]}(b) = y^{[3]}(b) + c_2 y^{[0]}(b) = 0, \\ y^{[2]}(a) = y^{[3]}(a) = y^{[2]}(b) = y^{[3]}(b) = 0, \end{aligned}$$

де квазіпохідні $y^{[k]}(x)$, $k = \overline{0,3}$ на підставі формул (4) мають вигляд $y^{[0]} = y$, $y^{[1]} = y'$, $y^{[2]} = B_{00}(x)y''$, $y^{[3]} = -(B_{00}(x)y'')' + B_{11}(x)y'$, отримуємо задачі про коливання балки, кінці котрої закріплені відповідно жорстко, шарнірно, пружно або є вільними (можливі й різні комбінації способів закріплення кінців). При цьому, зрозуміло, мають місце сформульовані в пункті 4 властивості.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
2. Schwabik S. Generalized Ordinary Differential Equations. – World Scientific, Singapore, 1992.
3. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 750 с.
4. Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазидиференціальних рівнянь парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т.44. – №1. – С.43–53.
5. Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазидиференціальних рівнянь непарного порядку // Математичні студії. – 2001. – Т.16. – №1. – С.61–75.
6. Мазуренко В.В., Тацій Р.М. О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т.39. – №3. – С.328–336.
7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
8. Walker Ph.W. A vector-matrix formulation for formally symmetric ordinary differential equations with applications to solutions of integrable square // J. London Math. Soc. – 1974. – (2) 9. – P.151–159.
9. Рофе-Бекетов Ф.С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Доклады АН СССР. – 1969. – Т.184. – №5. – С.1034–1037.
10. Everitt W.N. Integrable-square, analytic solutions of odd-order, formally symmetric, ordinary differential equations // Proc. London Math. Soc. – 1972. – Т.25 (3). – P.156–182.
11. Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n -го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т.7 (49). – №3. – С.479–532.
12. Тацій Р.М. Узагальнені квазидиференціальні рівняння // Препр. №2-94. – Львів: ІППММ АН України, 1994. – 56 с.
13. Мазуренко В.В., Тацій Р.М. Узагальнена схема Аткинсона як метод дослідження дискретно-неперервних крайових задач // Міжнар. наук. конф. "Шості Боголюбівські читання": Тези доповідей. – К., 2003. – С.134.

14. Тацій Р.М., Кісілевич В.В., Стасюк М.Ф., Пахолок Б.Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинський математичний вісник. – 1995. – Вип. 2. – С.165–167.
15. Вибраши в технике: Справочник в 6 т. / Под ред. В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – Т.1. – 352 с.

Structure of the spectrum of the boundary value problem for the system of differential equations with distributions as coefficients is researched. Formula in integral form with the aid of a structurally constructed the Green matrix for solutions is obtained. Its properties are studied.

Key words: quasidifferential equation, boundary value problem, Green matrix.

УДК 517.982
ББК 22.162.2

А.В. Соломко, С.В. Шарин

ВЕКТОРНА ОПЕРАЦІЯ КРОС-КОРЕЛЯЦІЇ В ДОВІЛЬНОМУ КОНУСІ

Досліджуються деякі топологічні властивості локально опуклих просторів дуальної пари $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$. Визначається векторна операція крос-кореляції. Доводиться теорема, яка характеризує операцію крос-кореляції як лінійний неперервний оператор над простором векторнозначних основних функцій із носіями в конусі.

Ключові слова: локально опуклий простір, операція крос-кореляції, узагальнена функція, шортка, монтелевий простір.

Уперше теорія узагальнених функцій була систематизована й математично обґрунтована на основі теорії локально опуклих топологічних просторів французьким математиком Л.Шварцом [1]. Пізніше теорію розподілів інтенсивно розробляли у своїх працях Я.Мікусінський і Р.Сікорський [2], І.М.Гельфанд і Г.Є.Шилов [3], Л.Хермандер [4] та багато інших математиків. Розвиток цієї теорії стимулювався потребами математичної теоретичної фізики та особливо квантової механіки. У свою чергу, теорія узагальнених функцій, яка базується на основних методах функціонального аналізу, дала поштовх для розвитку ряду важливих напрямків у математиці: теорії диференціальних рівнянь, операційного числення, теорії перетворення Фур'є тощо.

У цій статті, застосовуючи теорію двоїстості локально опуклих просторів, досліджуємо ряд топологічних властивостей просторів дуальної пари $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$. Зауважимо, що саме ці властивості забезпечують нам умови для побудови функціонального числення як для скалярного, так і для векторного випадку [5, 6], а також для доведення теорем про топологічні ізоморфізми просторів узагальнених функцій комутантам (C_\circ) -напівгруп операторів.

Описується також векторна операція крос-кореляції та доводиться теорема, яка визначає векторну операцію крос-кореляції як лінійний неперервний оператор, що діє над простором нескінченно диференційованих фінітних функцій з носіями в конусі й залишає простори інваріантними. Ця теорема є узагальненням теореми Шварца [7, гл.І, п.4.7] для векторної операції крос-кореляції на довільний конус.

Розглянемо в загальному випадку класичну двоїстість $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$. Як звичайно, $D(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно-диференційованих функцій з компактними носіями з топологією рівномірної збіжності на компактах разом з усіма похідними, $D'(\mathbb{R}^n)$ – спряжений до $D(\mathbb{R}^n)$ простір лінійних неперервних функціоналів, введений Л. Шварцом [1].

Позначимо через Γ – довільний замкнений опуклий гострий тілесний конус в \mathbb{R}^n . Нехай всюди далі D'_Γ – підпростір у $D'(\mathbb{R}^n)$ тих розподілів f , носії $\text{supp } f$ яких містяться в Γ [7, гл.І, п.4.5].

Поляра підпростору D'_Γ відносно двоїстості $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$ має вигляд

$$(D'_\Gamma)^\circ = \{\varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \Gamma\}. \quad (1)$$

Звуження білінійної форми, породженої двоїстістю $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$, на прямий добуток $D'_\Gamma \times D(\mathbb{R}^n)$ є константа на довільній множині $\{(f_0, \varphi)\}$, де $f_0 \in D'_\Gamma$ – фіксований функціонал, а функція φ пробігає клас еквівалентності φ_Γ у фактор-просторі $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^\circ$ з відповідною фактор-топологією. Отже, білінійна форма $D'_\Gamma \times D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^\circ \ni \langle f, \varphi_\Gamma \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \varphi_\Gamma$, індукована двоїстістю $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$, ставить простори D'_Γ і $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^\circ$ у двоїстість.

Визначимо відображення

$$\rho: \varphi \rightarrow \lambda_\Gamma \cdot \varphi, \quad (2)$$

де $\lambda_\Gamma(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Gamma \\ 0, & t \notin \Gamma \end{cases}$ – характеристична функція конуса Γ , а ρ – оператор множення на характеристичну функцію.

Звідси одразу випливає, що ядро відображення (2) збігається з полярною простору D'_Γ , визначеною за формулою (1), бо $\forall \varphi \in (D'_\Gamma)^\circ$ маємо $\lambda_\Gamma \cdot \varphi = 0$, оскільки $\text{supp } \varphi \cap \Gamma = \emptyset$. Тому фактор-відображення реалізується формулою

$$\rho: D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \rightarrow \varphi_\Gamma \in D_\Gamma,$$

де клас $\varphi_\Gamma = \varphi_\Gamma(t)$ залежить від змінної $t \in \Gamma$. Опишемо топологію фактор-простору D_Γ . Розглянемо довільний компакт $K \subset \Gamma$ та його відкритий ε -оکیل $\Delta_{\varepsilon, K}$. Покладемо $D(\Delta_{\varepsilon, K}) = \lim_{S_i \subset \Delta_{\varepsilon, K}} \text{ind } D_{S_i}$, де $\{S_i\}$ – напрямлена за включенням послідовність компактів така, що

$\bigcup_i S_i = \Delta_{\varepsilon, K}$. При $S_i \subset S_{i+1}$ вкладення просторів Фреше $D_{S_i} \subset D_{S_{i+1}}$ – компактні [8, гл. II, п. 6.3].

Якщо виконується нерівність $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$, то звуження $D(\Delta_{\varepsilon, K})|_{\Delta_{\varepsilon_{i+1}, K}} \subset D(\Delta_{\varepsilon_i, K})$ – неперервні, тому визначена проективна границя $D_K = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \text{pr } D(\Delta_{\varepsilon_i, K})$ паростків C^∞ -функцій на компактi K . Тоді

$$D_\Gamma = \bigcup_{K \subset \Gamma} D_K = \lim_{K \subset \Gamma} \text{ind } D_K. \quad (3)$$

Топологія в D_Γ рівносильна секвенціальній збіжності $\{\varphi_m\}_\Gamma \rightarrow \varphi_\Gamma$, якщо для довільного компактна $K \subset \Gamma$ існують представники $\{\varphi_m \in (\varphi_m)_\Gamma : \text{supp } \varphi_m \subset K\}$ та $\{\varphi \in \varphi_\Gamma : \text{supp } \varphi \subset K\}$ такі, що

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} |\partial^k \varphi_m - \partial^k \varphi| = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n,$$

де

$$\partial^k = (-i)^{|k|} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n}, \quad \partial_j^{k_j} = (-i)^{k_j} \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}.$$

Справді, для довільної функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ виконується умова

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_{\varepsilon/2, K} \\ 0, & t \notin \Delta_{\varepsilon, K} \end{cases}, \quad \text{supp } (\rho_\varepsilon \cdot \varphi) \subset \Delta_{\varepsilon, K},$$

і відповідний клас еквівалентності $\varphi_\Gamma \in D_\Gamma$ можна ототожнити з паростком C^∞ -функцій вигляду $\rho_\varepsilon \cdot \varphi$. З викладених вище міркувань безпосередньо випливає таке:

Твердження 1. Простори D_Γ і $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^\circ$ топологічно ізоморфні й канонічна білінійна форма з $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$ індукує двоїстість $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$.

Твердження 2. Простір D_Γ є (LF) -простором, зокрема він – борнологічний.

Доведення. Для кожного компакта $K \subset \Gamma$ простір D_K є замкненим підпростором простору C_K^∞ всіх нескінченно-гладких у K функцій φ з набором півнорм $\|\varphi\|_m = \sum_{|k| \leq m} \sup_{t \in K} |\partial^k \varphi(t)|$, $m \in \mathbb{N}$. Останній, як відомо [9, гл. I, п. 9], є простором Фреше, отже, D_K – простір Фреше. Те, що D_Γ є (LF) -простором, випливає з формули (3). Простори D_K як метризовні є борнологічні, а борнологічність індуктивної границі борнологічних просторів є відомим фактом [8, гл. II, п. 8.2].

Твердження 3. Простір D_Γ – монтелевий.

Доведення. Монтелевість простору D_K виходить із монтелевості C_K^∞ і замкненості D_K в C_K^∞ . Монтелевість індуктивної границі випливає з її регулярності.

Твердження 4. Нехай для довільного компакту $K \subset \Gamma$ простір D'_K – спряжений до простору D_K із сильною топологією відносно відповідної дуальної пари $\langle D'_K, D_K \rangle$. Тоді простір D'_Γ у своїй сильній топології $\beta(D'_\Gamma, D_\Gamma)$ топологічно ізоморфний проективній границі

$$D'_\Gamma = \lim_{K \subset \Gamma} \text{pr } D'_K.$$

Доведення. У [10] подано співвідношення двоїстості для проективних та індуктивних границь локально опуклих просторів з їх сильними топологіями. Для розглядуваної дуальної пари ці співвідношення будуть мати вигляд

$$\langle D'_\Gamma, \beta(D'_\Gamma, D_\Gamma) \rangle = \lim_{K \subset \Gamma} \text{pr } \langle D'_K, \beta(D'_K, D_K) \rangle.$$

Твердження 5. Простір D'_Γ – монтелевий.

Доведення. Простір D'_Γ є монтелевим як сильно спряжений до простору D_Γ , який, згідно з попереднім твердженням, є монтелевим. Твердження доведено.

Простір D'_Γ є алгеброю з операцією згортки розподілів замість множення [7, гл. I, п. 4.5]. Згортка

$$D'_\Gamma \times D'_\Gamma \ni (f, h) \rightarrow f * h \in D'_\Gamma$$

визначається формулою

$$\langle f * h, \varphi_\Gamma \rangle = \langle f(x), \xi(x) \langle h(y), \eta(y) \varphi_\Gamma(x+y) \rangle \rangle,$$

де $\varphi_\Gamma \in D_\Gamma$ та $\xi(x), \eta(y)$ – довільні нескінченно диференційовані функції, рівні 1 в околі носіїв розподілів f та h відповідно і 0 поза межами цих околів.

Твердження 6. Згортка в алгебрі D'_Γ неперервна в сильній топології $\beta(D'_\Gamma, D_\Gamma)$.

Доведення. Оскільки множення рефлексивної локально опуклої алгебри неперервне [10], а з твердження 5 випливає, що згорткова алгебра D'_Γ є рефлексивною, то операція згортки в алгебрі D'_Γ із сильною топологією є неперервною.

Теорема 1. Виконується щільне вкладення $D_\Gamma \subset D'_\Gamma$ у сильній топології простору D'_Γ .

Доведення. Існування вкладення випливає з твердження 1.

Нехай $f \in D'_\Gamma$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon \in \Gamma$. Визначимо розподіл $f_\varepsilon \in D'_\Gamma$ таким правилом:

$$\langle f_\varepsilon, \varphi_\Gamma \rangle = \langle f, \varphi_\Gamma(\cdot + \varepsilon) \rangle, \quad \forall \varphi_\Gamma \in D_\Gamma.$$

Нехай $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ – послідовність основних функцій з простору $D(\mathbb{R}^n)$, що наближають дельта-функцію (дельта-видна послідовність), зосереджену в точці ε . Результат згортки належить простору D'_Γ і $\lim_{n \rightarrow \infty} f * \psi_n = f * \delta_\varepsilon = f_\varepsilon$ в сильній топології простору D'_Γ . Отже, D_Γ щільний в D'_Γ . Теорема доведена.

Зауважимо, що простір D'_Γ має ще одну важливу топологічну властивість, яка дозволяє в доведенні теорем про топологічні ізоморфізми застосовувати теорему про відкрите відображення [11] до D'_Γ та її гомоморфних образів.

(UF)-простором називається хаусдорфовий локально опуклий простір, який покривається зліченим числом своїх підпросторів Фреше, а (PUF)-простором називається замкнений підпростір добутку зліченного сімейства (UF)-просторів [12].

Теорема 2. Згорткова алгебра D'_Γ є простором типу (PUF).

Доведення. Позначимо через $D_{\Gamma_{\nu_k}}^m$ – простір усіх функцій на \mathbb{R}^n , що мають неперервну частинну похідну не вище порядку m і тотожно рівні нулю поза множиною Γ_{ν_k} , де Γ_{ν_k} – компакт, який утворюється при перетині конуса Γ із кулею радіуса ν_k , $\{\nu_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, – послідовність чисел така, що $\forall k \nu_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = \infty$. Очевидно, що простір $D_{\Gamma_{\nu_k}}^m$ є банаховим із нормою

$$\|x\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha x(t)|. \quad (4)$$

Тоді $D_{\Gamma_{\nu_k}} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} D_{\Gamma_{\nu_k}}^m$ і топологія простору $D_{\Gamma_{\nu_k}}$ – найслабша, при якій всі тотожні вкладки

$i_{km} : D_{\Gamma_{\nu_k}} \rightarrow D_{\Gamma_{\nu_k}}^m$ – неперервні. Відображення $i'_{km} : (D_{\Gamma_{\nu_k}}^m)' \rightarrow (D_{\Gamma_{\nu_k}}^m)'$, спряжене до i_{km} , ставить у відповідність кожній лінійній неперервній формі, заданій на $D_{\Gamma_{\nu_k}}^m$, її звуження на $D_{\Gamma_{\nu_k}}$. Тому

довільний елемент $x' \in \mathcal{E}_{\Gamma_{\nu_k}}^m = i'_{km} \left[(D_{\Gamma_{\nu_k}}^m)' \right]$ обмежений за нормою (4). Навпаки, всяка лінійна

форма на $D_{\Gamma_{\nu_k}}$, обмежена за нормою (4), за теоремою Гана-Банаха продовжується зі збереженням обмеженості на $D_{\Gamma_{\nu_k}}^m$ і, отже, належить $\mathcal{E}_{\Gamma_{\nu_k}}^m$. Таким чином, $\mathcal{E}_{\Gamma_{\nu_k}}^m$ є підпростором у $D_{\Gamma_{\nu_k}}'$, який складається з усіх лінійних форм на $D_{\Gamma_{\nu_k}}$, обмежених за нормою (4). Оскільки

довільний елемент $x' \in D_{\Gamma_{\nu_k}}'$ – обмежений, то робимо висновок, що $D_{\Gamma_{\nu_k}}' = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_{\Gamma_{\nu_k}}^m$, причому

кожний $\mathcal{E}_{\Gamma_{\nu_k}}^m$ є підпростором Фреше в $D_{\Gamma_{\nu_k}}'$. Отже, $D_{\Gamma_{\nu_k}}'$ – простір класу (UF). Але D_Γ – строга індуктивна границя просторів $D_{\Gamma_{\nu_k}}$, і всяка обмежена підмножина простору D_Γ міститься і

обмежена в деякому $D_{\Gamma_{\nu_k}}$. Звідси випливає, що D_Γ' є проективною границею просторів $D_{\Gamma_{\nu_k}}'$ і, отже, ізоморфний підпростору добутку $\prod_{k \in \mathbb{N}} D_{\Gamma_{\nu_k}}'$. Тобто D_Γ' є (PUF)-простором. Теорема доведена.

Твердження 7. Простір D_Γ та сильно спряжений до нього простір лінійних неперервних функціоналів D_Γ' є ядерними.

Доведення. Простір D_Γ є індуктивною границею (3) просторів D_K , $K \subset \Gamma$. Визначимо множину $V_m = \{\varphi \in D_K : \|\varphi\|_m \leq 1\}$. Тоді ядро функціоналу Мінковського p_{V_m} множини V_m

$$\text{Ker } p_{V_m}(\varphi) = \{\varphi \in D_K : p_{V_m}(\varphi) = 0\} = \{\varphi \in D_K : \lambda \varphi \in V_m \forall \lambda > 0\}$$

є тривіальне, тобто $N_{V_m} = \text{Ker } p_{V_m}(\varphi) = \{0\}$. Отже, $D_K / N_{V_m} = D_K$. Для довільних $m, l \in \mathbb{N}$ таких, що $m > l$, канонічне вкладення D_K / N_{V_m} в D_K / N_{V_l} здійснюється ядерним оператором [9, гл. X, ст. 401]. Таким чином, D_K – ядерний, а отже, простір D_Γ як індуктивна границя ядерних просторів є ядерним.

Оскільки простір, сильно спряжений до індуктивної границі послідовності ядерних просторів, кожен з яких є простором Фреше, є ядерним [13], то звідси випливатиме, що D_Γ' – ядерний. Твердження доведено.

Розглянемо комплексний банаховий простір $\{Y, \|\cdot\|\}$ і простір $D(\mathbb{R}^n, Y)$ – фінітних нескінченно-гладких Y -значних функцій $x(t)$ на \mathbb{R}^n з топологією, що визначається набором норм

$$\|x\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha x(t)|.$$

Визначимо для довільного дійсного числа $\nu > 0$ простір

$$D^\nu(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \varphi \subset \underbrace{[-\nu, \nu] \times \dots \times [-\nu, \nu]}_n \right\}, \text{ який є підпростором Фреше в } D(\mathbb{R}^n) \text{ і } D_{\Gamma_\nu} = \rho(D^\nu(\mathbb{R}^n)).$$

Теорема 3. Справедливі такі топологічні ізоморфізми:

$$D(\mathbb{R}^n, Y) = Y \tilde{\otimes} D(\mathbb{R}^n) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{ind } Y \tilde{\otimes} D^\nu(\mathbb{R}^n),$$

$$D_\Gamma(Y) = Y \tilde{\otimes} D_\Gamma = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{ind } Y \tilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu},$$

де операція “ $\tilde{\otimes}$ ” – поповнення тензорного добутку просторів у проективній топології.

Доведення. Топологічні ізоморфізми $D(\mathbb{R}^n, Y) = Y \tilde{\otimes} D(\mathbb{R}^n)$ і $D_\Gamma(Y) = Y \tilde{\otimes} D_\Gamma$ будуть справедливими внаслідок виконання твердження 7, ядерності простору $D(\mathbb{R}^n)$ та відомої теореми Гротендіка [13] про представлення тензорного добутку двох повних просторів, один з яких є ядерним.

Відомо [13], що поповнення проективного тензорного добутку просторів є “неперервне” відносно переходу до індуктивних границь у випадку, коли кожен з елементів системи є типу (DF), зокрема, сильно спряженим до деякого простору Фреше. Тому в цьому випадку маємо

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{ind } Y \tilde{\otimes} D^\nu(\mathbb{R}^n) = Y \tilde{\otimes} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{ind } D^\nu(\mathbb{R}^n),$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{ind } Y \tilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu} = Y \tilde{\otimes} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{ind } D_{\Gamma_\nu}.$$

Звідси й буде випливати справедливість відповідних топологічних ізоморфізмів. Теорема доведена.

Твердження 8. Для довільного елемента $x = x(t) \in D_\Gamma(Y)$, де $t \in \Gamma$, знайдеться число $\nu > 0$ таке, що $x(t) \in Y \tilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ і $x(t)$ можна подати у вигляді абсолютно збіжного ряду в просторі $Y \tilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ вигляду

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \otimes (\varphi_m)_\Gamma(t),$$

де $\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m| < \infty$, і послідовності $\{(\varphi_m)_\Gamma\}$ та $\{x_m\}$ прямують до нуля відповідно у просторах D_{Γ_ν} і Y .

Доведення. З означення простору $D_\Gamma(Y)$ випливає, що для кожного $x \in D_\Gamma(Y)$ існує таке число $\nu > 0$, що $x \in Y \tilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$. Очевидно, що простори Y і D_{Γ_ν} є метризовні. Тому для довільного елемента $x \in Y \tilde{\otimes} D_{\Gamma_\nu}$ можна застосувати теорему [8, гл. III, п. 6.4] про зображення елементів поповнення проективного тензорного добутку метризовних просторів, яка забезпечує нам розклад $x(t)$. Твердження доведено.

Операція крос-кореляції розподілу з основною функцією визначається рівностями:

$$M_f \varphi_\Gamma = \lambda_\Gamma \langle f(s), \tau, \varphi \rangle = \langle f(s), T_s \varphi_\Gamma \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n), f \in D'_\Gamma,$$

де $T_s = \rho \circ \tau_s \circ \rho^{-1}$, а $\tau_s : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi(t) \rightarrow \varphi(t+s) \in D(\mathbb{R}^n)$, $s \in \Gamma$, $t \in \mathbb{R}^n$ – n -параметрична напівгрупа зсувів уздовж конуса Γ .

Нехай I_Y – одиничний оператор, що діє в банаховому просторі Y . Відомо [14], що $M_f \in L(D_\Gamma)$, де $L(D_\Gamma)$ – простір лінійних неперервних відображень із D_Γ в D_Γ з топологією рівномірної збіжності на компактах. Очевидно, що оператор $I_Y \otimes M_f$ належить простору $L(D_\Gamma)$ і діє за формулою

$$(I_Y \otimes M_f)x(t) = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_f(\varphi_m)_\Gamma)(t), & t \in \Gamma, \\ 0, & t \notin \Gamma. \end{cases} \quad (5)$$

Зауважимо, що якщо функціонал $f \in D'_\Gamma$ – регулярний, то операцію крос-кореляції можемо записати таким чином:

$$(I_Y \otimes M_f)x(t) = \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_f(\varphi_m)_\Gamma)(t) dt,$$

де інтеграл у формулі – це інтеграл Бохнера від векторно-значної функції.

Твердження 9. Для довільних розподілів $f, g \in D'_\Gamma$ та функції $x(t) \in D_\Gamma(Y)$ маємо $(I_Y \otimes M_{f \circ g}) \in L(D_\Gamma(Y))$ й виконуються такі рівності:

$$(I_Y \otimes M_{f \circ g})x(t) = (I_Y \otimes M_f) \circ (I_Y \otimes M_g)x(t) = (I_Y \otimes M_{f \circ M_g})x(t), \quad (6)$$

$$\partial^k (I_Y \otimes M_f)x(t) = (I_Y \otimes M_f)\partial^k x(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (7)$$

$$(I_Y \otimes M_f)(0) = \langle f, x \rangle. \quad (8)$$

Доведення. Запишемо

$$\begin{aligned} (I_Y \otimes M_{f \circ g})x(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_{f \circ g}(\varphi_m)_\Gamma)(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_f \circ M_g)(\varphi_m)_\Gamma(t) = \\ &= (I_Y \otimes M_f) \circ (I_Y \otimes M_g)x(t) = (I_Y \otimes M_{f \circ M_g})x(t). \end{aligned}$$

Отже, формулу (6) доведено. Ураховуючи неперервність операції M_f та абсолютну збіжність ряду (5), легко довести виконання рівності (7).

Дійсно,

$$\begin{aligned} \partial^k (I_Y \otimes M_f)x(t) &= \partial^k \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m M_f(\varphi_m)_\Gamma(t) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \partial^k x_m M_f(\varphi_m)_\Gamma(t) = (I_Y \otimes M_f)\partial^k x(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n. \end{aligned}$$

Властивість (8) впливає безпосередньо з означення векторної операції крос-кореляції. Твердження доведено.

Якщо T_s – оператор зсуву над D_Γ , визначений в [14], то можемо визначити, за аналогією до векторної операції крос-кореляції, векторний оператор зсуву за формулою

$$I_Y \otimes T_s : D_\Gamma(Y) \ni x(t) \rightarrow T_s x(t) \in D_\Gamma(Y).$$

Нехай K – лінійне неперервне перетворення простору D_Γ в D_Γ . Тоді $I_Y \otimes K$ інваріантне відносно векторного оператора зсуву, якщо виконується умова:

$$(I_Y \otimes K \circ T_s)x(t) = (I_Y \otimes T_s \circ K)x(t)$$

для довільної функції $x(t) \in D_\Gamma(Y)$.

Теорема 4. Для кожного розподілу $f \in D'_\Gamma$ оператор $I_Y \otimes M_f$ – ядерний та інваріантний щодо векторного оператора зсуву.

Навпаки, для довільного оператора $K \in L(D_\Gamma)$, який є інваріантним відносно векторного оператора зсуву, існує єдиний розподіл $f \in D'_\Gamma$ такий, що $K = M_f$ і $(I_Y \otimes K)x(t) = (I_Y \otimes M_f)x(t)$ для всіх $x(t) \in D_\Gamma(Y)$.

Доведення. Маємо, що $I_Y \otimes M_f$ є лінійним неперервним перетворенням простору $D_\Gamma(Y)$ в $D_\Gamma(Y)$ і

$$(I_Y \otimes M_f)x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_f(\varphi_m)_\Gamma)(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \langle f, T_s(\varphi_m)_\Gamma \rangle,$$

де $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ і $\{T_s(\varphi_m)_\Gamma\}_{m \in \mathbb{N}}$ прямують відповідно в Y і D_Γ до нуля. Тоді, в силу відомого критерію ядерності [9], одержуємо, що $(I_Y \otimes M_f)$ – ядерний оператор.

Залишилися перевірити умову інваріантності

$$\begin{aligned} (I_Y \otimes M_f \circ T_s)x(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (M_f \circ T_s)(\varphi_m)_\Gamma(t) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m (T_s \circ M_f)(\varphi_m)_\Gamma(t) = (I_Y \otimes T_s \circ M_f)x(t). \end{aligned}$$

Отже, перша частина теореми доведена.

Навпаки, для довільної функції $\varphi_\Gamma \in D_\Gamma$ лінійний неперервний функціонал $f : \varphi \rightarrow \langle K\varphi_\Gamma \rangle(0)$ визначає розподіл $f \in D'_\Gamma$, якщо доозначити f на всьому \mathbb{R}^n як тотожно нульовий функціонал. Тоді для довільної функції $x(t) \in D_\Gamma(Y)$ ми можемо записати згідно з властивістю (8), що $\langle f, x \rangle = (I_Y \otimes K)x(0)$. Якщо тепер в останню рівність замість $x(t)$ підставити функцію $(I_Y \otimes T_s)x(t)$ і скористатися інваріантністю оператора $I_Y \otimes K$, яка виконується за умовою теореми, то отримаємо потрібне співвідношення $(I_Y \otimes K)x(t) = (I_Y \otimes M_f)x(t)$. Теорема доведена.

1. Schwartz L. Theorie des distributions, 1–2. – Paris, 1950–1951.
2. Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщенных функций. – Т.1. – М.: ИЛ, 1959. – Т.2. – 1963.
3. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1958. – 440 с.
4. Хармандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1986. – Т.1. – 462 с.
5. Nharun S.V., Lopushansky O.V. Operator calculus for convolution algebra of Schwartz distributions on semiaxis // Праці Львівського математичного товариства. Математичні студії. – 1997. – Т.7. – №1. – С.61–72.
6. Соломко А.В., Шарин С.В. Функціональні числення над банаховими просторами в конусі \mathbb{R}^n // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т.47, №4. – С.51–56.
7. Шидлимов В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
8. Шеффер Х. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
9. Носида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
10. Лопушанський О.В. Локально опуклі алгебри I. Борнологічні властивості / Препринт 4-93. – Львів: ІППММ, 1993. – 55 с.
11. Рийков Д.А. Двухсторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств // Сиб. мат. журн. – 1966. – Т.7, №2. – С.353–372.
12. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 257 с.
13. Grothendieck A. Produits tensoriel topologiques et espaces nucléaire // Mem. Amer. Math. Soc. – 1965. – V.16, №2. – P.1–140.
14. Соломко А.В., Шарин С.В., Лопушанський О.В. Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т.47, №2. – С.95–99.

Some topological properties of locally convex spaces of the duality $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$ is investigated. The vector cross-correlation operation is defined. The theorem, which describes cross-correlation operation as a linear continuous operator on the space of vector valued test functions with supports on cone, is proved.

Key words: locally convex space, cross-correlation operation, generalized function, Montel space, convolution operation.

УДК 511.14
ББК 22.13

І.В. Федак

МИМОБІЖНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ІРАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Введено поняття мимобіжних послідовностей іраціональних чисел. Доведені теореми про необхідні й достатні умови існування таких послідовностей.

Ключові слова: послідовності іраціональних чисел, мимобіжні послідовності, необхідні й достатні умови.

Нехай α та β – два іраціональні числа, більші за одиницю. Послідовності $(n\alpha)$ та $(n\beta)$, $n \in \mathbb{N}$ називаються мимобіжними, якщо між довільними сусідніми натуральними числами знаходиться або лише один елемент послідовності $(n\alpha)$, або лише один елемент послідовності $(n\beta)$. Іншими словами, послідовності, складені з цілих частин елементів послідовностей $(n\alpha)$ та $(n\beta)$, не мають спільних елементів, а їх об'єднання збігається з множиною натуральних чисел.

Теорема 1. Якщо

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, \alpha > 1, \beta > 1,$$

то послідовності $(n\alpha)$ та $(n\beta)$ мимобіжні.

Доведення. При кожному $k \geq 2$ на інтервалі $(1, k)$ міститься $\left\lfloor \frac{k}{\alpha} \right\rfloor$ членів послідовності

$(n\alpha)$ та $\left\lfloor \frac{k}{\beta} \right\rfloor$ членів послідовності $(n\beta)$. Серед них немає спільних елементів, бо з рівності

$n\alpha = m\beta$ й умови теореми випливає, що $\alpha = 1 + \frac{m}{n}$. А це суперечить іраціональності числа α .

Оскільки $\frac{k}{\alpha} + \frac{k}{\beta} = k \in \mathbb{N}$, а числа $\frac{k}{\alpha}$ та $\frac{k}{\beta}$ іраціональні, то сума їх дробових частин

$\left\{ \frac{k}{\alpha} \right\} + \left\{ \frac{k}{\beta} \right\} = 1$. Отже, $\left\lfloor \frac{k}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{\beta} \right\rfloor = k - 1$, тобто на кожному інтервалі $(1, k)$ знаходиться $k - 1$ з

об'єднання послідовностей $(n\alpha)$ та $(n\beta)$. Звідси випливає, що між довільними сусідніми натуральними числами знаходиться один з елементів лише однієї з цих двох послідовностей.

Теорема доведена.

Приклади мимобіжних послідовностей:

1. $(n\sqrt{2})$ та $(n(2 + \sqrt{2}))$.

2. $(n(1 + \gamma))$ та $(n(1 + \frac{1}{\gamma}))$, де γ – довільне додатне іраціональне число.

3. $(n(1 + k + \sqrt{k^2 - 1}))$ та $(n(1 + k - \sqrt{k^2 - 1}))$, де k – довільне натуральне число, більше

одиниці.

Теорема 2. Якщо послідовності $(n\alpha)$ та $(n\beta)$, $\alpha > 1, \beta > 1$ мимобіжні, то $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Доведення. Нехай $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \gamma > 1$. Тоді існує таке іраціональне число $\frac{p}{q} \in (1, \gamma)$, що

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > \frac{p}{q}$. Оскільки послідовності $(n\alpha)$ та $(n\beta)$ мимобіжні, то вони не мають спільних

елементів, і на інтервалі $(1, 2q)$ міститься $\left\lfloor \frac{2q}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{\beta} \right\rfloor$ елементів з їх об'єднання. Але

$$\left\lfloor \frac{2q}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{\beta} \right\rfloor \geq \frac{2q}{\alpha} + \frac{2q}{\beta} - 2 = 2q\gamma - 2 > 2(p-1) \geq 2q,$$

то принаймні на одному з $2q - 1$ сусідніх інтервалів знаходиться не менше двох елементів із такого об'єднання, що суперечить умові мимобіжності послідовностей.

Якщо ж $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \gamma < 1$, то для раціонального числа $\frac{p}{q} \in (\gamma, 1)$ одержимо, що на інтервалі $(1, q)$ буде

$$\left\lfloor \frac{q}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q}{\beta} \right\rfloor < \frac{q}{\alpha} + \frac{q}{\beta} = q\gamma < p \leq q - 1$$

елементів з об'єднання заданих послідовностей. А отже, принаймні на одному з $q - 1$ сусідніх інтервалів не виявиться жодного такого елемента, що також суперечить умові мимобіжності.

І, нарешті, при $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ на основі теореми 1 послідовності $(n\alpha)$ та $(n\beta)$ справді будуть мимобіжними. Теорема доведена.

Таким чином, умова

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, \alpha > 1, \beta > 1$$

є необхідною і достатньою умовою мимобіжності послідовностей $(n\alpha)$ та $(n\beta)$.

Узагальнимо отримані результати на випадок $m(m \geq 3)$ послідовностей іраціональних чисел $(n\alpha_1), (n\alpha_2), \dots, (n\alpha_m)$, $n \in \mathbb{N}$. Такі послідовності також будемо вважати мимобіжними, якщо між довільними сусідніми натуральними числами знаходиться рівно один елемент лише однієї з цих послідовностей.

Теорема 3. Для того, щоб послідовності $(n\alpha_1), (n\alpha_2), \dots, (n\alpha_m)$, $n \in \mathbb{N}$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – іраціональні числа, більші за одиницю, були мимобіжними, необхідно, щоб

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_m} = 1.$$

Доведення. Нехай

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_m} = \gamma > 1.$$

Тоді існує таке раціональне число $\frac{p}{q} \in (1, \gamma)$, що

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_m} > \frac{p}{q}.$$

Якщо вказані послідовності мимобіжні, то жодні дві з них не мають спільних елементів, і на інтервалі $(1, mq)$ знаходиться

$$\left[\frac{mq}{\alpha_1} \right] + \left[\frac{mq}{\alpha_2} \right] + \dots + \left[\frac{mq}{\alpha_m} \right] \geq \frac{mq}{\alpha_1} + \frac{mq}{\alpha_2} + \dots + \frac{mq}{\alpha_m} - m = mq\gamma - m > m(p-1) \geq mq$$

елементів з їхнього об'єднання. Але це суперечить умові мимобіжності таких послідовностей.

Якщо ж

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_m} = \gamma < 1,$$

то для раціонального числа $\frac{p}{q} \in (\gamma, 1)$ одержимо, що на інтервалі $(1, q)$ буде

$$\left[\frac{q}{\alpha_1} \right] + \left[\frac{q}{\alpha_2} \right] + \dots + \left[\frac{q}{\alpha_m} \right] < \frac{q}{\alpha_1} + \frac{q}{\alpha_2} + \dots + \frac{q}{\alpha_m} = q\gamma < p \leq q-1$$

елементів із вказаного вище об'єднання. А отже, такі послідовності також не можуть бути мимобіжними. Теорема доведена.

Міркуючи за аналогією, можна припустити, що і при $m \geq 3$ рівність

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_m} = 1$$

буде необхідною і достатньою умовою мимобіжності послідовностей $(n\alpha_1), (n\alpha_2), \dots, (n\alpha_m), n \in \mathbb{N}$. де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – ірраціональні числа, більші за одиницю. Але, насправді, справедливим є наступне твердження.

Теорема 4. При $m \geq 3$ не існує мимобіжних послідовностей ірраціональних чисел.

Доведення. Враховуючи теорему 3, достатньо розглянути лише випадок

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_m} = 1, \alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1, \dots, \alpha_m > 1.$$

Виберемо натуральні числа p_1, p_2, \dots, p_m, q таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$\frac{1}{\alpha_k} < \frac{p_k}{q}, k=1, 2, \dots, m, \text{ та рівність } p_1 + p_2 + \dots + p_m = q+1. \text{ Тоді}$$

$$\left[\frac{q}{\alpha_1} \right] + \left[\frac{q}{\alpha_2} \right] + \dots + \left[\frac{q}{\alpha_m} \right] \leq (p_1-1) + (p_2-1) + \dots + (p_m-1) = q+1-m \leq q-2$$

при $m \geq 3$. А отже, на інтервалі $(1, q)$ не більше $q-2$ елементів з об'єднання даних послідовностей. Тому такі послідовності не можуть бути мимобіжними. Теорема доведена.

The concept of not intersected sequences of irrationals is entered. The theorems about necessary and sufficient conditions of existence of such sequences are proved.

Key words: sequences of irrationals, intersected sequences, necessary and sufficient conditions.

УДК 517.927
ББК 22.161.616

О.В. Махней

ФУНКЦІЯ ГРІНА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

У даній статті побудовано матрицю-функцію Гріна крайової задачі для векторного диференціального рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах. За допомогою отриманих виразів для спряжених крайових умов доводиться властивість про співвідношення між функціями Гріна спряжених крайових задач.

Ключові слова: функція Гріна, векторне диференціальне рівняння, квазіпохідні, узагальнені функції.

Вступ. Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими коефіцієнтами, вивчено досить добре (див., наприклад, [1]). Однак у задачах прикладного характеру часто зустрічаються розривні чи навіть узагальнені функції в коефіцієнтах. Такі задачі є значно гірше дослідженими.

Ще в середині 50-х років минулого століття вивчалися крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого й четвертого порядків, що описують вільні коливання струни й балки, які, крім неперервно розподіленої маси, несуть на собі ще й зосереджені точкові маси – бусинки [2]. У монографії [3] досліджується оператор Шредінгера на необмеженому проміжку у випадку, коли сингулярний потенціал є, наприклад, скінченною чи нескінченною сумою δ -функцій Дірака. У випадку скалярного сингулярного диференціального оператора побудовано функцію Гріна та досліджено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій, а також здійснено розв'язання за останніми у роботах [4; 5; 6].

Слід зазначити, що спряжені диференціальні вирази містять доданки вигляду $(P(x)Y)^{(j)}$, які при недостатній гладкості не можна звести за допомогою j -кратного диференціювання до звичайних диференціальних. Щоб підкреслити цю обставину, їх у літературі називають квазідиференціальними.

Квазіпохідні – це компоненти вектора, за допомогою якого здійснюється зведення квазідиференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Мабуть, першим, хто ввів поняття квазіпохідних, яке дозволяє відмовитися від вимог гладкості коефіцієнтів у квазідиференціальних виразах, був Д.Шин [7; 8].

Ця робота присвячена побудові функції Гріна крайової задачі для векторного диференціального рівняння з узагальненими коефіцієнтами й однорідними крайовими умовами. За допомогою методу введення квазіпохідних досліджено властивості функцій Гріна спряжених крайових задач.

1. Постановка задачі. Розглянемо диференціальний вираз

$$L_n(y) \equiv y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + A_2(x)y^{(n-2)} + \dots + A_n(x)y, \quad (1)$$

де $A_i = B_i'$, $B_i(x)$ ($i=1, n$) – матриці-функції l -го порядку, елементами яких є неперервні праворуч функції обмеженої на проміжку $[a, b]$ варіації, матриця-функція $B_l(x)$ є неперервною на $[a, b]$, $y(x)$ – вектор-стовпець. Тут штрихом позначено узагальнене диференціювання, і тому елементи матриць $A_i(x)$ є мірами (див. [9]). Розглянемо також відповідне диференціальному виразу $L_n(y)$ рівняння

$$L_n(y) = \lambda y, \quad (2)$$

де λ – комплексний параметр, і крайові умови

$$U_\nu(y) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma_{\nu j} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu j} y^{(j)}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (3)$$

які задаються за допомогою n лінійно незалежних форм $U_\nu(y)$.

Поряд із крайовою задачею (2), (3) для векторного диференціального рівняння розглянемо також асоційовану їй крайову задачу для матричного диференціального рівняння

$$L_n(Y) = \lambda Y, \quad (4)$$

$$U_\nu(Y) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma_{\nu j} Y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu j} Y^{(j)}(b) = 0, \quad (5)$$

де $Y(x)$ – квадратна матриця l -го порядку.

За допомогою прямокутної матриці $\mathcal{Y} = \text{colon}(Y, Y', \dots, Y^{(n-1)})$ матричне рівняння (4) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{B}'(x)\mathcal{Y} \quad (6)$$

або в розгорнутому (блочному) вигляді

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \dots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ \lambda - A_n & -A_{n-1} & \dots & -A_2 & -A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \dots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Крайові умови (5) теж можна переписати у матричному вигляді

$$W_a \mathcal{Y}(a) + W_b \mathcal{Y}(b) = 0, \quad (7)$$

де блочні матриці $W_a = (\Gamma_{\nu, j-1})'_{\nu, j=1}^n$, $W_b = (\Delta_{\nu, j-1})'_{\nu, j=1}^n$. Оскільки за додаткової умови неперервності матриці-функції $B_\nu(x)$ для стрибка матриці-функції $\mathcal{B}(x)$ має місце тотожність $[\Delta \mathcal{B}(x)]^2 \equiv 0$, система (6) є коректною [10].

Під розв'язком матричного диференціального рівняння будемо розуміти першу блочну компоненту $Y(x)$ прямокутної матриці $\mathcal{Y}(x)$ системи (6), що задовольняє його в сенсі теорії узагальнених функцій. У роботі [11] встановлено, що розв'язок початкової задачі для рівняння (4) існує і єдиний, причому він разом зі своїми похідними до порядку $n-2$ включно є абсолютно неперервним, а його $(n-1)$ -ша похідна складається з функцій, які мають обмежену варіацію на проміжку $[a, b]$ і є там неперервними праворуч.

Система, спряжена до системи (6), визначається матричною рівністю (див. [11])

$$\mathcal{X}' = -(\mathcal{B}^*(x))' \mathcal{X}, \quad (8)$$

де $\mathcal{X} = \text{colon}(Z^{(r-1)}, \dots, Z^{(1)}, Z)$, $*$ – ермітове спряження, а фігурні дужки означають квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння. У роботі [11] встановлено, що вони визначаються формулами

$$Z^{(0)} = Z, \quad Z^{(i)} = A_i^* Z - (Z^{(i-1)})', \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (9)$$

З (8) видно (див. [11]), що спряжене до (4) диференціальне рівняння має вигляд

$$L_n^*(Z) \equiv (-1)^n Z^{(n)} + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (A_i^* Z)^{(n-i)} = \bar{\lambda} Z, \quad (10)$$

де риска над λ означає комплексне спряження.

2. Спряжені крайові умови. Розглянемо вираз $\mathcal{X}^* \mathcal{Y}$ і продиференціюємо його, скориставшись формулами (6), (8):

$$(\mathcal{X}^* \mathcal{Y})' = (\mathcal{X}^*)' \mathcal{Y} + \mathcal{X}^* \mathcal{Y}' = -\left((\mathcal{B}^*)' \mathcal{X} \right)' \mathcal{Y} + \mathcal{X}^* \mathcal{B}' \mathcal{Y} = -\mathcal{X}^* \mathcal{B}' \mathcal{Y} + \mathcal{X}^* \mathcal{B}' \mathcal{Y} = 0.$$

Таке диференціювання допустиме, оскільки добутки $(\mathcal{X}^*)' \mathcal{Y}$ і $\mathcal{X}^* \mathcal{Y}'$ є коректними на підставі того факту, що $Y, Y', \dots, Y^{(n-2)}, Z$ – матриці, складені з абсолютно неперервних на $[a, b]$ функцій, а $Y^{(n-1)}, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(n-1)}$ – матриці, компоненти яких є функціями обмеженої на проміжку $[a, b]$ варіації (див. [11]). Отже, $\mathcal{X}^* \mathcal{Y}$ є сталою величиною і тому

$$(\mathcal{X}^* \mathcal{Y})'_a = 0. \quad (11)$$

За допомогою останньої рівності можна визначити спряжені крайові умови. Для цього доповнимо лінійні форми $U_1(Y), U_2(Y), \dots, U_n(Y)$ формами $U_{n+1}(Y), U_{n+2}(Y), \dots, U_{2n}(Y)$ до лінійно незалежної системи $2n$ лінійних форм. Тоді систему

$$U_\nu(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma_{\nu, j} Y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu, j} Y^{(j)}(b), \quad \nu = \overline{1, 2n}$$

можна однозначно розв'язати відносно невідомих $Y^{(q)}(a), Y^{(q)}(b)$, які визначаються через $U_1(Y), \dots, U_{2n}(Y)$. Підставивши отримані $Y^{(q)}(a), Y^{(q)}(b)$ ($q = \overline{0, n-1}$) в білінійну форму в лівій частині рівності (11), отримаємо

$$(\mathcal{X}^* \mathcal{Y})'_a = \sum_{\nu=1}^{2n} A_\nu(\xi) B_\nu(\eta),$$

де $\eta = (Y^{(q)}(a), Y^{(q)}(b))$, $\xi = (Z^{(q)}(a), Z^{(q)}(b))$, $q = \overline{0, n-1}$, а $B_\nu(\eta) = U_\nu(Y)$. Позначимо $A_{2n}(\xi) = V_1(Z), \dots, A_1(\xi) = V_{2n}(Z)$. Очевидно, що для того, щоб виконувалася рівність (11), повинні мати місце співвідношення

$$V_\nu(Z) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (12)$$

які назвемо *спряженими крайовими умовами* до умов (5) (оскільки крайові умови дорівнюють нулю, можна безболісно перенести комплексне спряження із Z на матрицю сталих коефіцієнтів при ньому). Спряжені крайові умови можна записувати й у векторному вигляді

$$V_\nu(\mathcal{z}) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Якщо $|W_a| \neq 0$ і $|W_b| \neq 0$ одночасно в рівнянні (7), то легко переконатися в тому, що крайові умови для спряженого рівняння подаватимуться у вигляді $\mathcal{X}^*(a)W_a^{-1} + \mathcal{X}^*(b)W_b^{-1} = 0$.

3. Функція Гріна крайової задачі. Розглянемо тепер неоднорідне векторне диференціальне рівняння

$$L_n(\mathcal{Y}) = \lambda \mathcal{Y} + \mathcal{F}', \quad (14)$$

де \mathcal{F} – вектор-стовпець, усі компоненти якого є функціями обмеженої на проміжку $[a, b]$ варіації, а також асоційоване до нього матричне рівняння

$$L_n(Y) = \lambda Y + F', \quad (15)$$

де матриця $F(x)$ складається з l стовпчиків $f(x)$. Неоднорідне рівняння (15) шляхом введення прямокутної матриці \mathcal{Y} (див. пункт 1) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{B}' \mathcal{Y} + \mathcal{F}', \quad (16)$$

де $\mathcal{F}(x) = \text{colon}(0, \dots, 0, -F(x))$. Ця система є коректною внаслідок виконання умов $[\Delta \mathcal{B}(x)]^2 \equiv 0$ і $\Delta \mathcal{B}(x) \Delta \mathcal{F}(x) \equiv 0$ (див. [11]).

Під *матрицею-функцією Коші* рівняння (4) розуміють матричну функцію $K(x, t, \lambda)$ порядку $l \times l$, яка за першою змінною задовольняє рівняння (4), і, крім того, $K^{(i)}(t, t, \lambda) = 0$, $i = \overline{0, n-2}$, $K^{(n-1)}(t, t, \lambda) = E$.

Побудуємо матричну функцію Гріна крайової задачі (14), (3). Нехай $K(x, t, \lambda)$ – матриця-функція Коші однорідного рівняння (4). Відомо [11], що $K(x, a, \lambda), K^{(1)}(x, a, \lambda), \dots, K^{(n-1)}(x, a, \lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків і розв'язок рівняння (15) можна подати у вигляді

$$Y(x, \lambda) = \sum_{k=1}^n K^{*(k-1)*}(x, a, \lambda) C_k + \int_a^x K(x, t, \lambda) dF(t). \quad (17)$$

Оскільки, згідно з [11],

$$Y^{(j)}(x, \lambda) = \sum_{k=1}^n K^{*(k-1)*^{(j)}}(x, a, \lambda) C_k + \int_a^x K^{(j)}(x, t, \lambda) dF(t), \quad j = \overline{1, n},$$

підстановка формули (17) в крайові умови (5) дасть рівності

$$U_\nu(Y) = \sum_{k=1}^n U_\nu(K^{*(k-1)*}(x, a, \lambda)) C_k + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu, j} \int_a^b K^{(j)}(b, t, \lambda) dF(t), \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (18)$$

що можна записати у вигляді $\mathcal{W} \bar{C} + \bar{B} = 0$, де $\bar{C} = \text{colon}(C_1, \dots, C_n)$, \bar{B} – прямокутна матриця, $\mathcal{W} = (U_\nu(K^{*(k-1)*}(x, a, \lambda)))'_{\nu, k=1}^n$. У припущенні, що λ не є власним значенням крайової задачі (4),

(5), визначник системи (18) відрізняється від нуля $\Delta(\lambda) \equiv \det W \neq 0$. Тоді сталі матриці C_k можуть бути визначені із системи (18) єдиним чином. Підставляючи ці значення C_k у формулу (17), отримуємо

$$Y(x, \lambda) = - \sum_{\nu=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b K^{*(k-1)*}(x, a, \lambda) \frac{W_{\nu k} \Delta_{\nu j}}{\Delta(\lambda)} K^{(j)}(b, t, \lambda) dF(t) + \int_a^x K(x, t, \lambda) dF(t),$$

де $W_{\nu k}$ ($\nu, k = \overline{1, n}$) – матриця l -го порядку, транспонована до складеної з алгебраїчних доповнень у визначнику $\Delta(\lambda)$ до елементів матриці $U_{\nu}(K^{*(k-1)*}(x, a, \lambda))$.

Матричний вираз

$$G(x, t, \lambda) = - \sum_{\nu=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} K^{*(k-1)*}(x, a, \lambda) \frac{W_{\nu k} \Delta_{\nu j}}{\Delta(\lambda)} K^{(j)}(b, t, \lambda) + P(x, t, \lambda), \quad (19)$$

де

$$P(x, t, \lambda) = \begin{cases} K(x, t, \lambda), & x > t, \\ 0, & x < t \end{cases} \quad (20)$$

будемо називати *функцією Гріна* крайової задачі (14), (3).

З єдиності вибору сталих впливає єдиність функції Гріна. Як видно з наступної теореми, ця матриця-функція Гріна, яка будується лише за допомогою функції Коші однорідного рівняння і її змішаних квазіпохідних, є аналогом функції Гріна в класичному розумінні (див., наприклад, [1], с.115–116).

Теорема 1. Розв'язок задачі (14), (3) в припущенні, що λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді

$$y(x) = \int_a^b G(x, t, \lambda) df(t), \quad (21)$$

де матриця-функція Гріна $G(x, t, \lambda)$ подається формулою (19) і володіє такими властивостями:

- 1) похідні за першою змінною $G^{(k)}(x, t, \lambda)$ ($k = \overline{0, n-2}$) є неперервними функціями двох змінних x, t і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій;
- 2) функція $G^{(n-1)}(x, t, \lambda)$ має обмежену на проміжку $[a, b]$ варіацію за першою змінною і є абсолютно неперервною по t ;
- 3) $G(x, t, \lambda)$ на кожному з інтервалів $[a, t], (t, b]$ по x задовольняє рівняння (4);
- 4) $G(x, t, \lambda)$ за змінною x задовольняє крайові умови (5);
- 5) при $x = t$ $G(x, t, \lambda)$ задовольняє умови стрибка

$$\begin{aligned} G^{(k)}(t+0, t, \lambda) - G^{(k)}(t-0, t, \lambda) &= 0, \quad k = \overline{0, n-2}; \\ G^{(n-1)}(t+0, t, \lambda) - G^{(n-1)}(t-0, t, \lambda) &= \\ &= E + \sum_{\nu=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} \Delta B_{n-i}(t) K^{(i)*(k-1)*}(t, a, \lambda) \frac{W_{\nu k} \Delta_{\nu j}}{\Delta(\lambda)} K^{(j)}(b, t, \lambda). \end{aligned}$$

Доведення. Формула (21) була вже доведена вище. Пункти 1–4 легко перевірити, урахувавши вищезгадані властивості розв'язків рівняння (4) та спряженого до нього. Для доведення пункту 5 використовуються співвідношення

$$K^{*(k-1)*}(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^n Y_j(x, \lambda) C_{jk}(t, \lambda), \quad k = \overline{1, n}, \quad (22)$$

які випливають із того факту, що всі $K^{*(k-1)*}(x, t, \lambda)$ є розв'язками рівняння (4); $Y_j(x), j = \overline{1, n}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (4). Тоді, внаслідок рівності з [11],

$$\Delta Y^{(n-1)}(x) = - \sum_{i=0}^{n-2} \Delta B_{n-i}(x) Y^{(i)}(x), \quad (23)$$

розписавши (22), можна одержати пункт 5, що й доводить теорему.

Зауваження 1. Зазначимо, що коли $\Delta B_i(x) = 0, i = \overline{2, n}$, властивість 5 набуває "класичного" вигляду

$$\begin{aligned} G^{(k)}(t+0, t, \lambda) - G^{(k)}(t-0, t, \lambda) &= 0, \quad k = \overline{0, n-2}; \\ G^{(n-1)}(t+0, t, \lambda) - G^{(n-1)}(t-0, t, \lambda) &= E. \end{aligned}$$

Зауваження 2. Матрицю-функцію $G(x, t, \lambda)$ можна записати також у вигляді

$$G(x, t, \lambda) = (-1)^{n-1} \frac{1}{\Delta(\lambda)} (Q_{ij}(x, t, \lambda))'_{i,j=1}, \quad (24)$$

$$Q_{ij}(x, t, \lambda) = \begin{vmatrix} K_{i1}(x, a, \lambda) & \dots & K_{in}^{*(n-1)*}(x, a, \lambda) & P_{ij}(x, t, \lambda) \\ U_1(K_{i1}(x, a, \lambda)) & \dots & U_1(K_{in}^{*(n-1)*}(x, a, \lambda)) & U_1(P_{ij}(x, t, \lambda)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(K_{i1}(x, a, \lambda)) & \dots & U_n(K_{in}^{*(n-1)*}(x, a, \lambda)) & U_n(P_{ij}(x, t, \lambda)) \end{vmatrix}, \quad (25)$$

Дійсно, розписавши (25) за елементами останнього стовпця і першого рядка, неважко від (24) прийти до рівності (19).

4. Розв'язувальне ядро задачі (16), (5). Розв'язок задачі (16), (5), якщо λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді інтеграла від розв'язувального ядра (матриці-функції Гріна задачі (16), (5)) і вектора \mathcal{F} . Цей результат буде потрібним для подальших досліджень властивостей функції Гріна задачі (14), (3).

Для задачі (16), (5) має місце формула (див. [11])

$$y(x) = \Phi(x, a) y(a) + \int_a^x \Phi(x, t) d\mathcal{F}(t), \quad (26)$$

де $\Phi(x, t) = \Phi(x, t, \lambda)$ – фундаментальна матриця системи (6); вона подається у вигляді $\Phi(x, t, \lambda) = R(x, \lambda) R^{-1}(t, \lambda)$, тут $R(x, \lambda)$ – інтегральна матриця системи (6). Рівність (26) можна записати так:

$$y(x) = R(x, \lambda) C + \int_a^x \Phi(x, t, \lambda) d\mathcal{F}(t), \quad (27)$$

де $C = R^{-1}(a, \lambda) y(a)$ – прямокутна матриця. Підставивши (27) в умови (5), унаслідок того, що $|W_a R(a, \lambda) + W_b R(b, \lambda)| \neq 0$ (бо λ не є власним значенням крайової задачі), можна отримати вираз для матриці C , а тому (27) запишеться у вигляді

$$y(x) = \int_a^b M(x, t, \lambda) d\mathcal{F}(t), \quad (28)$$

де розв'язувальне ядро

$$M(x, t, \lambda) = \begin{cases} \Phi(x, t, \lambda) - R(x, \lambda) \{W_a R(a, \lambda) + W_b R(b, \lambda)\}^{-1} W_b \Phi(b, t, \lambda), & x > t, \\ -R(x, \lambda) \{W_a R(a, \lambda) + W_b R(b, \lambda)\}^{-1} W_b \Phi(b, t, \lambda), & x < t. \end{cases}$$

5. Зв'язок між функціями Гріна спряжених крайових задач. Нехай $H(x, t, \lambda)$ – матриця-функція Гріна спряженої крайової задачі (10), (12). Вона будується за допомогою матриці-функції Коші $R(x, t, \lambda)$ однорідного рівняння $L_n^*(Z) = \bar{\lambda} Z$ і її змішаних квазіпохідних у сенсі вихідного і спряженого рівнянь. Неважко переконатися, що формули, аналогічні до (21) і (28), будуть справедливими і для функції $H(x, t, \lambda)$. Крім того, вона володіє властивостями, подібними до наведених у теоремі 1, зокрема $H(x, t, \lambda)$ є абсолютно неперервною за кожною з двох перших змінних при фіксованих інших і неперервною за сукупністю змінних x і t , а елементи квазіпохідних за першою змінною $H^{(k)}(x, t, \lambda)$ ($k = \overline{1, n-1}$) мають обмежену варіацію по x і є абсолютно неперервними по t . Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. При $x \neq t$, якщо λ не є власним значенням крайової задачі (11)(14), (3), функції Гріна спряжених крайових задач пов'язані між собою співвідношенням

$$G(x, t, \lambda) = H^*(t, x, \lambda).$$

Доведення. Припустимо без втрати загальності, що $G(x, t, \lambda)$ і $H(x, t, \lambda)$ є функціями Гріна спряжених крайових задач

$$L_n(Y) - \lambda Y = -F_1(x), \quad (29)$$

$$U_\nu(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma_{\nu,j} Y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu,j} Y^{(j)}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (30)$$

$$L_n^*(Z) - \bar{\lambda} Z = F_2(x), \quad (31)$$

$$V_\nu(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\Gamma}_{\nu,j} Z^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\Delta}_{\nu,j} Z^{(j)}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (32)$$

відповідно, де $F_1(x)$, $F_2(x)$ – неперервні на $[a, b]$ і складаються з l однакових стовпчиків вигляду $f_1(x)$ і $f_2(x)$. Ці задачі внаслідок введення векторів $\mathcal{Y} = \text{colon}(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})$ і $\mathcal{X} = \text{colon}(Z^{(n-1)}, \dots, Z^{(1)}, Z)$ зводяться до задач

$$\begin{cases} \mathcal{Y}' = \mathcal{B}\mathcal{Y} + \mathcal{F}_1, \\ W_a \mathcal{Y}(a) + W_b \mathcal{Y}(b) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{X}' = -(\mathcal{B}^*)' \mathcal{X} + \mathcal{F}_2, \\ \bar{W}_a \mathcal{X}(a) + \bar{W}_b \mathcal{X}(b) = 0 \end{cases}$$

відповідно, де $\mathcal{F}_1(x) = \text{colon}(0, \dots, 0, F_1(x))$, $\mathcal{F}_2(x) = \text{colon}(F_2(x), 0, \dots, 0)$, а W_a , W_b , \bar{W}_a , \bar{W}_b – числові матриці порядку $nl \times nl$.

Оскільки добутки $(\mathcal{X}^*)' \mathcal{Y}$ і $\mathcal{X}^* \mathcal{Y}'$ коректні, то

$$(\mathcal{X}^* \mathcal{Y})' = (\mathcal{X}^*)' \mathcal{Y} + \mathcal{X}^* \mathcal{Y}' = -\mathcal{X}^* \mathcal{B} \mathcal{Y} + \mathcal{X}^* \mathcal{F}_1 + \mathcal{X}^* \mathcal{B}' \mathcal{Y} + \mathcal{X}^* \mathcal{F}_2 = \mathcal{X}^* \mathcal{F}_1 + \mathcal{X}^* \mathcal{F}_2.$$

З іншого боку, врахувавши шлях побудови крайових умов спряженої задачі (12), можна переконатись у справедливості рівності (11) для неоднорідних спряжених крайових задач (29)–(32). Тоді

$$\int_a^b (\mathcal{X}^*(x) \mathcal{F}_1(x) + \mathcal{F}_2(x) \mathcal{Y}(x)) dx = 0.$$

Згідно з формулою (28),

$$\mathcal{Y}(x) = \int_a^b M(x, t, \lambda) \mathcal{F}_1(t) dt, \quad \mathcal{X}(t) = \int_a^b N(t, x, \lambda) \mathcal{F}_2(x) dx,$$

врахувавши (21), можна зробити висновок, що останній елемент першого рядка блочної матриці $M(x, t, \lambda)$ дорівнює $-G(x, t, \lambda)$, а перший елемент останнього рядка блочної матриці $N(t, x, \lambda)$ збігається з $H(t, x, \lambda)$. Крім того,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\int_a^b N(t, x, \lambda) \mathcal{F}_2(x) dx \right) \mathcal{F}_1(t) dt + \int_a^b \mathcal{F}_2^*(x) \int_a^b M(x, t, \lambda) \mathcal{F}_1(t) dt dx = \\ & = \int_a^b \int_a^b \mathcal{F}_2^*(x) \{ N^*(t, x, \lambda) + M(x, t, \lambda) \} \mathcal{F}_1(t) dx dt = 0, \end{aligned}$$

тобто

$$\int_a^b \int_a^b \mathcal{F}_2^*(x) \{ H^*(t, x, \lambda) - G(x, t, \lambda) \} \mathcal{F}_1(t) dx dt = 0. \quad (33)$$

Нехай

$$G(x, t, \lambda) = (g_{ij}(x, t, \lambda))_{i,j=1}^l, \quad H(x, t, \lambda) = (h_{ij}(x, t, \lambda))_{i,j=1}^l,$$

$f_1(x) = \text{colon}(f_{11}, \dots, f_{1l})$, $f_2(x) = \text{colon}(f_{21}, \dots, f_{2l})$, (x_0, t_0) – будь-яка точка області $a \leq x, t \leq b$, $x \neq t$. Довільно виберемо оточуючий її малий прямокутник Δs зі сторонами $t = t_0 \pm \Delta t$ і $x = x_0 \pm \Delta x$ і такі вектор-функції $f_1(t)$ і $f_2(x)$, щоб $f_{ij}(t) = 0$ при $j \neq j_0$, $f_{1,j_0}(t) \neq 0$ в Δs ,

$f_{1,j_0}(t) \equiv 0$ зовні Δs , $f_{2i}(t) \equiv 0$ при $i \neq i_0$, $f_{2,i_0}(t) \neq 0$ в Δs , $f_{2,i_0}(t) \equiv 0$ зовні Δs . Для цього вибору рівняння (33) буде еквівалентним до

$$\int_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} f_{2,i_0}(x) [h_{j_0,i_0}(t, x, \lambda) - g_{j_0,i_0}(x, t, \lambda)] f_{1,j_0}(t) dx dt = 0,$$

і, оскільки $f_{2,i_0}(x) f_{1,j_0}(t) \neq 0$ в Δs , очевидно, вираз у квадратних дужках перетворюється в нуль десь у цій області. Нехай Δx і Δt прямують до нуля. Тоді в границі ми матимемо $h_{j_0,i_0}(t_0, x_0, \lambda) = g_{j_0,i_0}(x_0, t_0, \lambda)$ і внаслідок довільності вибору векторів $f_1(t)$, $f_2(x)$ та точок x_0 , t_0 ($x_0 \neq t_0$) отримаємо твердження теореми.

Отримані результати дозволяють вивчати й інші задачі, зокрема задачі на розвинення за власними функціями. Аналогічні результати можна отримати й у випадку векторного сингулярного квазидиференціального оператора.

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Кац И.С., Крейн М.Г. О спектральных функциях струны // Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф.Аткинсон. – М.: Мир, 1968. – С.648–731.
3. Альберверо С., Гестези Ф., Хёгг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 566 с.
4. Махней О.В. Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т.44, №2. – С.17–25.
5. Махней О.В. Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості // Матем. студії. – 2002. – Т.18, №2. – С.147–156.
6. Махней О.В. Сингулярні квазидиференціальні оператори на скінченному інтервалі: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Одеський нац. ун-т ім. І.І.Мечникова. – Одеса, 2005. – 16 с.
7. Шин Д. О квази дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1938. – Т.18, №8. – С.523–526.
8. Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т.7 (49), №3. – С.479–527.
9. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
10. Стасюк М.Ф., Таций Р.М. Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политех. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1988. – №222. – С.89–90.
11. Таций Р.М. Дискретно-непрервни крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. держ. ун-т ім. І.Франка. – Львів, 1994. – 37 с.

In this work a Green matrix-function of boundary problem for vector differential equation with generalized functions in coefficients is constructed. With the help of obtained expressions for adjoint boundary conditions the property about the relationship between Green functions of adjoint boundary problems is proved.

Key words: Green function, vector differential equation, quasiderivatives, generalized functions.

УДК 004.942+004.056.57

ББК 22.181

Л.С. Возняк, Н.О. Возняк

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ВІРУСІВ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

Розглянуто математичні моделі поширення цифрових інфекцій в інформаційних системах. На основі наявних у глобальній мережі Інтернет статистичних даних перевірено відповідність побудованих математичних моделей для різних типів комп'ютерних вірусів. Побудована математична модель поширення комп'ютерного вірусу в інтермережі, яка складається з K-підмереж. Здійснено чисельний розв'язок запропонованої моделі.

Ключові слова: математичне моделювання, комп'ютерні віруси, комп'ютерні епідемії.

Математичний аналіз моделей поширення комп'ютерних вірусів в обчислювальних мережах, що описуються звичайними диференціальними рівняннями

SIS модель поширення комп'ютерного вірусу. Перша класична модель поширення вірусу віспи, запропонована ще в 1760 році Даніелем Бернуллі, передбачає поділ популяції на хворих особин і тих, хто потенційно може заразитися. У термінах комп'ютерних мереж будемо розглядати заражені хости (host) і хости, що можуть бути зараженими. Можемо записати найпростішу математичну модель поширення вірусу:

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \beta J(t)[N - J(t)], \quad (1)$$

де $J(t)$ – кількість заражених хостів у момент часу t , N – загальна кількість хостів, β – коефіцієнт зараження. Привівши цю модель до безрозмірного вигляду, ввівши заміни

$$a(t) = \frac{J(t)}{N}, \quad k = \beta N,$$

одержимо таке рівняння:

$$\frac{da(t)}{dt} = ka(t)[1 - a(t)]. \quad (2)$$

Останнє рівняння можна модифікувати, ввівши в нього доданок, який у біологічних системах характеризує смертність:

$$\frac{da(t)}{dt} = ka(t)[1 - a(t)] - da(t), \quad (3)$$

тут d – коефіцієнт виходу інфікованих хостів із ладу.

Для такої системи існує точний розв'язок:

$$a(t) = \frac{a_0(1 - \rho)}{a_0 + (1 - \rho - a_0)e^{-(k-d)t}}, \quad \rho = \frac{k}{d}, \quad a_0 = a(t_0). \quad (4)$$

Аналіз розв'язку показує, що при $\beta < d$ частка заражених хостів поступово прямує до нуля. Якщо $\beta > d$, то для малих значень t функція зростає експоненційно до того моменту, поки більшість хостів виявиться зараженими. При $t \rightarrow \infty$ змінюється характер зростання і функція досягає свого екстремуму $1 - \rho$, коли всі хости виявилися зараженими.

SIR модель поширення комп'ютерного вірусу. Для моделювання поширення біологічних вірусів, а також для поширення вірусів комп'ютерних зручно скористатися відомою SIR моделлю [3]. У випадку поширення комп'ютерних вірусів вона базується на поділі хостів із мережі на три підгрупи: незахищені (susceptible), інфіковані (infectious), імунізовані (removed). Нехай $S(t)$ – кількість незахищених хостів у момент часу t , $I(t)$ – кількість заражених хостів у момент часу t , $R(t)$ – кількість захищених хостів у момент часу t . SIR модель описується системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t), \end{cases} \quad (5)$$

де $\beta > 0$ – коефіцієнт зараження незахищених хостів, $\mu > 0$ – коефіцієнт імунізації.

Для того, щоб одержати задачу Коші, систему рівнянь (5) доповнюють початковими умовами виду:

$$S(t_0) = S_0, I(t_0) = I_0, R(t_0) = R_0, t \geq t_0. \quad (6)$$

Одне з базових припущень, яке використовується при побудові моделі (1) – (2), полягає в тому, що хост одержує імунітет проти вірусного зараження лише тоді, коли він буде зараженим, проте не виключено, що деякі хости будуть імунізовані ще до того, коли на них потрапить вірус. Серед інших факторів, які не враховано в моделі (5), – це виокремлення в динаміці розвитку вірусу моментів, коли ще відсутній ефективний антивірусний захист (вірус

може вільно розповсюджуватися в мережі) і коли такий антивірус створено (тоді розвиток вірусу проходить згідно із SIR моделлю).

PSIDR модель поширення комп'ютерного вірусу. Запропонована в [4] модель поширення хробака є уточненням SIR моделі. Вона складається з чотирьох (а не з трьох, як у класичній моделі) станів: “незахищений”, “інфікований”, “ідентифікований”, “імунізований”. Укажемо на основні особливості цієї моделі:

- **Безпосередня імунізація.** Часто на хости завчасно встановлюється відповідне антивірусне програмне забезпечення, яке оберігає комп'ютер від інфікування (за умови, що вакцина проти цього вірусу вже існує). Тоді частина комп'ютерів переходить зі стану “незахищені” в стан “захищені”, обминаючи, таким чином, стани “інфікований” та “ідентифікований”.

- **Наявність антивірусу.** Для того, щоб хости можна було вилікувати, необхідно, щоб був розроблений антивірус. Часто між появою вірусу й розробкою такого антивірусу минає певний час. Тоді перебіг комп'ютерної епідемії можна розмежувати на два етапи:

- **доідентифікаційний:** у цей час хробак вільно поширюється по мережі, оскільки користувачі ще не виявили його присутності. Хости з певною ймовірністю вражаються вірусом, лікування ще не відбувається;

- **післяідентифікаційний:** вірус ідентифіковано й активізуються заходи щодо боротьби з ним. Ще неінфіковані хости імунізуються, а вже хворі – лікуються.

- **Лікування.** Після ідентифікації інфікованого хоста минає певний час (особливо це стосується великих підприємств), поки цей вірус буде знищено, а комп'ютер імунізовано. Тому в даній моделі введено проміжний стан.

Отже, введемо в розгляд параметр π , який характеризує час, необхідний для ідентифікації вірусу. Крім того, виділимо ще один стан, який характеризує хости, на яких вірус уже ідентифіковано, але вони ще вважаються зараженими.

Одержимо так звану PSIDR (progressive susceptible-infected-identified-remote) модель:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t), \quad t \leq \pi, \\ N = S(t) + I(t), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dD(t)}{dt} = \mu I(t) - \delta D(t), \quad t > \pi, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \delta D(t) + \mu S(t), \\ N = S(t) + I(t) + D(t) + R(t), \\ S(0) > 0, I(0) > 0, D(0) = 0, R(0) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

Тут $S(t), I(t), D(t), R(t)$ – відповідно кількість незахищених, інфікованих хостів, на яких ідентифіковано інфекцію, та імунізованих хостів, β – коефіцієнт поширення інфекції, δ – час між ідентифікацією та імунізацією хоста, μ – коефіцієнт імунізації хостів. Аналіз моделі в залежності від значень параметрів $(\beta, \mu, \delta, \pi)$ і порівняльний аналіз із класичною моделлю Кермака-Мак Кендріка можна знайти в [3].

Математична модель поширення комп'ютерного вірусу в інтермережі

Розглянемо складну комп'ютерну мережу (Інтернет) як сукупність пов'язаних мереж. Мережі, що входять у складну мережу, назовемо підмережами.

Для узагальнення моделі (5) на випадок взаємопов'язаних K -підмереж ми ввели коефіцієнти проникнення між підмережами δ_{ij} , які характеризують якість антивірусного бар'єру між підмережами, й отримали таку модель:

$$\begin{cases} \frac{dS_i(t)}{dt} = -\beta_i S_i(t) I_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^K \delta_{ji} S_i(t) I_j(t), \\ \frac{dI_i(t)}{dt} = \beta_i S_i(t) I_i(t) - \mu_i I_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^K \delta_{ji} S_i(t) I_j(t), \quad i=1,2,\dots,K, \\ \frac{dR_i(t)}{dt} = \mu_i I_i(t), \\ N_i = S_i(t) + I_i(t) + R_i(t), \end{cases} \quad (9)$$

де S_i – кількість незахищених хостів в i -ій підмережі, I_i – кількість інфікованих хостів в i -ій підмережі, R_i – кількість захищених хостів в i -ій підмережі, β_i – швидкість поширення вірусу в i -ій підмережі, μ_i – швидкість імунізації хостів в i -ій підмережі відповідно. Модель (9) доповнюється початковими умовами:

$$\begin{cases} S_i(t_0) = S_{i0}, \\ I_i(t_0) = I_{i0}, \quad i=1,2,\dots,K, \\ R_i(t_0) = R_{i0}. \end{cases} \quad (10)$$

Кожен із коефіцієнтів δ_{ij} задає ймовірності попадання вірусу з підмережі i в підмережу j .

Аналіз поширення комп'ютерного вірусу в інтермережі. Визначимо для моделі (9) умови, за яких можливий розвиток епідемії в підмережі. Умовою початку епідемій в підмережах є додатне значення похідної від функції кількості інфікованих хостів у підмережі по часу:

$$\left. \frac{dI_i}{dt} \right|_{t=0} = \beta_i S_{i0} I_{i0} - \mu_i I_{i0} + \sum_{j=1, j \neq i}^K \delta_{ji} S_{i0} I_{j0} = S_{i0} \left(\beta_i I_{i0} + \sum_{j=1, j \neq i}^K \delta_{ji} I_{j0} \right) - \mu_i I_{i0} > 0, \quad (11)$$

звідки

$$S_{i0} > \frac{\mu_i I_{i0}}{\beta_i I_{i0} + \sum_{j=1, j \neq i}^K \delta_{ji} I_{j0}}. \quad (12)$$

Одержаний результат означає, що в підмережі i не почнеться епідемія комп'ютерного вірусу, якщо початкова кількість незахищених хостів не перевищує певної величини.

Спробуємо оцінити вплив коефіцієнтів проникності δ_{ij} на нерівність (12). Для спрощення викладок вважаємо, що кількість інфікованих хостів у кожній підмережі в початковий момент часу є однаковою. Розглянемо таку функцію:

$$S_{i0}(\delta_{i1}, \dots, \delta_{iK}) = \frac{\mu_i}{\beta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^K \delta_{ji}}. \quad (13)$$

Оскільки ми розглядаємо коефіцієнти проникнення вірусу як ймовірності попадання вірусу з підмережі в підмережу, то $0 \leq \delta_{ij} \leq 1$. Максимальне значення

$$S_{i0}^{\max} = \frac{\mu_i}{\beta_i}$$

функції (13) досягається в точці $(0, \dots, 0)$, а мінімальне –

$$S_{i0}^{\min} = \frac{\mu_i}{\beta_i + K}$$

в точці $(1, \dots, 1)$.

Таким чином, можна зробити висновок, що зі зростанням значень коефіцієнтів проникнення між підмережами зменшується порогове значення, при якому починається епідемія. А отже, чим більшими є коефіцієнти проникнення між підмережами, тим швидше розпочнеться епідемія в іншій підмережі.

З нерівності (11) можемо одержати ще одну оцінку початку розвитку епідемії:

$$I_{i0} > \frac{S_{i0} \sum_{j=1, j \neq i}^K \delta_{ji} I_{j0}}{\beta_i S_{i0} - \mu_i}. \quad (14)$$

Останній результат означає, що в підмережі i не почнеться епідемія комп'ютерного вірусу доти, доки початкова кількість хворих хостів у підмережі i не задовольняє нерівності (14).

Епідеміологічний поріг. При математичному дослідженні кожної епідеміологічної моделі можливо визначити її епідеміологічний поріг. Ця величина вказує на те, за якої умови можливе поширення хвороби при малій кількості початково інфікованих хостів.

Для обчислення значення епідеміологічного порога потрібно дослідити стійкість системи звичайних диференціальних рівнянь (9) у її стаціонарній точці, де відсутні інфіковані хости:

$$(S_i = S_i^0, I_i = 0, R_i = 0) \quad \text{для } i=1,2. \quad (15)$$

Дослідити стійкість системи (9) в стаціонарній точці (15) можна або записавши відповідну функцію Ляпунова, або визначивши власні значення матриці Якобі, обчисленої в стаціонарній точці (15).

Матриця Якобі для моделі (9) має вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1 - \delta_{BA} I_2 & -\beta_1 S_1 & 0 & 0 & -\delta_{BA} S_1 & 0 \\ \beta_1 I_1 + \delta_{BA} I_2 & \beta_1 S_1 - \mu_1 & 0 & 0 & \delta_{BA} S_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{AB} S_2 & 0 & -\beta_2 I_2 - \delta_{AB} I_1 & -\beta_2 S_2 & 0 \\ 0 & \delta_{AB} S_2 & 0 & \beta_2 I_2 + \delta_{AB} I_1 & \beta_2 S_2 - \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В околі стаціонарної точки $(S_i = S_i^0, I_i = 0, R_i = 0), i=1,2$ матриця Якобі має вигляд:

$$J_b = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 S_1^0 & 0 & 0 & -\delta_{BA} S_1^0 & 0 \\ 0 & \beta_1 S_1^0 - \mu_1 & 0 & 0 & \delta_{BA} S_1^0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{AB} S_2^0 & 0 & 0 & -\beta_2 S_2^0 & 0 \\ 0 & \delta_{AB} S_2^0 & 0 & 0 & \beta_2 S_2^0 - \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Обчисливши власне значення матриці (17) з найбільшою дійсною частиною

$$\text{Re } \lambda_{\max} = \frac{1}{2} \left(a_1 + a_2 + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4a_3 a_4} \right), \quad (18)$$

де

$$a_1 = \beta_1 S_1^0 - \mu_1, \quad a_2 = \beta_2 S_2^0 - \mu_2, \quad a_3 = \delta_{BA} S_1^0, \quad a_4 = \delta_{AB} S_2^0, \quad (19)$$

ми визначимо умову епідеміологічного порога, оскільки стійкість матриці (17) визначається умовою $\text{Re } \lambda_{\max} < 0$:

$$a_1 + a_2 + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4a_3 a_4} < 0. \quad (20)$$

Остання умова й визначає епідеміологічний поріг.

Базовий репродуктивний коефіцієнт. Епідеміологічний поріг дозволяє визначити так званий базовий репродуктивний коефіцієнт R_0 (кількість захворювань, до яких призведе один

інфікований хост в цілком незахищеній мережі). Ми можемо визначити його з умови (8) роботи [4]:

$$R_0 = \frac{\beta_1 S_1^0 + \beta_2 S_2^0 + \sqrt{(\beta_1 S_1^0 - \mu_1 - \beta_2 S_2^0 + \mu_2)^2 + 4\delta_{AB}\delta_{BA}S_1^0 S_2^0}}{\mu_1 + \mu_2} \quad (21)$$

Якщо базовий репродуктивний коефіцієнт $R_0 < 1$, то епідемія не розпочнеться. Інакше при наборі параметрів моделі, що задовольняють умову $R_0 > 1$, існує тенденція до збільшення кількості інфікованих хостів.

Аналіз епідеміологічного порога. Аналізуючи нерівність (20), бачимо, якщо одна з підмереж є "непроникною" для вірусів із другої підмережі $\delta_{AB} = 0 \vee \delta_{BA} = 0$, то зміна коефіцієнта проникності вірусу для іншої підмережі ніяк не впливає на величину епідеміологічного порога. Цей результат є дещо несподіваним, оскільки ми очікували, що коефіцієнти проникнення вірусу між підмережами повинні мати незалежний вплив на порогове значення. Одержаний результат пояснюємо тим, що в околі стаціонарної точки, в якій відсутні інфіковані хости, малі збурення хвороби не мають впливу на поширення вірусу в інші підмережі.

Інший важливий результат одержимо, поклавши $\beta = \beta_1 = \beta_2$, $\mu = \mu_1 = \mu_2$, $\delta_{AB} = \delta_{BA}$, $S_0 = S_1^0 = S_2^0$ (тобто підмережі зв'язані між собою і містять однакову кількість хостів, а коефіцієнти поширення вірусу, імунізації хостів і проникнення вірусу між підмережами збігаються), тоді умову епідеміологічного порога (20) можна переписати:

$$\frac{\beta_0 S_0 + \delta S_0}{\mu} < 1 \Rightarrow S_0 < \frac{\mu}{\beta + \delta} \quad (22)$$

Зауважимо, що для $\delta = 0$ одержимо $S_0 < \frac{\mu}{\beta}$ – відому умову епідеміологічного порога для класичної SIR моделі.

З нерівності (22) випливає, що чим більшим є коефіцієнт проникності вірусу між підмережами, тим меншим є епідеміологічний поріг системи загалом.

Числові дослідження поширення вірусу для двох підмереж. Розглянемо складну мережу, яка складається з трьох підмереж. Кожна підмережа містить 1000 хостів. У початковий момент часу всі хости є незахищеними, а один у третій підмережі є інфікованим. У цьому випадку початкові умови задачі коші є такими:

$$S_{10} = 1000, I_{10} = 0, R_{10} = 0, S_{20} = 1000, I_{20} = 0, R_{20} = 0, \\ S_{30} = 999, I_{30} = 1, R_{30} = 0.$$

Вхідні параметри $\beta_i, \mu_i, i = \{1, 2, 3\}$, які характеризують швидкості поширення вірусу і швидкості імунізації хостів для кожної з підмереж, виберемо як такі, що характеризують поширення хробака CodeRed у мережі Internet [5]: $\beta_i = 0.8 \cdot 10^{-5}, \mu_i = 0.01, i = \{1, 2, 3\}$. Поширенню цього хробака присвячено декілька досліджень [4; 5], тому ми можемо порівняти одержані результати з результатами, одержаними в інших роботах.

Зокрема, для випадку, коли підмережі не пов'язані між собою, тобто значення всіх коефіцієнтів проникності рівне нулю, одержано такий результат: у першій та другій підмережах ніяких змін не відбувається, кількість незахищених комп'ютерів є сталою і рівною 1000, а кількість імунізованих та інфікованих є рівною нулю.

Розглянемо випадок, коли підмережі пов'язані між собою з коефіцієнтами $\delta_A = \delta_{12} = \delta_{21} = 0$, $\delta_B = \delta_{23} = \delta_{32} = 10^{-3}$, $\delta_C = \delta_{13} = \delta_{31} = 10^{-6}$, що відповідає ситуації, коли підмережі 1 і 2 не зв'язані, підмережі 2 і 3 зв'язані з коефіцієнтом проникнення 10^{-3} , підмережі 1 і 3 зв'язані з коефіцієнтом проникнення 10^{-6} . Виявляється, що в першій та другій початково незаражених підмережах інфікування проходить із деяким запізненням.

Випадок, коли підмережі пов'язані між собою з коефіцієнтами проникності $\delta_A = \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_B = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_C = \delta_{13} = \delta_{31} = 10^{-6}$, відповідає ситуації, коли всі підмережі є зв'язаними з однаковими коефіцієнтами проникнення 10^{-6} . У цьому випадку в першій та другій

початково незаражених підмережах інфікування так само проходить із деяким запізненням, як і в попередньому випадку, але запізнення є сталим.

Нами проводилося дослідження впливу значення коефіцієнта проникнення між підмережами на поширення вірусу. Результат було одержано для моделі (9) у випадку двох підмереж, зв'язаних із коефіцієнтами $\delta = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$ для тих самих початкових умов, що й у попередній задачі. Розглядалися розв'язки $I(t)$ моделі (9) при різних значеннях параметрів δ (для спрощення вважатимемо, що в кожному окремо взятому випадку вплив підмереж є однаковим). Одержаний розв'язок дозволяє стверджувати, що зі зменшенням зв'язності мережі збільшується час відставання між розвитком епідемії. У той же час спостерігаємо, що зменшення зв'язності мережі майже не призводить до зменшення кількості уражених хостів.

Таким чином, проведені дослідження динаміки поширення вірусів в інтермережах показали, що значну роль у швидкості поширення комп'ютерних вірусів відіграє активність обміну інформацією між мережами та наявність антивірусного бар'єру в точках взаємод'явання мереж. При побудові сучасних комп'ютерних мереж необхідно враховувати величину епідеміологічного порога, оскільки таким чином можна суттєво знизити ймовірність масового враження хостів у підмережі. Розробляючи стратегію захисту інтермережі, варто брати до уваги не лише захищеність окремо взятих підмереж, а й вплив взаємозв'язків між ними на стійкість до вірусу системи загалом.

1. Moore D., Shannon C., Voelker G.M., Savage S. Internet Quarantine: Requirements for Containing Self-Propagating Code / San Diego Supercomputer Center, University of California. – San Diego: INFOCOM, 2003.
2. Pande R. Using Plant Epidemiological Methods To Track Computer Network Worms.
3. Kermack W.O., McKendrick A.G. A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Society of London Series A. – 1927. – P.55–83.
4. Leveille J. Epidemic Spreading in Technological Networks. – 2002 / HP, Technical Report: HPL-2002-287.
5. Zou C.C., Gong W., Towsley D. Code Red Worm Propagation Modeling and Analysis // Conference on Computer and Communications Security archive Proceedings of the 9th ACM conference on Computer and communications security. – Washington: DC, 2002. – P. 138–147.
6. Возняк Н.О., Щербатий М.В. Поширення вірусів в інформаційних системах // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Тези доп. Десятої Всеукраїнської наукової конференції (Львів, 23–25 вересня 2003 р.). – Львів, 2003. – С. 37.

Mathematical models of digital infections spreading in informational systems has been overviewed. Based on statistical data given from Internet it has been investigated correctness of prepared mathematical models. It has been built the model of computer virus spreading in the internetwork which consists of K networks. Numerical solution has been also provided.

Key words: mathematic modelling, computer viruses, computer epidemic.

ВПЛИВ ФЛУКТУАЦІЙ СПІН-ОРБІТАЛЬНОЇ ВЗАЄМОДІЇ НА ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ КВАНТОВОГО НАПІВПРОВІДНИКОВОГО ДРОТУ

Отримані вирази для часу релаксації, рухливості електронів і статичної електропровідності вздовж напівпровідникового квантового дроту, зумовлені одномірними гауссівськими флуктуаціями спін-орбітальної взаємодії електронів дроту. Для невиродженої статистики носіїв струму при низьких температурах (T) рухливість електронів $u_n \propto T^{-1/2}$.

Ключові слова: квантовий напівпровідниковий дріт, одномірні гауссівські флуктуації, рухливість електронів, статична електропровідність.

Урахування впливу спін-орбітальної взаємодії є необхідним у багатьох проблемах фізики твердого тіла [1–3]. У зв'язку з досягненнями сучасних технологій актуальними стають дослідження низькорозмірних систем, в яких яскраво виявляються ефекти квантування електронного енергетичного спектра та спін-орбітальної взаємодії. Завдяки останнім народжується нова галузь твердотільної електроніки, названа “спінтронікою”, з якою пов'язують надії на створення нових електронних приладів і нових пристроїв для квантових обчислень на основі управління спіновим ступенем вільності носіїв заряду [4; 5]. Існуючі технології не виключають можливості впливу різноманітних флуктуацій у квазіодновимірних системах наноелектроніки. У [6] було досліджено вплив на статичну електропровідність випадкового поля, зумовленого флуктуаціями товщини квантового напівпровідникового дроту. Метою даної роботи є визначення впливу можливих одномірних гауссівських флуктуацій спін-орбітальної взаємодії на статичну електропровідність уздовж дроту.

Розглянемо модель квантового напівпровідникового дроту з поперечними розмірами, обмеженими за товщиною d (у напрямку координатної осі z) одномірною потенціальною ямою $V(z)$ з нескінченно високими стінками та за шириною (у напрямку y) параболічним потенціалом βy^2 ($\beta > 0$). В одноелектронному наближенні [7] гамільтоніан системи має такий вигляд

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U}_{so}, \quad (1)$$

де

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(z) + \beta y^2 \quad (2)$$

– гамільтоніан незбуреної задачі,

$$V(z) = \begin{cases} 0, & -d/2 \leq z \leq d/2, \\ \infty, & z < -d/2, z > d/2, \end{cases} \quad (3)$$

m – ефективна маса електрона провідності,

$$\hat{U}_{so} = [\gamma + \xi(x)] [\hat{\sigma}_x \hat{p}_x (\hat{p}_y^2 - \hat{p}_z^2) + \hat{\sigma}_y \hat{p}_y (\hat{p}_z^2 - \hat{p}_x^2) + \hat{\sigma}_z \hat{p}_z (\hat{p}_x^2 - \hat{p}_y^2)] \quad (4)$$

– оператор спін-орбітальної взаємодії для об'ємного нецентроінверсного напівпровідника A_3B_5 за механізмом Дрессельхауз [1, 4, 5] із врахуванням одномірної (уздовж осі дроту x) випадкової флуктуації $\xi(x)$, $\hat{\sigma}_j$ ($j = x, y, z$) – матриці Паулі, $\hat{p}_j = -i\hbar(\partial/\partial x_j)$ – оператори складових імпульсу електрона. Спін-орбітальну взаємодію (4) вважаємо збуренням, що спричинює квантові переходи в трансляційному русі вздовж дроту зі зміною орієнтації спіну носія струму. Обмежимося внеском в електропровідність нижнього квантово-розмірного рівня енергії поперечного руху електрона. У наближенні врахування станів електрона з певною парністю по осі z хвильова функція незбуреної задачі має вигляд:

$$\Psi_{k_x, z}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi^{1/2} L d y_0}} \exp\left(ik_x x - \frac{y^2}{2y_0^2}\right) \cos \frac{\pi}{d} z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де L – довжина дроту ($L \gg d$), $y_0 = \hbar^{1/2} (2m\beta)^{-1/4}$. Енергія електрона в стані (5):

$$E(k_x) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} + \hbar(\beta/2m)^{1/2}. \quad (6)$$

Обернений час релаксації електрона вздовж дроту з поворотом спіну

$$\frac{1}{\tau_n(k_x)} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k_x'} \langle\langle | \langle k'_{x,z} | \hat{U}_{so} | k_{x,z} \rangle |^2 \rangle\rangle \left(1 - \frac{k'_x}{k_x}\right) \delta[E(k_x) - E(k'_x)], \quad (7)$$

де подвійні дужки мають зміст усереднення за випадковою флуктуацією $\xi(x)$. Флуктуації $\xi(x)$ будемо вважати гауссівськими:

$$\langle\langle \xi(x)\xi(x') \rangle\rangle = \Delta^2 \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{2\Lambda^2}\right], \quad (8)$$

$$\langle\langle \xi(x) \rangle\rangle = 0.$$

Після обчислень (7) з урахуванням (4) і (8) знаходимо остаточний результат для часу релаксації:

$$\frac{1}{\tau_n(k_x)} = 2\sqrt{2\pi} \hbar^3 m \Delta^2 \Lambda \left(\frac{\pi^2}{d^2} - \frac{3}{2y_0^2}\right)^2 |k_x| \exp(-2\Lambda^2 k_x^2). \quad (9)$$

Для електронної провідності з кінетичного рівняння Больцмана в наближенні часу релаксації [7, 8] маємо:

$$\sigma_n = \frac{2\hbar^2 e^2}{m^2} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) k_x^2 \tau_n(|k_x|) dk_x, \quad (10)$$

де $f_0 = [\exp((\varepsilon_k - \mu)/k_B T) + 1]^{-1}$ – функція розподілу Фермі – Дірака, $\varepsilon_k = (\hbar k_x)^2 / 2m$ – кінетична енергія руху електрона з ефективною масою m вздовж дроту, μ – хімічний потенціал, відрахований від квантово-розмірного рівня руху електрона поперек дроту; $2 \sum_{k_x} f_0(k_x) = N$ –

повна кількість електронів дроту, e – абсолютна величина заряду електрона.

Після підстановки (9) у (10) і проведення розрахунку за допомогою [9] отримаємо:

$$\sigma_n = \frac{e^2}{\hbar^3 m^2 \Delta^2 \Lambda} \left(\frac{\pi^2}{d^2} - \frac{3}{2y_0^2}\right)^{-2} \frac{\exp(\mu/k_B T)}{\sqrt{2\pi(1-\beta)}} \times F(2, 1-\beta; 2-\beta; -\exp(\mu/k_B T)), \quad (11)$$

$$\beta = (4m\Lambda^2 k_B T / \hbar^2). \quad (12)$$

F – гіпергеометричний ряд [9, 10]. Формули (11), (12) дійсні при $\beta < 1$, що пов'язано з тим, що час релаксації (9) експоненціально зростає з енергією електрона. Тому для ефективного розсіяння на гауссівських флуктуаціях важливим є те, щоб “теплова” довжина хвилі де Бройля носія заряду перевищувала величину кореляційного радіуса Λ . Ще одне обмеження пов'язане з вибором нескінченної верхньої межі в інтегралі (10), коли $[(\hbar^2/2mk_B T) - 2\Lambda^2](\pi/\ell)^2 \gg 1$, де ℓ – стала ґратки вздовж осі дроту.

Використовуючи відомі властивості гіпергеометричного ряду [9, 10], з (11), (12) можна визначити рухливість електрона u_n вздовж осі дроту з поворотом спіну для різних граничних випадків. Для невиродженої статистики носіїв струму

$$u_n = \frac{e \left(\frac{\pi^2}{d^2} - \frac{3}{2y_0^2}\right)^{-2} (1-\beta)^{-1}}{2\hbar^2 m^{3/2} \Delta^2 \Lambda (k_B T)^{1/2}}, \quad (13)$$

тобто в низькотемпературній ділянці невиродженого дроту $u_n \propto T^{-1/2}$. За температурною залежністю рухливості це нагадує п'єзоелектричне розсіяння на акустичних фононах [11] для тривимірних напівпровідникових матеріалів.

Для виродженого дроту в граничному випадку низьких температур, коли $(k_B T / \mu) \ll 1$, електропровідність уздовж осі дроту:

$$\sigma_n \approx \frac{e^2 \left(\frac{\pi^2}{d^2} - \frac{3}{2y_0^2} \right)^{-2}}{\sqrt{2\pi\hbar^3 m^2 \Delta^2 \Lambda}} \exp(4\pi\mu\Lambda^2 / \hbar^2). \quad (14)$$

Температурна залежність σ_n визначається хімічним потенціалом одновимірного електронного газу:

$$\mu(T) \approx \mu_0 \left[1 + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\mu_0} \right)^2 \right], \quad (15)$$

$$\mu_0 = \frac{\hbar^2}{8m} (\pi n)^2, \quad (16)$$

де $n = N/L$ – кількість електронів на одиниці довжини дроту.

Зауважимо, що отримані температурні залежності статичної електропровідності вздовж напівпровідникового квантового дроту при розсіянні з поворотом спіну електрона внаслідок одномірних гауссівських флуктуацій спін-орбітальної взаємодії суттєво відрізняються від випадку розсіяння без зміни орієнтації спіну, зумовленого випадковим полем гауссівських флуктуацій товщини [6] дроту.

1. Dresselhaus G. Spin-orbit coupling effects in Zinc Blende structures // Phys. Rev. – 1955. – V.100. – №2. – P.580–586.
2. Рашба Э.И. Свойства полупроводников с петлей экстремумов // ФТП. – 1960. – Т.2. – №6. – С.1224–1237.
3. Возняк О.М. Врахування впливу спін-орбітальної взаємодії на енергетичний спектр ідеальних кристалів та неупорядкованих твердих тіл у методі сильного зв'язку // Фізика і хімія твердого тіла. – 2005. – Т.6. – №3. – С.351–361.
4. Магарилл Л.И., Чаплик А.В. Спин-зависимая локализация электронов в кристаллах // Письма в ЖЭТФ. – 2005. – Т.81. – №4. – С.198–202.
5. Efros A.L., Rashba E.I. Theory of electric dipole spin resonance in a parabolic quantum well // Phys. Rev. – 2006. – V.73. – P.165325-1–165325-19.
6. Рувинский М.А., Рувинский Б.М. О влиянии флуктуаций толщины на статическую электропроводность квантовой полупроводниковой проволоки // ФТП. – 2005. – Т.39. – №2. – С.247–250.
7. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. – М.: Наука, 1978. – 616 с.
8. Гантмахер В.Ф., Левинсон И.Б. Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев А.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 1974. – 752 с.
11. Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. Физика полупроводников. – М.: Наука, 1977. – 672 с.

The expressions for a relaxation time, an electron mobility and static electroconductivity along a semiconductor quantum wire conditioned by one-dimensional Gaussian fluctuations of spin-orbital interaction wire electrons are obtained. For nondegenerate statistics of carriers at low temperatures statistics of carriers at low temperatures (T) the electron mobility $u_n \propto T^{-1/2}$.

Key words: quantum semiconductor wire, one-dimensional Gaussian fluctuations, electron mobility, static electroconductivity.

УДК 621.315.592

ББК 22.379.23

О.М. Возняк, Л.І. Никуруй, О.І. Львів

ВАРІАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО РОЗГЛЯДУ ЯВИЩ ПЕРЕНОСУ В НАПІВПРОВІДНИКАХ НА ОСНОВІ КІНЕТИЧНОГО РІВНЯННЯ БОЛЬЦМАНА (I)

Розглянуто загальний підхід до опису нерівноважних процесів у напівпровідниках. Зроблено аналіз варіаційного підходу до розгляду явищ переносу на основі кінетичного рівняння Больцмана. Наведено матричні елементи оператора зіткнень для різних механізмів розсіювання.

Ключові слова: явища переносу, кінетичне рівняння Больцмана, варіаційний метод, рухливність носіїв.

Вступ. Явища переносу в напівпровідниках виникають при дії на систему зовнішніх чинників – температури, електричного та магнітного полів, радіаційного опромінення, світла тощо. Ці процеси прийнято називати нерівноважними. Найзагальніший підхід до їх опису базується на використанні так званої матриці густини [1]. Проте його рідко можна реалізувати для конкретних систем навіть при малих відхиленнях їх від рівноважного стану. Тому на практиці використовують або феноменологічний підхід, що базується на теорії Онзагера [2], або мікроскопічний підхід, що має назву кінетичного, в якому нерівноважну систему характеризують n -частинковими функціями розподілу, які мають зміст імовірності того, що окремі n -частинки багаточастинкової системи набувають певних значень фізичних величин. Для цих функцій розподілу запропоновано ланцюжок нескінченної кількості взаємопов'язаних рівнянь [1]. У цьому підході чим детальнішим є опис системи, тим вищою буде розмірність системи рівнянь, і, відповідно, тим складнішим буде знаходження розв'язку поставленої задачі. Стосовно класичних явищ переносу, то в багатьох випадках достатньо обмежитися лише одночастинковою функцією розподілу, рівняння для якої відоме як рівняння Больцмана [1].

Кінетичне рівняння Больцмана та його узагальнення

Кінетичне рівняння Больцмана може бути застосоване для опису руху електронів у кристалі, якщо він квазікласичний, тобто якщо всі зміни в системі та всі потенціали повільно змінюються на відстанях, що мають порядок величини міжатомних. Але оскільки стан електрона в кристалі визначається квазіхвильовим вектором, то й нерівноважна функція розподілу залежатиме не від швидкостей, а від квазіхвильового вектора \vec{k} , крім того, від координат і часу $f(\vec{r}, \vec{k}, t)$.

Для процесів, що встановилися й відбуваються під впливом стаціонарних полів, зміни функції розподілу під їх впливом $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{пол}}$ компенсуються процесами зіткнень, не пов'язаними

із зовнішніми полями $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{зіткн}}$, тобто:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{пол}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{зіткн}}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{пол}} = (\vec{v}, \nabla_{\vec{r}} f) - \frac{e}{\hbar} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right) \nabla_{\vec{k}} f,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{зіткн}} = \sum_{\vec{k}'} W(\vec{k}, \vec{k}') \{ f(\vec{k}') - f(\vec{k}) \},$$

$W(\vec{k}, \vec{k}')$ – імовірність того, що електрон перейде зі стану \vec{k} у стан \vec{k}' за одиницю часу, \vec{v} – швидкість носія, \vec{E} і \vec{H} – електрична й магнітна складові напруженості електромагнітного поля, $\Delta_{\vec{r}} f$ і $\Delta_{\vec{k}} f$ – градієнти функції розподілу в просторі координат і квазіхвильового вектора.

Класичні кінетичні явища відносяться до так званих слабонерівноважних процесів, для яких нерівноважну функцію розподілу подають у вигляді [3]:

$$f = f_0(E) - \frac{\partial f_0}{\partial E} \Phi(\vec{k}), \quad (2)$$

де $f_0(E)$ – функція розподілу рівноважної системи,

$\Phi(\vec{k})$ – нерівноважний додаток до рівноважної функції,

$\frac{\partial f_0}{\partial E}$ – введено для зручності.

Тоді лінеаризоване рівняння Больцмана для функції $\Phi(\vec{k})$ набуває вигляду:

$$(\vec{v}, \nabla, f_0) - \frac{e}{\hbar} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \nabla_k \Phi(\vec{k}) \right) \nabla_k f_0 =$$

$$= \frac{1}{k_0 T} \int W(\vec{k}, \vec{k}') f_0(E) (1 - f_0(E')) [\Phi(\vec{k}) - \Phi(\vec{k}')] d\vec{k}. \quad (3)$$

Розв'язок навіть такого лінеаризованого рівняння викликає значні математичні труднощі. У так званому наближенні часу релаксації внесок, що описує зіткнення, записують так:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{зіткн}} = -\frac{f - f_0}{\tau}. \quad (4)$$

У цьому наближенні розглядається більшість кінетичних явищ у твердих тілах [3].

Елементи варіаційного методу аналізу кінетичних явищ і матричні елементи оператора зіткнень

При непружному розсіюванні носіїв, як у вузькощілинних напівпровідниках зі складним законом дисперсії, наближення часу релаксації стає некоректним. Тому використовують інші наближені методи розв'язку рівняння Больцмана. Серед них у теорії напівпровідників великого поширення набув варіаційний метод [4, 5]. Зважаючи на екстремальні властивості розв'язків лінеаризованого рівняння Больцмана, для їх знаходження можна застосувати звичайний варіаційний підхід. Для цього функцію $\Phi(\vec{k})$ вибирають у вигляді лінійної комбінації відомих функцій, які є степеневими функціями від енергії, а коефіцієнти при них слугують підгоночними параметрами. Останні вибирають так, щоб мінімізувати відповідний функціонал [4].

Для спрощення введемо позначення:

$$\hat{L}\Phi(\vec{k}) = \frac{1}{k_0 T} \int W(\vec{k}, \vec{k}') f_0(E) (1 - f_0(E')) [\Phi(\vec{k}) - \Phi(\vec{k}')] d\vec{k}, \quad (5)$$

$$X = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial f_0}{\partial E} \left\{ \left(e\vec{E} - \nabla\xi - \frac{E - \xi}{T} \nabla T \right) \vec{v} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \nabla_k \Phi(\vec{k}) \right\}. \quad (6)$$

Тоді лінеаризоване рівняння Больцмана (3) можна переписати так:

$$\hat{L}\Phi(\vec{k}) = X. \quad (7)$$

У загальному випадку система може складатися з кількох сортів частинок, тоді рівняння (7) трансформується в систему лінійних кінетичних рівнянь, яку формально можна записати в такому вигляді:

$$\sum_{j=1}^n \hat{L}_{ij} \Phi_j(\vec{k}) = X_i, \quad (8)$$

а під операторами \hat{L}_{ij} розуміють лінійну комбінацію операторів \hat{L}_{ij}^{ν} , які відповідають різним механізмам розсіювання, а індекс ν вказує на тип механізму розсіювання носіїв. Тоді:

$$\hat{L}_{ij}^{\nu} \Phi_j(\vec{k}) = \frac{1}{k_0 T} \int W_{ij}^{\nu}(\vec{k}, \vec{k}') f_{0i}(E) (1 - f_{0j}(E')) [\Phi_j(\vec{k}) - \Phi_j(\vec{k}')] d\vec{k}, \quad (9)$$

$$X_i = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial f_{0i}}{\partial E} \left\{ \left(e\vec{E} - \nabla\xi - \frac{E - \xi}{T} \nabla T \right) \vec{v}_i + \frac{e}{c} [\vec{v}_i, \vec{H}] \nabla_k \Phi(\vec{k}) \right\}. \quad (10)$$

Використовуючи варіаційну процедуру, пробні функції записують у вигляді ряду за степенями $(E - E_F)$, тобто:

$$\Phi_i(\vec{k}) = \sum_{\beta=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} c_{in}^{\beta} k_{\beta} (E - E_F)^n, \quad (11)$$

де c_{in}^{β} – коефіцієнти розкладу, що слугують варіаційними параметрами.

Варіаційна процедура полягає в тому, що кінетичні рівняння (8) можна одержати з умови стаціонарності деякого функціонала, який за відсутності магнітного поля має вигляд:

$$F[\Phi] = (\Phi_i; \hat{L}_{ij} \Phi_j) - \left(\frac{\partial f_0}{\partial E} v_i \left[eE - \nabla\xi - \frac{E - \xi}{T} \nabla T \right], \Phi_i \right), \quad (12)$$

$$(\Phi(\vec{p}), \hat{L}\Phi(\vec{p})) = \int \Phi^*(\vec{p}) \hat{L}\Phi(\vec{p}) d\vec{p}.$$

При представленні функцій $\Phi_i(\vec{k})$ у вигляді ряду за степенями (11) з умови екстремальності функціонала $\frac{\partial F}{\partial c_{in}^{\beta}} = 0$ одержують систему звичайних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів розкладу:

$$\sum_{j=1}^k \sum_{\beta=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} (L_{ij})_{nn}^{\beta\beta} c_{jn}^{\beta} = b_{in}^{\beta}, \quad (13)$$

$$(L_{ij})_{nn}^{\beta\beta} = (p_{\beta}(E - E_F)^n, \hat{L}_{ij} p_{\beta}(E - E_F)^n),$$

$$b_{in}^{\beta} = - \left(v_i(\vec{p}) \frac{\partial f_0}{\partial E} \left[eE - \nabla\xi - \frac{E - \xi}{T} \nabla T \right], p_i(E - E_F)^n \right).$$

Для складних законів дисперсії носіїв струму та при врахуванні непружних механізмів розсіювання розрахунок матричних елементів $(L_{nn}^{\beta\beta})_{\text{непруж}}$, що входять у вирази для кінетичних коефіцієнтів, викликає нездоланні труднощі. Спрощення можна досягнути лише тоді, коли носії струму є виродженими, оскільки при цьому нерівноважна функція розподілу $f(\vec{k})$ відрізняється від рівноважної лише у вузькому інтервалі енергій поблизу енергії Фермі, що суттєво спрощує розрахунок інтегралів. Проте навіть у такому випадку розрахунок матричних елементів ще супроводжується значними математичними труднощами.

Виявляється, що провідність, а також інші кінетичні коефіцієнти з достатньою точністю можна знайти, якщо в розкладі (11) обмежитися членами з $n=0,1$. У цьому випадку система рівнянь (13) містить лише два рівняння. Ще більшого спрощення можна досягнути, якщо обмежитися розглядом лише рухливості носіїв, оскільки в цьому випадку достатньо врахувати в розкладі (11) лише доданок з $n=0$. Тоді:

$$\Phi(\vec{k}) = C_0 k, \quad (14)$$

я для рухливості вдається одержати достатньо простий вираз. Для носіїв, енергетичний спектр яких описується законом Кейна, він записується так:

$$\mu = -\frac{enkT}{L_{00}}, \quad (15)$$

де n – концентрація носіїв струму,

L_{00} – матричні елементи оператора розсіювання носіїв.

При одночасній дії декількох механізмів розсіювання матричні елементи L_{00} додаються так само, як і обернені часи релаксації, тому їх можна записати так:

$$L_{00} = \sum_i L_{00}^i, \quad (16)$$

де i нумерує механізми розсіювання.

В аналітичній формі вирази для матричних елементів подані в монографії [5], і при домішковому розсіюванні вони мають такий вигляд:

$$(L_i)_{kk'}^{\beta\beta} = -2e^{-4} N \iint d\vec{p} d\vec{p}' \varphi_i(|\vec{p}' - \vec{p}|) \delta(\varepsilon' - \varepsilon) \varepsilon^{k+k'} (\vec{p}^{\beta} - \vec{p}'^{\beta}) (\vec{p}^{\beta} - \vec{p}^{\beta}) f_0(\varepsilon). \quad (17a)$$

Тут $\varphi_i(g) = \{ \chi_{\parallel}^0 g_{\parallel}^2 + \chi_{\perp}^0 g_{\perp}^2 + v^2 \}^{-2}$, $\vec{g} = \vec{p}' - \vec{p}$, $v^2 = \hbar^2 a^2$, a – стала ґратки.

Для розсіювання на акустичних фонах:

$$(L_a)_{kk'}^{\beta\beta} = -\frac{4mn(k_0 T)^{k+k'+1}}{3\sqrt{\pi} \tau_j^0 (k_0 T)} (k+k'+2)! \delta_{\beta\beta'}. \quad (17b)$$

Для розсіювання на оптичних фононах:

$$(L_o)_{kk}^{\beta\beta} = -n^i \sqrt{\frac{8m_{\perp} m_{\parallel} T_o}{\pi}} a_o^{(i)} T_o^{k+k} \psi_{\beta\beta}^{(i)}(k+k'). \quad (17c)$$

При сильному виродженні та законі дисперсії Кейна їх можна записати у вигляді:

$$L_{oo}^i = \frac{nkTm^*(E_F)}{\tau_i}, \quad (18)$$

де $m^*(E_F)$ – ефективна маса носіїв на рівні Фермі, τ_i – час релаксації i -го пружного механізму розсіювання.

Таку саму форму запису для матричних елементів можна зберегти й для непружних механізмів розсіювання, проте час релаксації виявляється складною функцією температури та концентрації. Тоді вираз для рухливості набуває відомої форми [3]:

$$\mu = \frac{e\tau(E_F, n, T)}{m^*(E_F, n, T)}, \quad (19)$$

де $\tau = \left(\sum_i \tau_i^{-1}\right)^{-1}$ – сумарний час релаксації.

III. Розрахунок рухливості носіїв

При розрахунках рухливості носіїв зручно використовувати не формулу (17), а іншу, що має вигляд [6]:

$$\mu = A(E_F, n, T) \sum_i B_i^{-1} F_i^{-1}, \quad (20)$$

де $A(E_F, n, T) = \frac{\epsilon_{cm} \hbar^3 k_F}{e k_o T} [m^*(E_F)]^{-2}$ і має розмірність рухливості,

B_i і F_i – безрозмірні величини, що пов'язані з часом релаксації носіїв τ_i ,

ϵ_{cm} – статична діелектрична проникливість напівпровідника,

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}.$$

Відповідні вирази для величин B_i і F_i , що відповідають i -му механізму розсіювання, подані в [6].

При домішковому розсіюванні:

$$B_i = \frac{2\pi N_i}{\chi_o k_o T} \left(\frac{e}{k_F}\right)^2,$$

$$F_i = \ln(\xi_o + 1) - \xi_o(\xi_o - 1)^{-1} - 4L[1 + (\xi_o - 1)^{-1} - 2\xi_o^{-1} \ln(\xi_o + 1) + \frac{3}{2}L^2(1 - 4\xi_o^{-1} + 6\xi_o^{-2} \ln(\xi_o + 1) - 2\xi_o^{-1}(\xi_o - 1)^{-1})], \quad (21a)$$

де $\xi_o = (2k_F \lambda_o)$, $L = \frac{\epsilon_F}{\epsilon_g + \epsilon_F}$.

Для акустичних фононів:

$$B_{ak} = \frac{\chi_o}{\pi\rho} (k_F E / ev_{\parallel}^2)^2, \quad (21b)$$

$$F_{ak} = 1 - 1.2L + \left[0.36 + \frac{1}{8} \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}\right)^2\right] L^2,$$

де ρ – густина, E – константа деформаційного потенціалу, v_{\parallel} і v_{\perp} – повздовжня та поперечна компоненти швидкості звуку в кристалі.

Для оптичних фононів:

$$B_o = 2 \left(\frac{\chi_o}{\chi_x} - 1\right), \quad (21c)$$

$$F_o = 1 - 2L + \frac{3}{2}L^2.$$

Для вакансій:

$$B_v = \frac{2ek_F}{3\pi\chi_o k_o T}, \quad F_v = \ln(1 + \xi_o) - \xi_o(\xi_o + 1)^{-1}. \quad (21d)$$

Висновки

1. Зазначено, що використання наближення часу релаксації до опису явищ переносу в напівпровідниках із непружними механізмами розсіювання є некоректним.

2. Показано, що для вузькощілинних напівпровідників із складними законами дисперсії доцільно застосовувати варіаційні підходи.

3. Подано матричні елементи оператора зіткнень для розрахунку рухливості вироджених напівпровідників.

1. Ненхара А. Статистическая физика. – М.: Мир, 1973. – 471 с.

2. Луварев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1971. – 416 с.

3. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. – М.: Наука, 1978. – 616 с.

4. Дымши И.М., Томчук П.М. Явления переноса и флуктуации в полупроводниках. – К.: Наукова думка, 1981. – 320 с.

5. Горлей П.Н., Шендеровский В.А. Вариационный метод в кинетической теории. – К.: Наукова думка, 1992. – 296 с.

6. Гвалешко Н.П., Горлей П.Н., Паранчич Л.Д. и др. Механизмы рассеяния носителей заряда в твердых растворах Mn, Hg_{1-x}Te, Cd, Hg_{1-x}Se, Zn, Hg_{1-x}Se. – К.: Препринт Ин-та физики АН УССР, 1982. – 42 с.

General approach is considered to description of nonequilibrium processes in semiconductors. The analysis of variation approach is done to consideration of the phenomena of transfer on the basis of the kinetic equalization Boltzman. The matrix elements of operator of collisions are resulted for different mechanisms of dispersion.

Key words: phenomena of transfer, kinetic equalization Boltzman, variation method, mobility of transmitters.

УДК 538.975, 539.26, 669-17

ББК 22.371.21

І.П. Яремій, В.І. Кравець, В.М. Пулипів, С.І. Яремій

СТРУКТУРНА ДІАГНОСТИКА ПРИПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ ІОННО-ІМПЛАНТОВАНИХ МОНОКРИСТАЛІВ ТА ПЛІВОК ЗІ СТРУКТУРОЮ ГРАНАТУ

Проведено порівняльний аналіз можливостей визначення параметрів порушеного шару на основі різних теоретичних підходів (кінематичної, динамічної та статистичної динамічної теорій розсіювання рентгенівських променів), а також встановлено критерії їх використання. Удосконалена методика обчислення профілів деформації та оцінки ступеня однозначності їх визначення.

Ключові слова: ферит-гранатові плівки, профілі деформації, розсіювання рентгенівських променів, кінематична та динамічна теорії.

Вступ. Властивості функціональних мікроелектронних пристроїв у значній мірі визначаються тензором напруг, наведених у приповерхневому шарі монокристала чи плівки при легуванні, дифузійному насиченні, іонній імплантації або термообробці, тому дослідження просторового розподілу структурних характеристик у вказаному шарі є однією з важливих проблем фізики твердого тіла.

У даній роботі представлено методику отримання інформації про розподіл змін міжплощинної відстані за глибиною приповерхневого шару іонно-опромінених монокристалічних гетероструктур – магнітних ферит-гранатових плівок (ФГП).

На кривих дифракційного відбивання (КДВ), отриманих від іонно-імплантованих ФГП, спостерігаються осциляції інтенсивності розсіяного рентгенівського проміння у вигляді додаткових піків та напливів, що пояснюється дифракцією рентгенівського пучка на деформованому приповерхневому шарі. Аналіз додаткової осциляційної структури дозволяє отримати інформацію про стан іонно-імплантованого шару плівки і, відповідно, про кількість, фізичні характеристики та глибинний розподіл радіаційних дефектів, що зумовлюють зміни в міжплощинній відстані приповерхневого шару кристала. Хоча структурні зміни в приповерхневому шарі однозначно впливають на вигляд КДВ, вирішення оберненої задачі, тобто визначення структури приповерхневих шарів за даними КДВ, нашо вхується на значні труднощі, оскільки для однозначного опису структури приповерхневого шару за КДВ необхідно знати комплексну амплітуду відбивання в усьому кутовому інтервалі, а експериментально вимірюваний коефіцієнт є лише модулем цієї величини.

Розсіювання рентгенівських променів реальними кристалами. У випадку достатньо досконалих монокристалів, якими є досліджувані ФГП, для коректного опису дифракції необхідним є застосування динамічної теорії розсіювання рентгенівських променів. У своїх обчисленнях ми використовували одержаний Коном та Ковальчуком розв'язок системи рівнянь Такагі для кристала, в якому спотворення є функцією тільки однієї координати глибини, відраховуваної вздовж внутрішньої нормалі до поверхні [1]. Характеристиками структури кристала є усереднена за площиною, паралельною до поверхні кристала, міжплощинна відстань і фактор Дебая – Валлера W ($E = e^{-W}$), який характеризує хаотичні зміщення атомів усередині елементарної комірки.

Коли вказані величини є функціями глибини, весь порушений шар ділиться на підшари, у межах кожного з яких вони вважаються сталими. Амплітуда інтенсивності дифрагованої хвилі обчислюється за допомогою рекурентних співвідношень [1]:

$$A_n(z, \theta) = \frac{x_1 - x_2 x_3 e^{-2\sigma(L-z)}}{1 - x_3 e^{-2\sigma(L-z)}}$$

де L – товщина порушеного шару, z – глибина від поверхні кристала,

$$x_{1,2} = -\frac{1}{\tilde{C}e^{-W}} \left[b \pm \sqrt{b^2 - \tilde{C}^2 e^{-2W}} \right], \quad x_3 = \frac{x_1 - A_{n-1}}{x_2 - A_{n-1}}, \quad \sigma = \frac{1}{iL_{ex}} \sqrt{b^2 - \tilde{C}^2 e^{-2W}}, \quad b = y - iy_0 - Y,$$

$$y = -\sqrt{\beta} \frac{\sin 2\theta_B}{|\chi_{hr}|} \Delta\theta, \quad y_0 = \frac{\chi_{\sigma} (1 + \beta)}{|\chi_{hr}| 2\sqrt{\beta}}, \quad \beta = \frac{\gamma_{\sigma}}{|\gamma_{\pi}|}, \quad Y(z) = \pi \frac{L_{ex}}{d} \frac{\Delta d(z')}{d},$$

$$L_{ex} = \lambda \frac{\sqrt{|\gamma_{\sigma}| |\gamma_{\pi}|}}{\pi |\chi_{hr}|} - \text{довжина екстинкції},$$

$\Delta d/d$ – відносна зміна міжплощинної відстані, $z' = L - z$,

$$\tilde{C} = C \frac{\sqrt{\chi_h \chi_{\bar{h}}}}{|\chi_{hr}|}, \quad C = \begin{cases} 1, & \sigma - \text{поляризація}, \\ |\cos 2\theta_B|, & \pi - \text{поляризація}. \end{cases}$$

При цьому, для кожного наступного підшару використовується амплітуда інтенсивності дифрагованої хвилі від підкладки, плівки та всіх нижчих підшарів. Амплітуду підкладки знаходять із рівняння:

$$A_0(\theta) = - \left[y - iy_0 \pm \sqrt{(y - iy_0)^2 - \tilde{C}^2} \right] / \tilde{C}.$$

Одним із напрямків розвитку динамічної теорії розсіювання рентгенівських променів при одночасній наявності в кристалі різних типів дефектів є статистична динамічна теорія [2,3]. У даній теорії вплив дефектів різного типу статистично усереднюється і в загальному випадку характеризується трьома величинами: зміною міжплощинної відстані, статичним фактором Дебая – Валлера E та кореляційною довжиною τ . Концентрація дефектів (характеризується E)

головним чином впливає на об'ємну щільність випадкових відхилень, а розміри дефектів (характеризуються τ) – на величину (амплітуду) цих відхилень.

У зв'язку з тим, що обчислення теоретичних КДВ, за динамічною теорією, при використанні деяких методів мінімізації, які потребують багатократного порівняння теоретичної та експериментальної КДВ, вимагає значних затрат часу, для прискорення обчислень можна використовувати напівкінематичне наближення, тобто відбивання від підкладки та ідеальної частини плівки обчислювалося за динамічною теорією, а від порушеного шару – за кінематичною. На основі кінематичної теорії амплітуду інтенсивності дифрагованої від товстого порушеного шару хвилі $A(\Delta\theta)$ можна обчислювати як суму амплітуд хвиль, відбитих від кожної з атомних площин:

$$A(\Delta\theta) = C \sum_{m=1}^N \exp(i\Phi_n), \quad \Phi_n = \frac{4\pi}{\lambda} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{d_m}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \sin(\theta_B + \Delta\theta),$$

де C – амплітудний фактор, приймається за постійну величину, Φ_n – різниця фаз між хвилями, відбитими від першої та n -ї атомних площин, h, k, l – індекси Міллера, d_m – міжплощинна відстань, яка змінюється з глибиною.

При обчисленнях (як і при використанні рівняння Такагі) увесь порушений шар розділявся на підшари, у кожному з яких міжплощинна відстань уважалася сталою.

Експериментально вимірюваний коефіцієнт відбивання зразка зв'язаний з теоретично обчисленою амплітудою співвідношенням:

$$I(y) = \frac{I^{\sigma}(\Delta\theta) + I^{\pi}(\Delta\theta) |\cos 2\theta_B|}{1 + |\cos 2\theta_B|},$$

$$I^{\sigma, \pi}(\Delta\theta) = \left| \frac{\chi_h}{\chi_{\bar{h}}} \right| |A^{\sigma, \pi}(\Delta\theta)|^2.$$

Для порівняння експериментальної і теоретичної КДВ, робиться згортка обчисленої теоретичної КДВ з апаратною функцією спектрометра.

Приклади кривих дифракційного відбивання, обчислених за допомогою кінематичної, динамічної та статистичної динамічної теорій для модельних профілів (рис.1), представлені на рис. 2, 3.

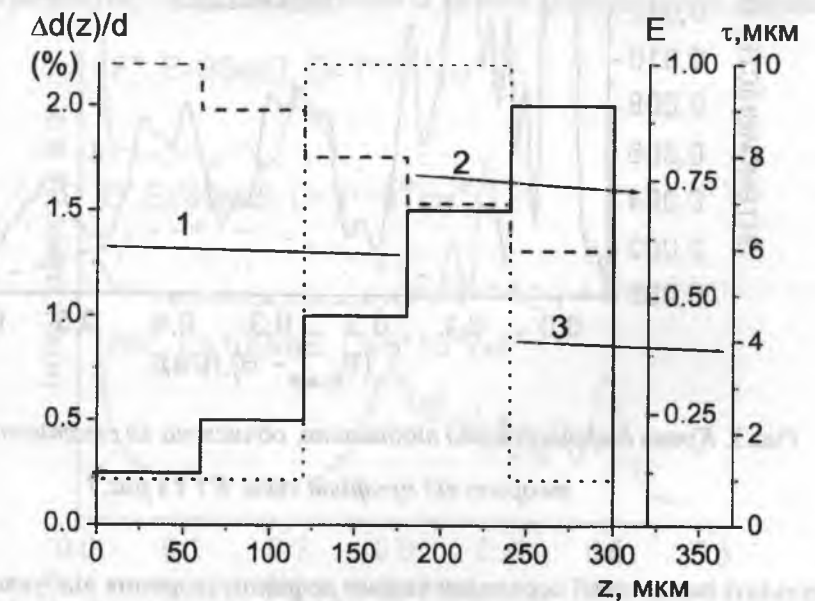


Рис.1. Профілі деформації $\Delta d/d(z)$ – 1, статичного фактора Дебая – Валлера $E(z)$ – 2 та кореляційної довжини Като $\tau(z)$ – 3

Методика обчислення профілів деформації при їх заданні функцією наперед визначеного типу. При імплантації середніми та легкими іонами (наприклад Ne^+ , F^+ , O^+ , N^+ , B^+) при невеликих дозах профіль деформації пропорційний профілю дефектів, який, у свою чергу, пропорційний профілю енергетичних втрат іона-імплантанта [4].

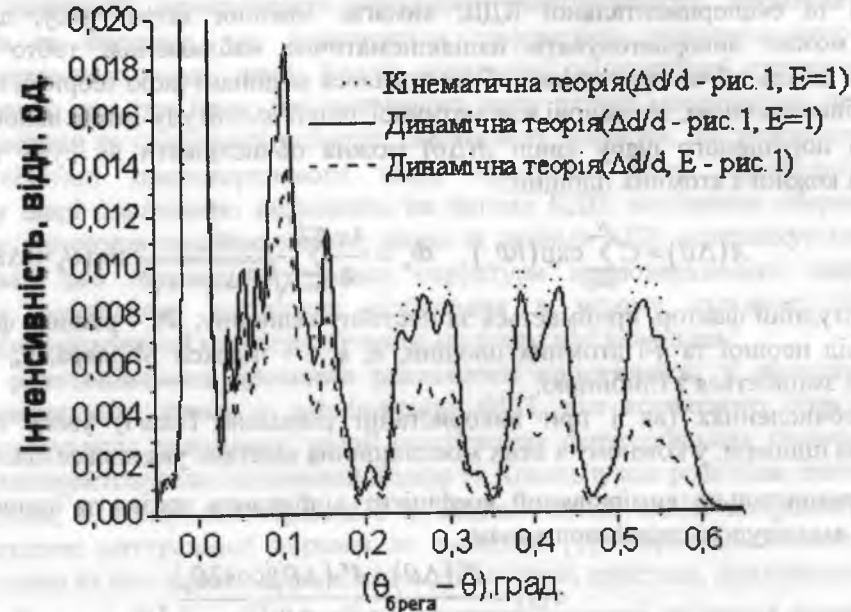


Рис.2. КДВ, обчислені за різними теоріями

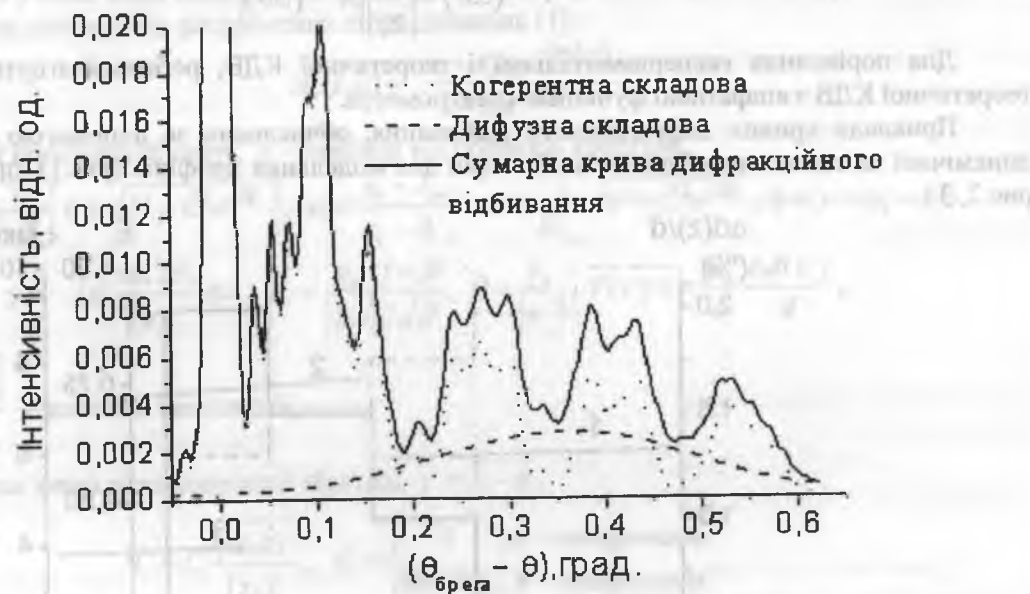


Рис.3. Крива дифракційного відбивання, обчислена за статистичною динамічною теорією від профілів $\Delta d/d$, E і τ з рис.1

У результаті імплантації середніми іонами дефектоутворення відбувається в основному за рахунок зіткнень іона-імплантанта чи вибитих іонів з ядрами мішені. Профіль дефектів у цьому випадку можна описати асиметричною гаусіаною, і, відповідно, профіль деформації також можна задавати у вигляді асиметричної гаусіани [4]:

$$D = \begin{cases} D_{\max} \exp[-(z - R_p)^2 / \sigma_1^2], & \text{якщо } z < R_p, \\ D_{\max} \exp[-(z - R_p)^2 / \sigma_2^2], & \text{якщо } z \geq R_p, \end{cases}$$

де $D = \frac{\Delta d}{d}$, z – відстань, яка відраховується від поверхні в глибину кристала, R_p – точка зшивки гаусіан, σ_1 і σ_2 – параметри гаусіан, які характеризують їх ширину на піввисоті.

При імплантації іонами B^+ у [5] показано, що профіль дефектів має дві складові: дефекти, які утворюються внаслідок зіткнень з ядрами мішені та дефекти, що є результатом збудження електронної підсистеми. Зважаючи на те, що при невеликих дозах профіль деформації пропорційний профілю дефектів, який можна описати сумою асиметричної та спадної гаусіан, профіль деформації також вибирався у вигляді суми асиметричної та спадної гаусіан [6]:

$$D = \begin{cases} D_{\max}^A \exp[-(z - R_p^A)^2 / \sigma_1^{A2}], & \text{якщо } z < R_p^A \\ D_{\max}^E \exp[-(z - R_p^E)^2 / \sigma_2^{E2}], & \text{якщо } z \geq R_p^A \end{cases} + D_{\max}^E e^{-z/R_p^E}$$

Перший доданок, асиметрична гаусіана, – складова профілю, пов'язана з ядерними втратами. Другий доданок – складова профілю, пов'язана з електронними втратами, які з глибиною монотонно спадають, тобто $R_p^E < 0$. Верхні індекси A і E означають, що вказані параметри характеризують складові профілю, пов'язані з ядерними та електронними енергетичними втратами відповідно.

Оцінка однозначності визначення профілів деформації при їх функціональному заданні. За результатами огляду публікацій (напр. [7, 8]), в яких аналізується проблема неоднозначності визначення профілів деформації, можна зробити висновок, що однією з головних причин указаної неоднозначності є змінність змінного по товщині порушеного шару ступеня аморфізації.

Для визначення, яким чином розсіяння рентгенівських променів на радіаційних дефектах впливає на інтенсивність додаткової осциляційної структури, яка несе інформацію про приповерхневий імплантований шар, було проведено зйомки на трикристальному дифрактометрі. Як виявилось, на трикристальній дифрактограмі, отриманій від іонно-опроміненого монокристала III (Ne^+ , 80 кеВ, $D = 3 \cdot 10^{13} - 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$), присутні тільки два піки – брегівський головний та псевдопик, які отримуються як згортка функцій монохроматора та досліджуваного кристала, тобто інтенсивного дифузного розсіювання в даній ділянці не спостерігається, що дозволяє не враховувати його при розрахунку профілів деформації за даними двокристальної дифрактометрії.

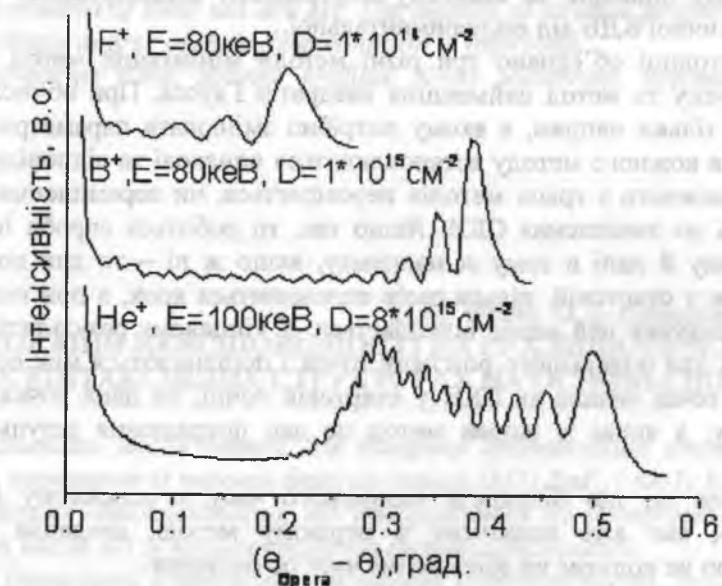


Рис.4. Фрагменти експериментальних КДВ від приповерхневого шару ФГП, імплантованих іонами He^+ , B^+ та F^+

Крім того, наявність дефектів, згідно зі статистичною динамічною теорією розсіяння рентгенівських променів [9], приводить до підняття лінії фону додаткової осциляційної структури. У зразках, імплантованих іонами B^+ , N^+ , Ne^+ , O^+ , F^+ , узказане підняття не спостерігається (рис.4), тому можна використовувати динамічну теорію у формі рівнянь Такагі [1] чи статистичну динамічну теорію при $\tau=0$, де τ – кореляційна довжина. На відміну від узказаних зразків, підняття лінії фону додаткової осциляційної структури спостерігалось в зразках, імплантованих іонами He^+ (рис.4).

У наших дослідженнях однозначність та точність обчислення профілів деформації при їх заданні у вигляді функції наперед визначеного типу оцінювалися за допомогою методики [10], суть якої полягає в тому, що потрібно розглядати всі локальні мінімуми функції середнього квадратичного відхилення (СКВ). Пошук узказаних мінімумів здійснюється перебором усіх можливих профілів на кожному параметрі функції, якою задається профіль, із подальшою їх перевіркою одним із градієнтних методів. Кожен виявлений таким чином мінімум функції СКВ визначає один з імовірних типів профілів, а конкретний тип профілю треба вибирати з фізичних міркувань, можливості “хорошого” наближення чи додаткового експерименту. Результати модельних обчислень показали, що при максимальних відносних деформаціях, більших 0,3% (для $CuK_{\alpha 1}$ випромінювання), кількість мінімумів функції СКВ, а отже, і ступінь неоднозначності у визначенні профілів деформації суттєво зменшуються.

З метою економії машинного часу перебір можна робити з використанням напівкінематичного наближення, а остаточне уточнення – за динамічною теорією. Кількість мінімумів, знайдених за кінематичною теорією, є більшою, ніж за динамічною, за рахунок того, що при зміні підшарів місцями результат не міняється, оскільки в даному методі розрахунку обчислюється звичайна сума амплітуд від кожного з підшарів. Коли фактор Дебая – Валлера не рівний нулю, його зміна за глибиною також описується деякою функцією, параметри якої також включаються в перебір.

Методика обчислення профілів деформації при їх нефункціональному заданні. Коли вигляд профілю деформації важко передбачити (за наявності значних ростових напруг чи імплантації важкими іонами, наприклад As^+), для обчислення профілів деформації використовувалася методика, яка не передбачає наперед визначеного функціонального задання профілю. Суть узказаної методики полягає в автоматизованій мінімізації нев’язки розрахованої КДВ з експериментальною [11]. Порушений шар розбивається на деяку кількість підшарів товщинами L_i , у кожному з яких відносна деформація D_i вважається сталою. Цілеспрямовано змінюючи товщину підшарів та відносну деформацію, мінімізувалося середнє квадратичне відхилення теоретичної КДВ від експериментальної.

У даній методиці об’єднано три різні методи мінімізації: метод конфігурацій, метод найшвидшого спуску та метод найменших квадратів Гаусса. При обчисленні кожним із них запам’ятовується тільки напрям, в якому потрібно змінювати параметри L_i та D_i , а довжини векторів зміни для кожного методу встановлюються однакові та відповідні до заданого кроку. Після цього для кожного з трьох методів перевіряється, чи переміщення точки на знайдений вектор приводить до зменшення СКВ. Якщо так, то робиться спроба покращити результат, переміщуючи точку й далі в тому ж напрямку, якщо ж ні – то для пошуку точки (L_i, D_i) з меншим СКВ, ніж у стартовій, кілька разів половиниться крок, а при недосягненні успіху на даному етапі розрахунку цей метод відкидається. У кінцевому результаті знаходяться три або менше придатних для подальшого розгляду точок і порівнюються між собою. Якщо значення СКВ у вибраній точці менше за СКВ у стартовій точці, то дана точка стає стартовою для наступного циклу, а якщо ж жоден метод не дав покращення результату, то обчислення припиняються.

Зважаючи на те, що більшість машинного часу в основному використовується на обчислення СКВ, яке вже визначене в першому методі, введення додаткових методів розрахунку суттєво не впливає на збільшення часу обчислення.

У конкретних випадках на вигляд профілів можна накладати певні умови (спадання, один максимум), що дозволяє мінімізувати неоднозначність, яка може виникати при обчисленні профілів деформації. Однозначність визначення таким чином профілів деформації можна оцінити, запускаючи програму, яка працює за даною методикою, з різних стартових профілів.

За результатами роботи можна зробити певні висновки.

Вибір теорії, за якою обчислюються параметри порушеного шару, залежить від форми лінії фону додаткової осциляційної структури. При обчисленні профілів величин, які характеризують порушений шар, потрібно розглядати всі локальні мінімуми функції СКВ, а подальший відбір здійснювати з фізичних міркувань, додаткового експерименту чи можливості “хорошого” наближення експериментальної КДВ теоретичною. Для економії часу пошук даних мінімумів можна здійснювати за кінематичною теорією, а уточнення проводити за динамічною.

1. Ковальчук М.В., Кон В.Г., Лобанович Э.Ф. Измерение малых деформаций в тонких эпитаксиальных пленках кремния методом фотоэлектронной эмиссии, возбужденной стоячей рентгеновской волной // ФТТ. – 1985. – Т.27. – №11. – С.3379–3387.
2. Кляо N. Statistical dynamical theory of crystal diffraction. 1. General formalism // Acta crystallogr. A. – 1980. – V.36. – №7. – P.763–769.
3. Бушуев В.А. Статистическая динамическая теория дифракции рентгеновских лучей в несовершенных кристаллах с учетом углового распределения интенсивностей // Кристаллография. – 1989. – Т.34. – Вып.2. – С.279–287.
4. Balestrino G., Lagomarsino S., Milani E., Gerard P., Tucciarone A. Reconstruction mechanism in ion implanted yttrium iron garnet films // J. Appl. Phys. – 1988. – V.63. – №8. – P.2751–2755.
5. Остафійчук Б.К., Федорів В.Д., Кошобинський В.О., Яремій І.П. Механізми дефектоутворення в монокристалічних оксидах залізо-ітрієвого гранату при іонній імплантації легкими іонами // Фізика і хімія твердого тіла. – 2003. – Т.4. – №1. – С.112–117.
6. Яремій І.П. Рентгенодифрактометричне дослідження приповерхневих шарів монокристалічних плівок ЗІГ, імплантованих іонами B^+ // Фізика і хімія твердого тіла. – 2003. – Т.4. – №3. – С.451–455.
7. Афанасьев А.М., Фанченко С.С. О восстановлении профилей нарушенной тонких приповерхностных слоев по рентгенодифракционным данным // Доклады Академии наук СССР. – 1986. – Т.287. – №6. – С.1395–1399.
8. Пушгов В.И. Динамическая теория дифракции рентгеновских лучей на непрерывно деформированных по толщине приповерхностных слоях монокристаллов с учетом статистики микродефектов // Поверхность. – 1991. – №3. – С.45–49.
9. Пушгов В.И. Длина корреляции в статистической теории рентгеновской дифракции на одномерно искаженных кристаллах с дефектами. Модель дискретно-слоистой структуры // Кристаллография. – 1996. – Т.41. – №1. – С.23–30.
10. Остафійчук Б.К., Яремій І.П., Кравець В.І. та ін. Про можливість однозначного визначення профілів відносної зміни об’ємної відстані в приповерхневих шарах монокристалів за даними двокристалічної рентгенівської дифрактометрії // Фізика і хімія твердого тіла. – 2002. – Т.3. – №1. – С.148–153.
11. Кравець В.І., Пилипів В.М. Моделювання профілів деформації поверхневих шарів монокристалів // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. Прикладна математика. – 2000. – №411. – С.192–196.

The comparative analysis of possibilities of parameters determination of the is conducted on the basis of different theoretical approaches (kinematic, dynamic and statistical dynamic theories of X-rays scattering). The criteria of their use are set. The method of strange profiles calculation and estimation of one-valuedness degree of their determination is improved.

Key words: ferrit-garnet films, strange profiles, X-ray scattering, kinematic and dynamic theories.

УДК 621.315.592

КЛК 22.371.26

Д.М. Фрейк, О.Л. Соколов, Ю.В. Кланічка ВПЛИВ ДИСЛОКАЦІЙ НЕВІДПОВІДНОСТІ НА РУХЛИВІСТЬ НОСІВ ЗАРЯДУ У ДВОШАРОВИХ ЕПІТАКСІЙНИХ СТРУКТУРАХ НА ОСНОВІ СПОЛУК $A^{IV}B^{VI}$

Розраховано рухливість носіїв заряду для бінарних епітаксієвих структур $PbTe/PbS$, $PbTe/PbSe$, $PbTe/EuTe$, вироцених із парової фази на сколах (111) BaF_2 і (001) KCl , у присутності розсіювання на дислокаціях невідповідності, що утворюються на гетеромежах. Досліджено залежність рухливості носіїв від їх концентрації та густини дислокацій.

Ключові слова: двошарова структура, дислокації невідповідності, просторовий заряд, розсіювання носіїв.

Вступ. Епітаксієні плівки на основі сполук $A^{IV}B^{VI}$ інтенсивно вивчаються з можливістю їх використання в приладових структурах, що функціонують в інфрачервоній ділянці оптичного спектра [1, 2]. Зауважимо, що параметри тонкопліткових активних елементів у

значній мірі визначаються домінуючими механізмами розсіювання [3–5]. Одним із важливих є розсіювання носіїв заряду на дислокаціях невідповідності [6]. У роботі проаналізовано вплив дислокацій невідповідності на рухливість носіїв заряду у двошарових структурах на основі епітаксійних плівок сполук $A^{IV}B^{VI}$, осаджених із парової фази.

I. Геометрична модель дислокацій невідповідності

Як відомо [4, 6], дислокації невідповідності (ДН) утворюються на міжфазній межі “плівка–плівка” чи “плівка–підкладка” за рахунок різних значень параметра ґраток. Експериментальне підтвердження дислокацій невідповідності, які виникають на гетеромежі двошарової структури PbTe/PbSe, показано на рис.1а, б [7].

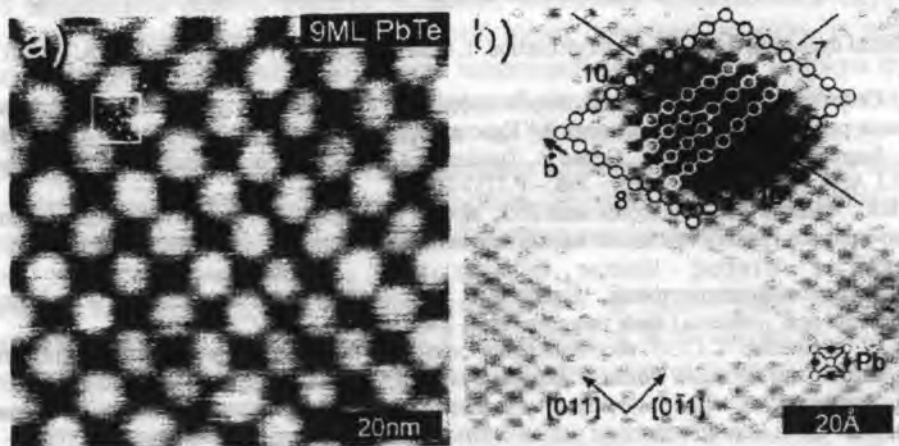


Рис.1. Дислокації невідповідності, отримані за допомогою скануючого тунельного мікроскопа для двошарової структури PbTe/PbSe з орієнтацією кристалографічних площин у напрямку (100): а – дислокації невідповідності на гетеромежі плівок; б – опис дислокації невідповідності за допомогою вектора Бюргерса, рівного $\vec{b} = a/2 \langle 011 \rangle$, дислокації, сформовані в напрямку $\langle 0\bar{1}1 \rangle$ [7]



Рис.2. Геометричне представлення дислокації невідповідності на гетеромежі двох епітаксійних плівок

Густину дислокацій можна розрахувати з геометричних міркувань згідно зі схемою, представленою на рис.2. Для крайової дислокації характерне “ноніусне” розташування атомних площин: зверху n атомних площин, знизу на тому самому відрізку довжини L (n-1) площин. Знаючи параметри ґраток плівок a_1 і a_2 , можна знайти відстань L, на якій утворюється одна дислокація невідповідності:

$$L = na_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_1} \quad (1)$$

Формула (1) справедлива при орієнтації площин у напрямку (100) для структури NaCl, в якій кристалізуються досліджувані сполуки. Тут періоди шарів на межі плівок рівні сталим ґраткам цих епітаксійних структур. При орієнтації площин у напрямку (111) періоди шарів відповідно будуть становити $\sqrt{2}a_1$, $\sqrt{2}a_2$. Тоді вираз (1) набуде вигляду:

$$L = na_2 = \frac{\sqrt{2}a_2a_1}{a_2 - a_1} \quad (2)$$

Знаючи відстань, на яку припадає одна дислокація невідповідності, можна розрахувати, скільки дислокацій міститься на одиницю довжини і на одиницю площі відповідно:

$$N_l = \frac{1}{L}, \quad N_s = \frac{1}{L^2} \quad (3)$$

Розраховані значення лінійної та поверхневої густин дислокацій невідповідності для двошарових структур із різною кристалографічною орієнтацією площин подано в таблиці.

II. Дислокації невідповідності та розсіювання носіїв

Межі у двофазних епітаксійних структурах можна розглядати як заряджені включення – деякі мікроділянки електростатичного поля, які призводять до зменшення рухливості носіїв

Таблиця

Значення сталих ґраток (a), відстані, на якій утворюється одна дислокація (L), лінійної (N_l) та поверхневої (N_s) густин дислокацій для епітаксійних двошарових структур на основі сполук $A^{IV}B^{VI}$ із різною кристалографічною орієнтацією

№ п/п	Сполука	Стала ґратки, a, Å	L, Å	Лінійна густина, N_l , см ⁻¹	Поверхнева густина, N_s , см ⁻²
1	PbTe/PbS (111)	$a_{PbTe} = 6,452$ $a_{PbS} = 5,935$	104,02	$9,6 \cdot 10^5$	$9,0 \cdot 10^{11}$
2	PbTe/PbS (001)	$a_{PbTe} = 6,452$ $a_{PbS} = 5,935$	73,55	$1,4 \cdot 10^6$	$1,8 \cdot 10^{12}$
3	PbTe/PbSe (111)	$a_{PbTe} = 6,452$ $a_{PbSe} = 6,122$	170,25	$5,9 \cdot 10^5$	$3,4 \cdot 10^{11}$
4	PbTe/PbSe (001)	$a_{PbTe} = 6,452$ $a_{PbSe} = 6,122$	120,38	$8,3 \cdot 10^5$	$6,8 \cdot 10^{11}$
5	PbTe/EuTe (111)	$a_{PbTe} = 6,452$ $a_{EuTe} = 6,583$	461,69	$2,2 \cdot 10^5$	$4,6 \cdot 10^{10}$
6	PbTe/EuTe (001)	$a_{PbTe} = 6,452$ $a_{EuTe} = 6,583$	326,46	$3,1 \cdot 10^5$	$9,3 \cdot 10^{10}$

заряду. Так, зосереджена дислокація в кристалі n-типу є не що інше, як лінійний негативний заряд, навколо якого скупчений позитивний і вже об’ємний заряд. Носій заряду – електрон, який рухається в електростатичному полі дислокації, зазнає розсіювання [8]. Якщо носії заряду рухаються паралельно до дислокацій, то вони будуть захоплюватися акцепторними рівнями, і провідність цих носіїв здійснюється через об’єм дислокацій. При русі носіїв перпендикулярно до лінійних дефектів вони будуть розсіюватись циліндрами просторового заряду. Тому необхідно врахувати їхній вплив на транспорт носіїв. За умови, що дислокації невідповідності формують двовимірну сітку циліндрів (рис.3, а, б), провідність носіїв заряду вздовж ліній дислокацій рівна провідності, яка перпендикулярна до циліндра просторового заряду, і присутній випадковий розподіл дислокацій невідповідності, рухливість носіїв буде визначатись

густиною дислокацій, відношенням концентрації носіїв в об'ємі структури до концентрації всередині циліндра просторового заряду [6]. Згідно з роботою [6], розглянемо два випадки розподілу дислокацій: незначна густина дислокацій (рис.3, а), велика густина дислокацій (рис.3, б). За умови, що кількісну характеристику густини дислокацій описує величина

$$\gamma = l_1/l_0, \quad (4)$$

відношення площі поверхні дислокацій до площі поверхні гетеромежі буде визначатися так:

$$\varepsilon = (1+\gamma)^2. \quad (5)$$

При $\gamma \ll 1$ і $1/2 \leq \varepsilon < 1$ (рис.3, а) врахуємо паралельні дислокації та смужку, яка складається з острівків об'ємного матеріалу та перпендикулярних дислокацій у напрямку х. Коли $\gamma > 1$ і $\varepsilon \gg 1$ (рис.3, б), використаємо величину квадрата зі стороною $(l_0 + l_1)$, який складається з однієї об'ємної комірки й половини ширини дислокації на кожному боці. Замінюючи квадратний профіль кругами рівної площі й беручи до уваги те, що взаємодії між блоками немає, можна використати підхід для непровідних ділянок [6].



Рис.3. Геометрична модель дислокацій невідповідності: а – для малої площі зарядженого просторового циліндра дислокацій; б – площа дислокацій є великою. l_1 – ширина області просторового заряду дислокацій, l_0 – міждислокаційна відстань [6]

III. Розрахунок рухливості носіїв

Для розрахунку рухливості носіїв заряду використаємо три набори величин: n_1, μ_1, σ_1 – значення в об'ємі дислокаційних циліндрів; n_0, μ_0, σ_0 – в об'ємі плівки; $\bar{n}, \bar{\mu}, \bar{\sigma}$ – середні значення по цілому зразку. Тоді відносна рухливість, що визначає вплив дислокацій, буде:

$$\beta = \mu_1/\mu_0, \quad (6)$$

де μ – рухливість носіїв, n – концентрація носіїв, σ – питома електропровідність відповідно.

Якщо $\beta \ll 1$, тоді середнє значення концентрації носіїв заряду, тобто кількість вільних та захоплених носіїв, можна представити виразом:

$$\bar{n} = [n_0 + \gamma(2+\gamma)n_1]/(1+\gamma)^2, \quad (7a)$$

або

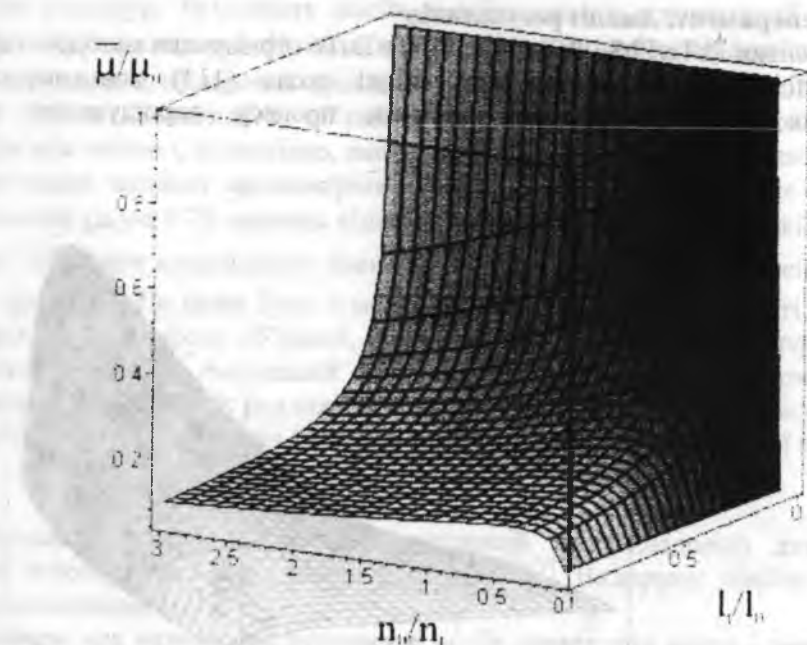


Рис.4. Залежність відносної рухливості $\bar{\mu}/\mu_0$ плівки PbTe/EuTe від значень відносних концентрацій n_1/n_0 та густини дислокацій γ ($0 < \gamma < 1$) – мала густина дислокацій

$$\bar{n} = \varepsilon n_0 + (1-\varepsilon)n_1. \quad (7b)$$

При малій величині γ середня провідність дається:

$$\bar{\sigma} = (l_0 + l_1)^{-1} (l_0 \sigma_0 + l_1 \sigma_1). \quad (8a)$$

Провідність в об'ємі матеріалу можна записати так:

$$\sigma_0 = (l_0 + l_1) \sigma_0 \sigma_1 / (l_0 \sigma_1 + l_1 \sigma_0). \quad (9)$$

Маючи на увазі (8a) і (9), відношення середнього значення рухливості носіїв до об'ємної рухливості в плівці можна подати виразом

$$\bar{\mu}/\mu_0 = \bar{\sigma} n_0 / \sigma_0 \bar{n}. \quad (10)$$

Виконавши математичні перетворення та використавши попередні рівняння (4), (6), (7a), (7b), отримаємо співвідношення для обчислення відносної рухливості при малих значеннях γ (випадок а):

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_0} = \left[\frac{1}{\beta(n_1/n_0) + \gamma} + \frac{\gamma}{1+\gamma} \right] \left[\frac{(1+\gamma)^2 \beta}{(n_0/n_1) + \gamma(2+\gamma)} \right]. \quad (11a)$$

На основі рівнянь (6), (7b), (10) відносна рухливість для великої густини дислокацій невідповідності ($\gamma > 1$) буде:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_0} = \beta \left\{ 1 - \varepsilon \left[\frac{\beta - (n_0/n_1)}{\beta + (\beta + (n_0/n_1))} \right] \right\}^{-1} \left[1 - \varepsilon \left(1 - \frac{n_0}{n_1} \right) \right]^{-1} \quad (11b)$$

IV. Експеримент. Аналіз результатів

Тонкі плівки PbTe/PbS, PbTe/PbSe, PbTe/EuTe отримували методом гарячої стінки згідно з [9]. Як підкладки використовували свіжі сколи (111) монокристалів BaF₂ і (001) монокристалів KCl. Температурні режими процесу вирощування такі: температура

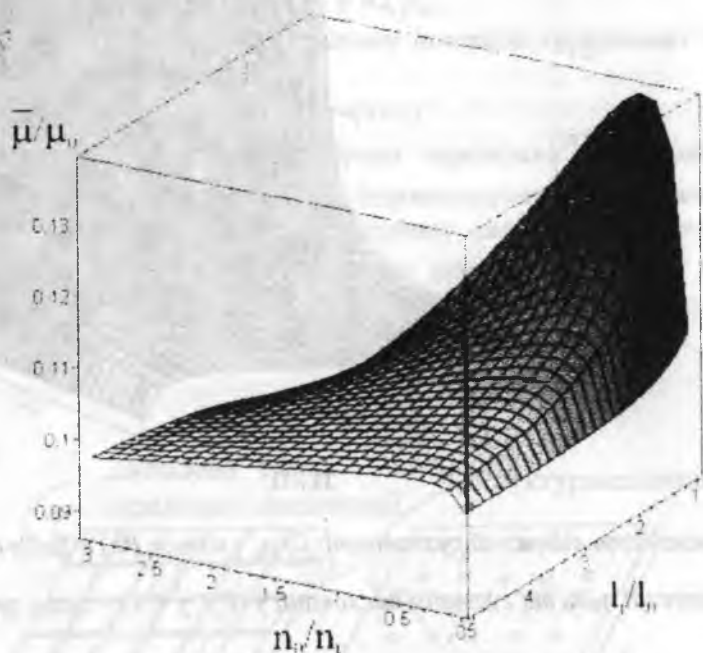


Рис.5. Залежність відносної рухливості $\bar{\mu}/\mu_0$ плівок PbTe/PbS і PbTe/PbSe від відносних значень концентрації n_0/n_1 та густини дислокації γ ($1 < \gamma < 5$) – велика густина дислокацій

вирощування – $T_c = 820$ К; температура стінок камери – $T_w = 850$ К; температура підкладки – $T_s = (420 - 700)$ К. Швидкість росту плівок складала $1 - 3$ нмс⁻¹, а їх товщина – $0,1 - 2,0$ мкм. Сандвіч структури вирощували по черговим осадженням телуриду свинцю на попередньо нанесений підшар PbS, PbSe, EuTe відповідно.

Структура плівок досліджувалася методами електроннографії та рентгенографії. Установлено, що плівки являють собою епітаксійні структури із збереженням паралельної орієнтації відносно площин сколу монокристалічних підкладок.

Маючи на увазі те, що просторовий заряд циліндричної дислокації згідно з [10] складає в середньому біля 200 \AA , і використовуючи розраховані дані (таблиця), величина γ (4) для двошарових структур PbTe/PbS, PbTe/PbSe є більшою за одиницю ($\gamma > 1$), що відповідає випадку на рис.3, б, тобто великій густині дислокацій. Для структури PbTe/EuTe величина γ (4) є меншою за одиницю, що відповідає малій густині дислокацій (рис.3, а). Це зрозуміло,

оскільки в першому випадку відносна зміна постійної ґратки $\delta = \frac{|a_2 - a_1|}{a_1}$ складає значну

величину ($\delta = 8,6\%$ для PbTe/PbS; $\delta = 5,3\%$ для PbTe/PbSe), а в другому, для гетеросистеми PbTe/EuTe, – тільки $\delta = 1,5\%$. Це дає підставу стверджувати, що вирази (11а) повинні описувати залежності рухливості для гетеросистеми PbTe/EuTe (рис.4), а (11б) для PbTe/PbS і PbTe/PbSe (рис.5) відповідно.

Аналіз одержаних співвідношень (11,а) та (11,б), а також їх просторових діаграм (рис.4 і рис.5) однозначно вказує на зменшення величини рухливості носіїв заряду зі збільшенням густини дислокацій: $\bar{\mu}/\mu_0$ спадає зі зростанням γ . Останнє зумовлене збільшенням внеску розсіювання на дислокаціях невідповідності. При $\gamma = 0$ рухливість в об'ємі плівок і на гетеромежі збігається ($\bar{\mu}/\mu_0 = 1$) (рис.4), що відповідає відсутності дислокацій невідповідності. Зауважимо, що це можливо тільки при ідеальному збігові значень параметрів ґраток

гетероепітаксійних структур. Рухливість носіїв зі збільшенням концентрації вільних носіїв (n_0/n_1 – зростає) зменшується (рис.4, 5), що є характерним для напівпровідників узагалі [11]. У нашому випадку за рахунок обмеженої провідності непровідної дислокаційної ділянки вільні носії переважно будуть міститися в об'ємі гетероструктури. Це й зумовлює зростання розсіювання носіїв між собою і, відповідно, зменшення спостережуваної рухливості.

Установлені вище загальні закономірності мають деякі відхилення для ділянки малих ($n_0/n_1 < 0,5$) і великих ($n_0/n_1 > 2$) значень відносної концентрації вільних носіїв (рис.4, 5). У першому випадку $\bar{\mu}/\mu_0$ при подальшому зменшенні концентрації вільних носіїв в об'ємі (n_0) починає спадати (рис.4, 5). Це може бути зумовлене переважанням провідності на заряджених дислокаційних циліндрах відносно об'ємної, що є причиною зменшення величини рухливості та більш ефективного впливу дислокацій невідповідності на механізми розсіювання. При великих же концентраціях носіїв їх рухливість стає нечутливою до густини дислокацій, і тому рухливість має тенденцію до насичення (рис.5) внаслідок переважання об'ємної провідності.

Висновки

1. Проаналізовано геометричні моделі дислокацій невідповідності для двошарових гетероструктур на основі епітаксійних плівок сполук $A^{IV}B^{VI}$. Визначено лінійні та поверхневі густини крайових дислокацій.

2. Подано вирази для визначення рухливості носіїв заряду при малих і значних густинах дислокацій невідповідностей.

3. Побудовані просторові діаграми залежності рухливості носіїв заряду від концентрації вільних носіїв і величини, що характеризує густину дислокацій.

4. Установлено, що із збільшенням як густини дислокацій, так і концентрації вільних носіїв величина рухливості гетероструктур має чітко виражену тенденцію до зменшення.

- Сизов Ф.Ф. Твёрдые растворы халькогенидов свинца и олова и фотоприёмники на их основе // Зарубежная электронная техника. – 1977. – Т.24. – С.31–48.
- Holloway H. Thin Films IV–VI semiconductor photodiodes // Physics thin films, New York. – 1980. – V.11. – P.105–203.
- Vaya P.R., Majht J., Gopalam B.S.V., Dattatrepan C. Thickness Dependence of Hall Mobility of HWE Grown PbTe Films // Phys. Stat. Sol. (a). – 1985. – V.87. – N.341. – P.341–350.
- Александрова О.А., Бондоков Р.Ц., Саунин Н.В., Таиров Ю.М. Подвижность носителей заряда в двухслойных структурах PbTe/PbS // Физика и техника полупроводников. – 1998. – Т.32. – №9. – С.1064–1068.
- Фреїк Д.М., Пасічняк В.Ф., Соколов О.Л., Дзундза Б.С. Особливості розсіювання носіїв заряду в епітаксійних структурах на основі халькогенідів свинцю // Фізика і хімія твердого тіла. – 2004. – Т.5. – №3. – С.455–459.
- Neumark G.F. Theory of the Influence of Misfit Dislocations on Interfacial Mobility and Hall Effect // Phys. Rev. (b). – 1970. – V.1. – N.6. – P.2613–2622.
- Wiesauer K., Springholz G. Nano-Scale Dislocation Patterning in PbTe on PbSe (100) Heteroepitaxy Studied by Scanning Tunneling Microscopy // Proceedings GMe Forum 2001. – 2001. – P.209–212.
- Матаре Г. Електроніка дефектів в напівпровідниках. – М.: Мир, 1974.
- Фреїк Д.М., Галушак М.А., Межиловская Л.И. Фізика і технологія напівпровідникових плівок. – Львів: Вища школа, 1988. – 152 с.
- Фреїк Д.М., Соколов О.Л., Матеїк Г.Д. Розсіювання носіїв заряду в двошаровій гетероструктурі n-PbTe/p-PbS // Фізика і хімія твердого тіла. – 2004. – Т.5. – №4. – С.709–715.
- Шалимова К.В. Фізика напівпровідників. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 392 с.

It is calculated of the charge carrier mobility for the binary epitaxial structures, PbTe/PbS, PbTe/Se, PbTe/EuTe grown from the vapour phase on (111) BaF₂ and (001) KCl on the approximation that there is carrier scattering on dislocations that were generated by interface. The dependence of mobility carrier from the concentration and density are obtained.

Key words: binary structures, misfit dislocations, the space charge, carrier scattering.

УДК 621.315.592+546.815.24
ББК 22.379.2Я.П. Салій, Л.Й. Межиловська, В.М. Чобанюк, І.М. Фрейс
ВЛАСНІ РАДІАЦІЙНІ ДЕФЕКТИ
ТА ЕЛЕКТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЛІВОК $A^{IV}B^{VI}$

Узагальнюються й аналізуються роботи, в яких досліджено дефекти, зумовлені опроміненням матеріалів кубічної модифікації на основі халькогенідів свинцю й олова. Виконано розрахунки впливу власних атомних дефектів – вакансій, міжвузловинних атомів, пар Френкеля – на зміну концентрації заряду. На основі порівняння експериментальних результатів із даними розрахунків зроблено висновок про переважаючий вид дефектів у плівках $A^{IV}B^{VI}$ при опроміненні високоенергетичними альфа-частинками.

Ключові слова: дефекти, альфа-частинки, халькогеніди свинцю й олова.

Вступ. Радіаційне опромінення є одним з ефективних методів керування характеристиками напівпровідникових матеріалів [1]. Останнім часом одержано дані з опромінення швидкими електронами [2, 3], протонами [4], альфа-частинками [5, 6], іонами різних атомів [7, 8], гамма-квантами [9] і лазером [10] кристалів і плівок $A^{IV}B^{VI}$.

У разі опромінення при кімнатних температурах монокристалів концентрація вільних електронів у них при $0 < x < 0,06$ унаслідок опромінення збільшується [2], а при $x = 0,125$ зменшується [3]. В останньому випадку при потоці опромінення $8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ концентрація електронів у зоні провідності анулюється й відбувається фазовий перехід типу метал-діелектрик. Одержані результати пояснюють появою під впливом опромінення енергетичного рівня, локалізованого в зоні провідності, і гіпотетично пов'язують із вакансіями селену.

Опромінення твердих розчинів p-PbSnTe електронами та протонами приводить до зменшення концентрації дірок із ростом дози опромінення, але не викликає інверсії типу провідності [3, 4]. Одержані результати пояснюються генерацією донорних дефектів при опроміненні й появою зони резонансних станів поблизу вершини валентної зони.

Опромінення альфа-частинками PbSe показало, що при такій обробці має місце звичайна для первинних дефектів залежність концентрації носіїв від потоку опромінення [4–5]. Одержані результати пояснюються утворенням у плівках френкелівських пар.

Імплантація PbTe цинком приводить до появи в забороненій зоні локального рівня, який пов'язує із комплексами, що включають у себе як вакансії свинцю, так і вакансії телуру [7].

У роботах [3, 11] результати радіаційного опромінення $A^{IV}B^{VI}$ пояснюються утворенням пар Френкеля в підґратках металу й халькогену.

Мета пропонованого дослідження – уточнення виду дефектів у плівках SnTe, PbTe і PbSe при альфа-опроміненні.

Моделювання дефектів

Виходячи з аналізу даних літератури, слід стверджувати, що спектр радіаційних дефектів у сполуках на основі халькогенідів олова й свинцю досить широкий: від вакансій у підґратках металу V_M^{2-} чи халькогену V_X^{2+} міжвузловинних атомів до пар Френкеля в обох підґратках $M_i^+ - V_M^{2-}$, $X_i^0 - V_X^{2+}$. Тут M_i^+ і V_X^{2+} – одно- й двозарядні донори, V_M^{2-} – двозарядний акцептор, X_i^0 – нейтральні дефекти.

При утворенні однакової кількості пар Френкеля в обох підґратках зміна концентрації носіїв заряду визначатиметься співвідношенням

$$\Delta n = 2[V_X^{2+}] - 2[V_M^{2-}] + 0[X_i^0] + 1[M_i^+].$$

З графіків залежності концентрації носіїв заряду ($n = n_0 + \Delta n$, де n_0 – початкова концентрація носіїв до опромінення) від концентрації радіаційних дефектів ($N_D = [V_X^{2+}] + [V_M^{2-}] + [X_i^0] + [M_i^+]$) (рис. 1) видно, що в матеріалі n-типу маємо збільшення концентрації електронів, а p-типу – зменшення концентрації дірок та інверсію знака провідності. Розрахункові залежності зміни концентрації носіїв заряду в матеріалі p- і n-типу при утворенні одиночних атомних дефектів – міжвузловинних атомів M_i^+ і вакансій – показані на рис. 2. Видно, що концентрації дефектів донорного типу $[M_i^+]$ чи $[V_X^{2+}]$ ведуть до

збільшення концентрації носіїв у матеріалі n-типу (рис. 2, а – криві 1, 2), а в p-типу – до зменшення концентрації дірок та інверсії типу провідності (рис. 2, б – криві 1, 2). Акцепторні ж дефекти V_M^{2-} у матеріалі n-типу зумовлюють зменшення концентрації електронів та інверсію типу провідності (рис. 2, а – криві 3), а в p-типу – збільшення концентрації дірок (рис. 2, б – крива 3).

Експеримент

З метою перевірки результатів розрахунків досліджувались епітаксійні шари PbSe, PbTe і SnTe, вирощені методом гарячої стінки на монокристалічних підкладках (111) BaF₂ [5]. Швидкість росту зразків складала ~ 3 нм/с, а їх товщина – 6 мкм. При вирощуванні витримували такі температурні режими: температура підкладок $T_n = 420 - 620 \text{ K}$, стінок – $T_c = 850 - 870 \text{ K}$, випарника – $T_b = 820 - 840 \text{ K}$. Зразки опромінювались у вакуумі потоком альфа-частинок з енергією ~ 5 MeV від радіонуклідних джерел Pu²³⁸ на карусельній установці при кімнатній температурі. Густина потоку частинок складала $5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$, а дози опромінення доводилися до значень $4,3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$. Електричні параметри вимірювались у постійних електричних і магнітних полях компенсаційним методом як до, так і після відповідної дози опромінення.

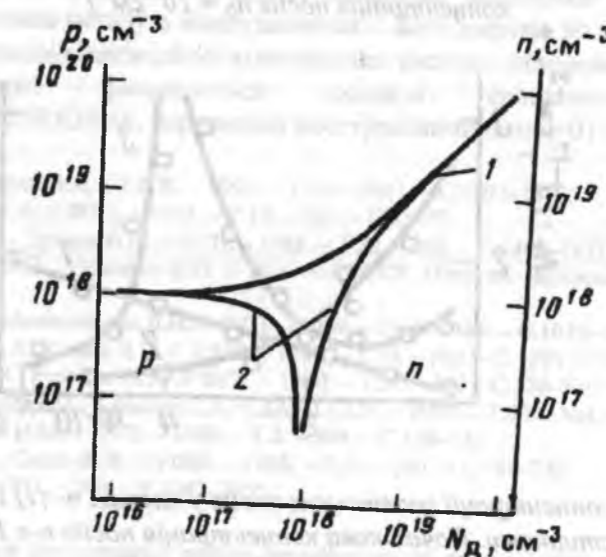


Рис. 1. Залежність розрахункової концентрації носіїв заряду в сполуках $A^{IV}B^{VI}$ n- (1) і p-типу (2) провідності від концентрації френкелівських дефектів у катіонній та аніонній підґратках (початкова концентрація носіїв $n_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3}$)

На рис. 3 подані експериментальні результати зміни концентрації носіїв заряду епітаксійних шарів PbSe з різною початковою провідністю, а на рис. 4 – p-PbTe і p-SnTe від дози опромінення альфа-частинками. Видно, що із збільшенням дози опромінення до $6 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$ концентрація електронів у n-PbSe збільшується на $0,8 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ (рис. 3 – крива 2). У деяких випадках при цьому спостерігається інверсія типу провідності з p- на n-тип (рис. 3 – крива 3).

Концентрація основних носіїв у плівках n-PbTe зі збільшенням дози опромінення зростає (рис. 4 – крива 1), а в плівках p-SnTe така залежність має складний характер.

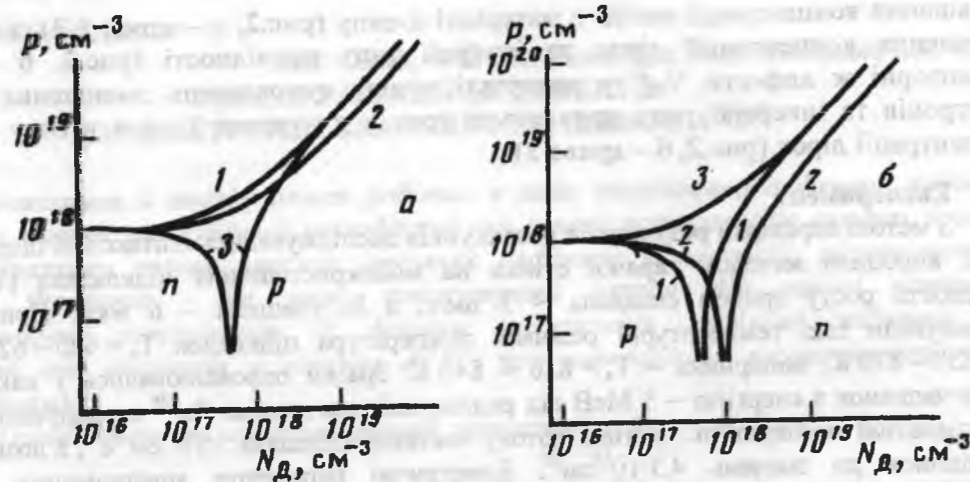


Рис.2. Залежність розрахункової концентрації носіїв заряду в сполуках $A^{IV}B^{VI}$ n- (а) і р-типу (б) від концентрації атомних дефектів: 1 – $[V_X^{2+}]$; 2 – $[M_i^-]$; 3 – $[V_M^{2+}]$ (початкова концентрація носіїв $n_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3}$)

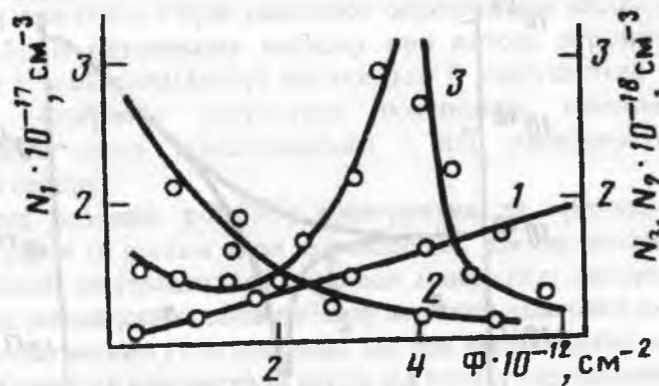


Рис.3. Залежність концентрації холлівських носіїв у плівках n- (1) і p-PbSe (2, 3) від дози опромінення альфа-частинками. Початкова концентрація носіїв n-в 10^{19} см^{-3} : 1 – 0,11; 2 – 2,7; 3 – 1,3

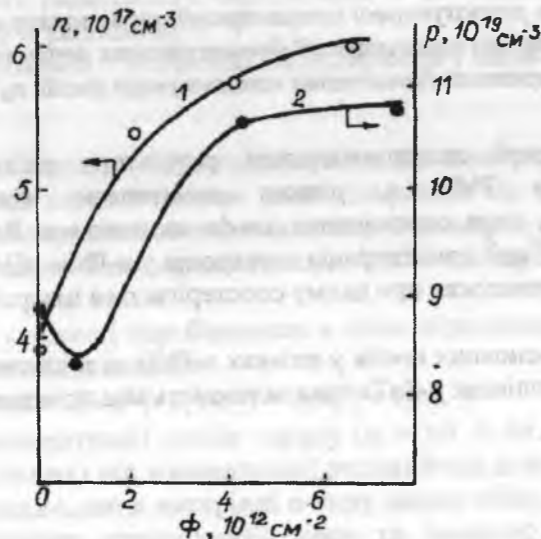


Рис.4. Залежність концентрації холлівських носіїв у плівках n-PbSe (1) і p-SnTe (2) від дози опромінення альфа-частинками

Обговорення результатів

Порівнюючи експериментальні результати дозових залежностей концентрації носіїв (рис.3, 4) із даними розрахунків (рис.1, 2), можна стверджувати, що переважаючими дефектами при радіаційному опроміненні альфа-частинками плівок можуть бути: міжвузловинні атоми металу Pb_i^+ ; вакансії халькогену V_X^{2+} ; пари Френкеля в обох підгратках. Виділені види дефектів і зумовлюють спостережувані на експерименті результати – донорну дію (рис.3, 4). При цьому найбільш ефективним донорним дефектом є вакансії в підгратці халькогену V_X^{2+} . Це видно з розрахункових кривих (рис.1 – крива 2 і рис.2, б – криві 1,2) з інтервалу інверсії знака провідності для матеріалу р-типу. При переважанні дефектів M_i^+ або пар Френкеля інверсія має місце при концентраціях дефектів 10^{19} см^{-3} (рис.1 – крива 2, рис.2, б – крива 2). Якщо ж переважають вакансії в підгратці халькогену V_X^{2+} , то зміна провідності з р-типу на n-тип настає вже при $\sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$ (рис.2 – крива 1). Слід зауважити, що проведені розрахунки й експериментальні дослідження не дають конкретної відповіді про переважаючий вид дефектів у плівках $A^{IV}B^{VI}$ при альфа-опроміненні. Але зменшення постійної ґратки плівок при збільшенні дози опромінення пояснюються лише моделлю пар Френкеля або ж вакансійним механізмом утворення радіаційних дефектів.

Якщо ж усе-таки припустити, що при радіаційному опроміненні утворюються тільки пари Френкеля, як стверджують автори [3, 6, 9], тоді концентрація міжвузловинного металу M_i^+ і після опромінення повинна зменшуватися. Одним із можливих механізмів зменшення концентрації радіаційно утворених атомів металу в міжвузловинах є його дифузія до границь зерен, а також до поверхні плівок із подальшою взаємодією: атмосферним киснем і утворенням оксидів.

Робота частково фінансується фондом фундаментальних досліджень МОН України, проект №10.02/030, державний реєстраційний номер 01050007494.

1. Заячук Д.М., Шендеровський В.А. // УФЖ. – 1991. – Т.36. – №11. – С.1692–1713.
2. Зломанов В.П., Ладьгин Е.А. // ФТП. – 1985. – Т.19. – №1. – С.53–57.
3. Брандт Н.Б., Доропей В.Н., Дубков В.П. // ФТП. – 1988. – Т.22. – №8. – С.1469–1473.
4. Скипетров Е.П., Дубков В.П., Зломанов В.П. // Изд. АН СССР. Неорганические материалы. – 1989. – Т.25. – №25. – С.737–740.
5. Фрейк Д.М., Салий Я.П., Межиловская Л.И. // ФТП. – 1989. – Т.23. – №6. – С.1015–1018.
6. Фрейк Д.М., Школьный А.К., Салий Я.П. // УФЖ. – 1989. – Т.34. – №9. – С.1391–1394.
7. Вейс А.Н., Дашевский З.М., Руленко М.П. // ФТП. – 1990. – Т.24. – №9. – С.126–130.
8. Лидоронко Н.С., Дашевский З.М., Казьмин С.А. // ДАН СССР. – 1989. – Т.30. – №4. – С.844–847.
9. Атакулов Ш.Б., Коканбаев И.М. // ФТП. – 1986. – Т.2. – №4. – С.180–152.
10. Дарчук С.Д., Пляцко С.В., Сизов Ф.Ф. // УФЖ. – 1988. – Т.33. – №1. – С.744–748.
11. Parada N.I. // Phys. Rev. – 1971. – №6. – P.2042–2055.

The works in which the created under irradiation of cube modification materials based on chalcogenides of Pb and Sn were investigated are being generalized and analyzed in this paper.

The calculations for clearing up the influence of own atomic defects – vacancies, interstitial atoms and Frenkel upon the change of concentration of charge carriers have been made. On the grounds of comparing experimental results and calculations data the conclusion on the prevalent type of defects in $A^{IV}B^{VI}$ films after high-energy alpha-particles treatment has been made also.

Key words: defects, alpha-particles, chalcogenides of Pb and Sn.

УДК 621.315,592:535
ББК 22.379.2

В.В. Проконів, І.В. Горічок, У.М. Писклинець
ДОМІНУЮЧІ ТОЧКОВІ ДЕФЕКТИ В НЕЛЕГОВАНОМУ CdTe

Використовуючи метод, що базується на мінімізації термодинамічного потенціалу кристала як функції концентрації дефектів, розраховано залежність рівноважної концентрації точкових дефектів та вільних носіїв заряду в CdTe від температури відгалу T та тиску пари кадмію P_{Cd} . Теоретично розраховані концентрації носіїв струму задовільно узгоджуються з експериментальними даними в широкому інтервалі тисків пари кадмію P_{Cd} та температури відгалу T.

Ключові слова: термодинамічний потенціал, точкові дефекти, кадмію телурид.

Вступ. Кадмію телурид – широкозонний напівпровідник групи A^2B^6 , який може бути використаний як детектор іонізуючого випромінювання, пасивний та активний елемент нелінійної оптики та оптоелектроніки, як підкладка для $Cd_xZn_{1-x}Te$ та $Cd_xHg_{1-x}Te$. Для створення матеріалу з потрібними та відтворюваними властивостями необхідно контролювати структуру точкових дефектів у кристалах CdTe у процесі їх вирощування й обробки, оскільки саме вони визначають основні його електричні параметри.

У насиченому телуром матеріалі домінуючим дефектом є однозарядна вакансія кадмію [1]. Для кристалів CdTe, що пройшли відпал у парі кадмію, переважаючим дефектом у різних роботах уважається або двократно йонізована вакансія телуру, або двократно йонізований міжвузловий атом кадмію. У роботі [2] автори роблять висновок про те, що домінуючим власним точковим дефектом у нелегованому CdTe: Cd при $T > 870$ К є Cd_i^{2+} . Вплив вакансій телуру V_{Te}^{2+} на концентрацію вільних носіїв заряду можна прогнозувати, на їхню думку, лише при $T < 870$ К.

Мета даної роботи – визначити рівноважну концентрацію точкових дефектів і вільних носіїв заряду в залежності від температури відпалу та парціального тиску пари кадмію.

У більшості робіт при обчисленні рівноважної концентрації дефектів застосовується метод квазіхімічних реакцій. Суть методу полягає в описі процесів дефектоутворення, у формі хімічних реакцій і використанні закону діючих мас. Однак у даній роботі для розрахунку використано метод термодинамічних потенціалів, який має деякі переваги. Зокрема він дозволяє обчислювати константи рівноваги і, крім того, узагальнювати розрахунок на випадок великих концентрацій носіїв струму, коли є статистичне виродження [3].

Використаний у роботі метод розрахунку успішно застосовувався для опису процесів самокомпенсації в сполуках A^4B^6 [3].

Розрахунок. Умовою рівноваги в гетерогенній системі при заданих тиску P і температурі T є рівність хімічних потенціалів кожного компонента в усіх фазах системи:

$$\mu_i^s = \mu_i^g \quad (1)$$

або

$$dG_i^s / dN_i^s = dG_i^g / dN_i^g, \quad (2)$$

де G^s, N^s, G^g, N^g – термодинамічні потенціали Гібса та концентрації частинок у кристалі (s) та газі (g) відповідно, i – Cd, Te.

Енергія Гібса кристала

$$G = H_0 + H[D] - TS_k + \Delta G_{el}. \quad (3)$$

де H_0 – ентальпія бездефектного кристала, $[D]$ – концентрація дефектів, H – ентальпія дефекту, що включає зміну коливної ентропії, S_k – конфігураційна ентропія, ΔG_{el} – зміна термодинамічного потенціалу електронів при виникненні дефектів.

Ентропія визначається за законом Больцмана:

$$S_k = k \ln(W), \quad (4)$$

де $W = J! / ((J - [D])! [D]!)$ – термодинамічна ймовірність, J – концентрація вузлів, у яких може виникнути дефект.

За умови $[D] \ll J$, та враховуючи формулу Стірлінга $x! \approx x^x e^{-x}$:

$$S_k = k \cdot [D] (1 + \ln(J/[D])). \quad (5)$$

Зміна термодинамічного потенціалу електронів рівна:

$$\Delta G_{el} = \mu \cdot Z[D], \quad (6)$$

де μ – хімічний потенціал електронів, що відраховується від дна зони провідності, Z – заряд дефекту.

Величину μ знаходять із рівняння електронейтральності, яке при домінуванні одного виду дефекту матиме вигляд:

$$Z[D] = N_c \exp(\mu/kT) - N_v \exp(-(\mu + E_g)/kT), \quad (7)$$

де $N_c = 2((2\pi m_n^* kT)/h^3)^{3/2}$ – густина станів у зоні провідності, $N_v = 2((2\pi m_p^* kT)/h^3)^{3/2} + 2((2\pi m_{h2}^* kT)/h^3)^{3/2} \exp(-\Delta E_v/kT)$ – густина станів у валентній зоні, ΔE_v – енергетичний проміжок між зоною легких та важких дірок, E_g – ширина забороненої

зони, m_n^* – ефективна маса електронів у зоні провідності, m_{h1}^* , m_{h2}^* – ефективні маси дірок у зоні легких та важких дірок.

З рівняння (7):

$$\mu = kT \ln((Z[D] + \sqrt{(Z[D])^2 + 4N_c N_v \exp(-E_g/kT)}) / 2N_c). \quad (8)$$

Підставляючи отримані вирази для S_k та ΔG_{el} у рівняння (3), отримаємо:

$$G = H_0 + H[D] - kT \cdot [D] (1 + \ln(J/[D])) + ZD \cdot kT \ln((Z[D] + \sqrt{(Z[D])^2 + 4N_c N_v \exp(-E_g/kT)}) / 2N_c). \quad (9)$$

Ураховуючи те, що:

$$d[A_i]/d[N^s] = 1, \quad d[V_A]/d[N^s] = -1, \quad (10)$$

та використовуючи рівність $\mu^s = dG^s/dN^s$, отримаємо:

$$\mu^s = \pm H \mp kT \ln(J/[D]) \pm ZkT (\ln((Z[D] + \sqrt{(Z[D])^2 + 4N_c N_v \exp(-E_g/kT)}) / 2N_c) + Z[D] / \sqrt{(Z[D])^2 + 4N_c N_v \exp(-E_g/kT)}). \quad (11)$$

Верхні знаки – якщо $D = A_i$, нижні – якщо $D = V_A$.

При відпалі кристалів CdTe значення тиску пари не перевищує $2 \cdot 10^5$ Па, що дозволяє застосувати для таких умов наближення ідеального газу. Тоді хімічний потенціал газу можна записати у вигляді [4]:

$$\mu^g = kT \ln P + \mu_0. \quad (12)$$

Для одноатомного газу Cd:

$$\mu_0 = kT (-\ln(kT) + \ln(h^3 / (2\pi m kT)^{3/2})). \quad (13)$$

Для двоатомного газу Te_2 :

$$\mu_0 = kT (-\ln(kT) + \ln(h^3 / (2\pi m kT)^{3/2}) + \ln(h^2 / 8\pi^2 I kT) + \ln(h\nu / kT)). \quad (14)$$

m – маса атома або молекули, $I = m l^2$ – момент інерції молекули, l – відстань між ядрами молекули, ν – внутрішня частота коливань молекули.

Прирівнюючи хімічні потенціали газу та кристала:

$$kT \ln P + \mu_0 = \pm H \mp kT \ln(J/[D]) \pm ZkT (\ln((Z[D] + \sqrt{(Z[D])^2 + 4N_c N_v \exp(-E_g/kT)}) / 2N_c) + Z[D] / \sqrt{(Z[D])^2 + 4N_c N_v \exp(-E_g/kT)}). \quad (15)$$

Верхні знаки – якщо $D = A_i$, нижні – якщо $D = V_A$.

Якщо власна концентрація носіїв заряду значно менша від концентрації носіїв, утворених у результаті йонізації дефектів:

$$Z[D] \gg n_i, \quad (16)$$

то умова рівноваги (15) спроститься, і з неї можна вивести рівняння для знаходження концентрацій електронів у явному вигляді:

$$\lg n = \pm (1/(1+Z)) \lg P + 1/((1+Z) \ln 10) \cdot (\pm \mu_0 / kT - H / kT + \ln(J \cdot N_c^Z / Z^Z) - Z) + \lg Z. \quad (17)$$

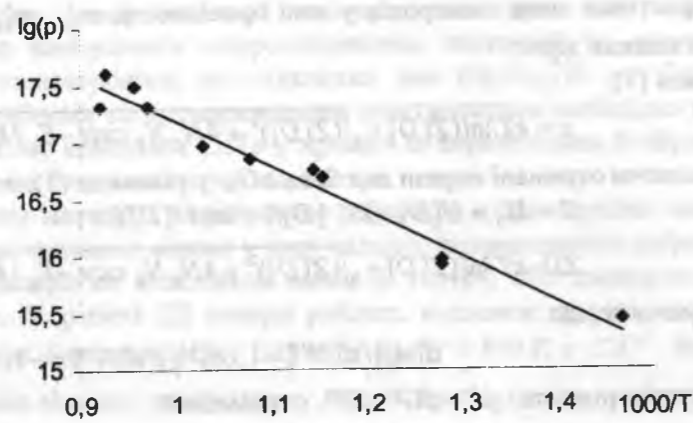


Рис.1. Залежність концентрації дірок p від температури відпау T для максимального тиску пари телуру $P_{Te,max}$. \blacklozenge – експеримент [5], пряма – розрахунок за умови домінування V_{Cd}^-

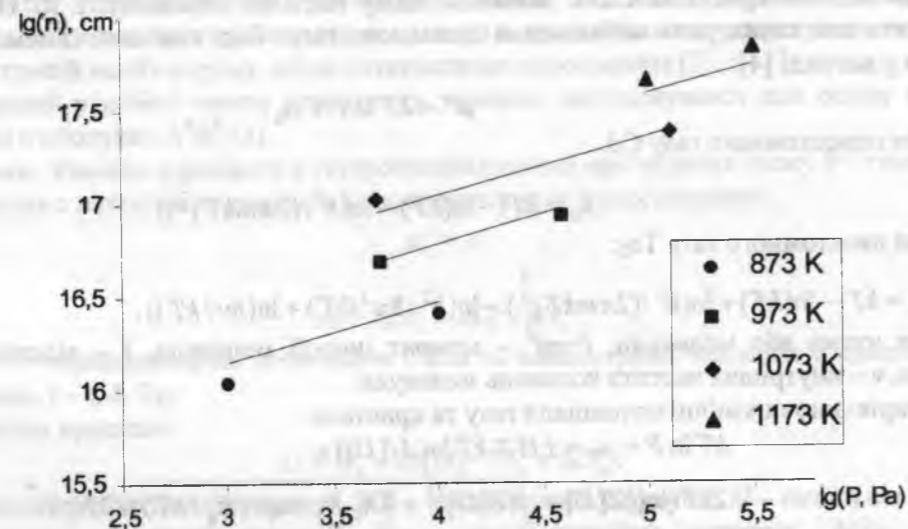


Рис.2. Залежність концентрації електронів n від тиску пари кадмію P_{Cd} для різних температур відпау T . Точки – експеримент [2], прямі – розрахунок за умови домінування V_{Te}^{2+}

Але для чистого CdTe рівність (16) не виконується. При $T = 1173 K$ $lg(n_i) \approx 17,03 cm^{-3}$, що є величиною, близькою до концентрації йонізованих дефектів. Тому розрахунок за (17) можна використовувати лише для якісної оцінки.

Необхідні для розрахунку за формулою (15) ентальпії утворення власних точкових дефектів H визначили, використовуючи експериментальні залежності концентрації вільних носіїв заряду від температури [2, 5].

Розрахунок проводився так. Використовуючи рівняння електронейтральності при переважанні одного виду дефекту у вигляді:

$$Z[D] = n_x \quad (18)$$

та експериментальні залежності $n_x(T)$ [2, 5], визначили концентрацію дефектів $[D]$. Підставляючи ці значення у формулу:

$$H = \pm \mu^s + kT \ln(J/[D]) - ZkT \ln \left(\frac{Z[D] + \sqrt{(Z[D])^2 + 4N_C N_V \exp(-E_g/kT)}}{2N_C} + \frac{Z[D]}{\sqrt{(Z[D])^2 + 4N_C N_V \exp(-E_g/kT)}} \right) \quad (19)$$

отримали ентальпії утворення дефектів.

Розраховане таким способом H для двократно йонізованої вакансії телуру та двократно йонізованого міжвузлового атома кадмію відповідно становить:

$$H_{V_{Te}^{2+}} = -0,7 \cdot 10^{-3} T + 4,7002 \text{ (eV)}; \quad (20)$$

$$H_{Cd_i} = -2,5 \cdot 10^{-3} T + 2,1788 \text{ (eV)}. \quad (21)$$

Обговорення результатів. Як видно з поданих виразів, температурна залежність $H_{V_{Te}^{2+}}$ є слабкою. Тому при розрахунках використано середнє значення ентальпії утворення вакансії телуру в ділянці температур $T = 800 - 1200 K$: $H_{V_{Te}^{2+}} = 4,00 \text{ eV}$. Для міжвузлового атома кадмію температурною залежністю ентальпії утворення нехтувати не можна. Використання усереднених значень H_{Cd_i} не дозволяє отримувати задовільну відповідність з експериментальними даними. Залежність величини H від парціального тиску пари кадмію P_{Cd} є незначною, тому при розрахунках нею нехтували.

Для насиченого телуром матеріалу розрахована ентальпія утворення однократно та двократно йонізованої вакансії кадмію становить: $H_{V_{Cd}} = 3,66 \text{ (eV)}$, $H_{V_{Cd}^{2+}} = 3,76 \text{ (eV)}$.

Отримані значення ентальпій для вакансії кадмію та міжвузлового атома кадмію є близькими до запропонованих у [6] Нобелем: $H_{V_{Cd}} \approx 3,2 \text{ (eV)}$, $H_{Cd_i} \approx 0,83 \text{ (eV)}$. Розбіжності між цими та отриманими в роботі значеннями, а також сильна залежність від температури для H_{Cd_i} пов'язані з тим, що розраховані в роботі ентальпії враховують ефект зміни частоти коливань атомів в околі дефекту.

Наближена оцінка зміни ентропії коливань атомів в околі дефекту дає величину, яка дозволяє погодити розраховані та згадані в [6] ентальпії утворення дефектів H . Якщо кожен дефект змінює частоту коливань x атомів в околі дефекту так, що вона стає рівною v' замість v_0 – частоти атомних коливань у ділянці, віддаленій від дефекту, то зміна коливної ентропії в розрахунку на один дефект буде рівна

$$\Delta s_v = k 3x \ln \frac{v_0}{v'}$$

Утворений дефект може як збільшувати, так і зменшувати частоту коливань навколишніх атомів [7], а чисельні значення v'/v_0 містяться в межах [7]:

$$0,5 < \frac{v_0}{v'} < 2.$$

Тоді, вважаючи, що x приблизно дорівнює кількості найближчих сусідів, отримаємо приблизну оцінку Δs_v :

$$\Delta s_v \approx \pm 0,7 \cdot 10^{-3}$$

Отже, максимальний внесок зміни коливної ентропії у величину H при $T = 1000 K$ становить:

$$H' = T \Delta s_v \approx \pm 0,7 \text{ (eV)}$$

При розрахунках рівноважної концентрації точкових дефектів та вільних носіїв заряду враховувалась наявність у зонній структурі CdTe другої валентної зони. Однак енергетичний проміжок між зонами легких та важких дірок становить $\Delta E_V = 0,95 \text{ (eV)}$ [8], що свідчить про незначний вплив цієї зони на концентрацію вільних носіїв заряду.

З використанням знайдених значень ентальпій утворення дефектів H розраховано баричні та температурні залежності концентрації дефектів. Підставляючи їх у формулу (8), визначимо хімічний потенціал електронів та розрахуємо концентрації вільних електронів та дірок за формулами:

$$n = N_c e^{\frac{\mu}{kT}}, \quad p = N_v e^{\frac{\mu + E_g}{kT}} \quad (22)$$

Висновки. Методом термодинамічних потенціалів розрахована залежність рівноважної концентрації точкових дефектів та вільних носіїв заряду в CdTe від температури відпалу T та тиску пари кадмію P_{Cd}. Розрахунок проведено в припущенні домінування одного виду дефекту: V_{Cd} – у матеріалі, насиченому телуrom, та V_{Te} або Cd_i при насиченні кадмієм. Теоретично розраховані концентрації носіїв струму задовільно узгоджуються з експериментальними даними в широкому інтервалі тисків пари кадмію P_{Cd} та температури відпалу T.

1. Агринская Н.В., Шаникова В.В. Влияние отклонения от стехиометрии на природу мелких акцепторных состояний в кристаллах CdTe // ФТП. – 1988. – Т.22. – С.1248–1251.
2. Фочук П.М., Павлук О.Е., Шербак Л.П. Природа доминирующих точковых дефектов у кристаллах CdTe: область насыщения Cd // Фізика і хімія твердого тіла. – 2004 – Т.5. – №1. – С.136–141.
3. Кайданов В.И., Немов С.А., Равич Ю.И. Самокомпенсация электрически активных примесей собственными дефектами в полупроводниках A^{IV}B^{VI} // ФТП. – 1994. – Т.28. – №3. – С.369–393.
4. Румер Ю.Б., Рыбкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. – М.: Наука, 1975.
5. Berding M.A. Native defects in CdTe // Phys. rev. – 1999. – V.60. – №12. – P.8943–8950.
6. Nobel D. Phase equilibria and conducting properties of cadmium telluride // J.Phil. Res. Repts. – 1959. – V.14. – P.430–492.
7. Крегер Ф. Химия несовершенных кристаллов. – М.: Мир, 1972.
8. Аскеров Б.М. Электронные явления переноса в полупроводниках. – М.: Наука, 1985.

Using a method which is based on minimization of thermodynamics potential of crystal as function of concentration of defects, dependence of equilibrium concentration of defects of points and free transmitters of charge is expected in CdTe vid the temperature of annealing of T and pressure of pair of Cadmium P_{Cd}. In theory the concentrations of transmitters of current are expected satisfactorily conform to experimental information in the wide interval of pressures pair of cadmium of P_{Cd} and temperatures of annealing of T.

Key words: thermodynamics potential, defects of points, cadmium telurid.

УДК 621.315.592

ББК 22.371.26

Б.С. Дзундза

ПОВЕРХНЕВІ ЯВИЩА В СТРУКТУРАХ НА ОСНОВІ ТОНКИХ ПЛІВОК ТЕЛУРУ

Досліджено залежність холлівської рухливості дірок від товщини, а також механізми їх розсіювання в тонкоплівкових структурах на основі телуру. У рамках моделі Петріца та дифузного розсіювання визначено приповерхневі кінетичні коефіцієнти.

Ключові слова: плівки, телур, розсіювання, модель Петріца.

Вступ. У тонких плівках телуру (~150 Å) виконуються умови, коли товщина плівки, довжина вільного пробігу та дебаєвська довжина екранування порівнянні за величиною, тому ефекти поверхневого розсіювання відіграють суттєву роль у явищах переносу. Це приводить до того, що рухливість носіїв поблизу поверхні відрізняється від рухливості носіїв в об'ємі напівпровідника [1]. У наближенні скалярної ефективної маси поверхневе розсіювання залежить від величини поверхневого потенціалу, ступеня дифузності розсіяння та від відношення довжини вільного пробігу до дебаєвської довжини екранування [2].

Мета даної роботи – вивчення впливу поверхні на кінетичні коефіцієнти деяких плівкових структур телуру.

Методика експерименту та результати

Тонкі плівки телуру товщиною від 150 до 1600 Å отримували методом термічного випаровування у вакуумі на підкладки без попереднього підігріву [4]. Швидкість осадження складала 20 – 30 Å/с.

Вивчалися зразки трьох типів: структура 1 – плівки телуру на склі; структура 2 – плівки телуру на склі з попереднім нанесенням шару оксиду танталу; структура 3 – багатошарові системи Al-Ta₂O₅-Te.

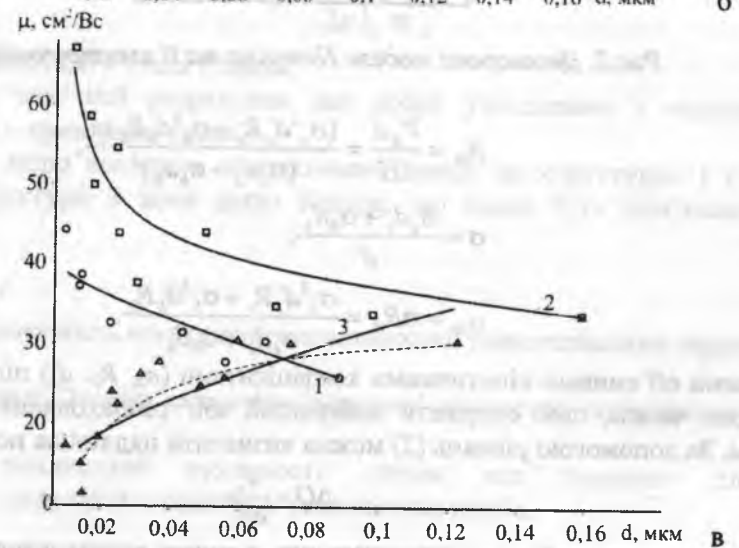
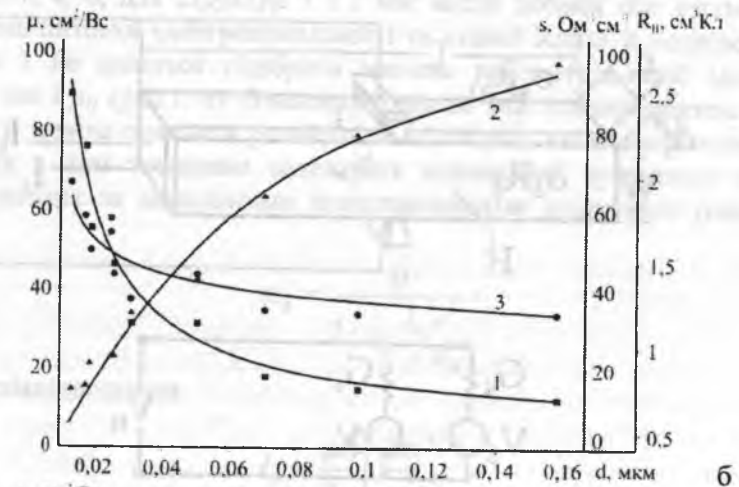
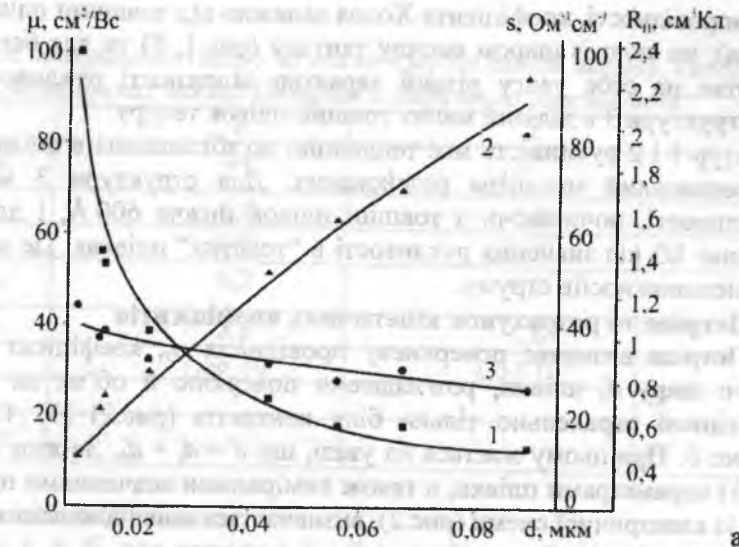


Рис.1. Залежність питомої електропровідності (σ – 1) коефіцієнта Холла (R_H – 2) і рухливості дірок (μ – 3) від товщини плівок телуру для структур: а – телур на склі; б – скло – Ta₂O₅ – Te; в – Al – Ta₂O₅ – Te. Точки – експеримент, суцільна лінія – розрахунок за моделлю Петріца, штрихова лінія розрахунок для дифузного розсіювання.

Дослідження рухливості носіїв заряду проводилися методом ефекту Холла в змінному магнітному й електричному полях. На рис.1 представлені результати вимірювань рухливості,

питомої електропровідності, коефіцієнта Холла залежно від товщини плівок телуру, нанесених на скло (рис.1, а), на скло із шаром оксиду танталу (рис.1, б) та для багатошарових структур (рис.1, в). Звертає на себе увагу різний характер залежності рухливості від товщини для структур 1, 2 і структури 3 в ділянці малих товщин плівок телуру.

Для структур 1 і 2 рухливість має тенденцію до збільшення в ділянці малих товщин, що підтверджує дзеркальний механізм розсіювання. Для структури 3 має місце монотонне зменшення рухливості, починаючи з товщин плівок нижче 600 Å, і для товщин 150–200 Å складає приблизно 1/3 від значення рухливості в "товстих" плівках. Це вказує на домінування дифузного розсіювання носіїв струму.

Модель Петріца та розрахунок кінетичних коефіцієнтів

Модель Петріца визначає поверхневу провідність σ_s , коефіцієнт Холла R_s і товщину приповерхневого шару d_s плівки, розглядаючи поверхню й об'єм як відокремлені фізичні ділянки, які з'єднані паралельно тільки біля контактів (рис.2) [3]. Об'ємним параметрам приписано індекс b . При цьому мається на увазі, що $d = d_s + d_b$. Зв'язок між поверхневими (s) та об'ємними (b) параметрами плівки, а також вимірними значеннями на експерименті (σ , R_H , μ_H , d), як видно із електричної схеми (рис.2), визначається співвідношеннями:

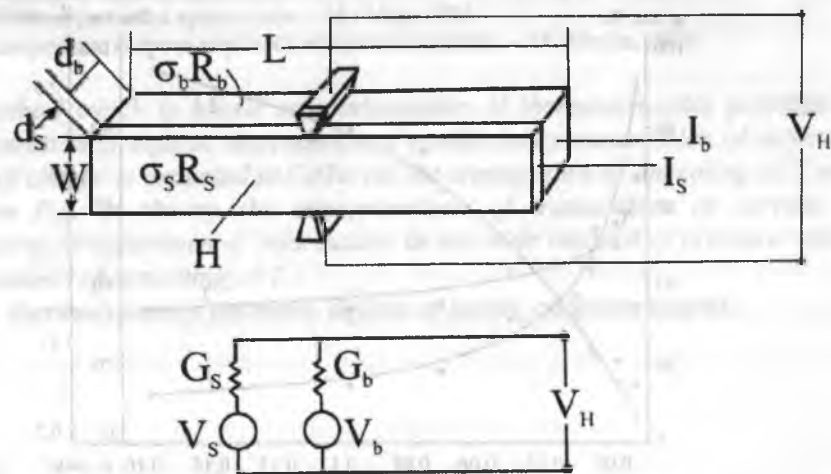


Рис.2. Двошарова модель Петріца та її електричний аналог

$$R_H = \frac{V_H d}{IH} = \frac{(\sigma_s^2 d_s R_s + \sigma_b^2 d_b R_b) d}{(\sigma_s d_s + \sigma_b d_b)^2}, \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_s d_s + \sigma_b d_b}{d},$$

$$\mu_H = \sigma R_H = \frac{\sigma_s^2 d_s R_s + \sigma_b^2 d_b R_b}{\sigma_s d_s + \sigma_b d_b}.$$

За відомими об'ємними кінетичними коефіцієнтами (σ_b , R_b , d_b) підбираються поверхневі (σ_s , R_s , d_s) таким чином, щоб одержати найкращий збіг розрахованих значень (σ , R_H , μ_H) з експериментом. За допомогою рівнянь (2) можна визначити надлишок поверхневих зарядів:

$$\Delta Q = \frac{d_s}{eR_s}. \quad (2)$$

Результати залежностей експериментальних, а також розрахованих за моделлю Петріца питомої електропровідності (σ), сталої Холла (R_H) та холлівської рухливості (μ_H) від товщини (d), показані на рис.1. У таблиці подано також значення використаних при розрахунках параметрів поверхневого шару (s) та об'єму (b).

Таблиця

Параметри поверхневого шару (s) та об'єму (b) плівок телуру, використаних при розрахунках моделі Петріца й дифузного розсіювання*

	1	2	3
$\sigma_s, \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$	44	57	34
$R_s, \text{ см}^3\text{Кл}$	0,8	0,8	0,6
$d_s, \text{ км}$	0,02	0,02	0,02
$\sigma_b, \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$	6,2	6,2	4
$R_b, \text{ см}^3\text{Кл}$	2,6	2,6	9
$\Delta Q, \text{ см}^{-2}$	$1,56 \cdot 10^{13}$	$1,53 \cdot 10^{13}$	$2,08 \cdot 10^{13}$
* $l, \text{ мкм}$	-	-	0,018
* $\mu_v, \text{ см}^2\text{В}^{-1}\text{с}^{-1}$	-	-	35

Аналіз результатів дослідження

Як видно з рис.1, а, б, для структур 1 і 2 має місце добрий збіг експериментальних і розрахункових значень питомої електропровідності та сталої Холла й холлівської рухливості μ_H . Для структури 3 не вдається підібрати значень параметрів, щоб мати добрий збіг одночасно як σ і R_H , так і μ_H (рис.1, в). Виявлену різницю між експериментом і розрахунками холлівської рухливості можна пояснити розмірними ефектами, які значно знижують величину рухливості. У зв'язку з цим товщинна залежність холлівської рухливості плівок для цих структур була розрахована за модельними представленнями дифузного розсіювання носіїв згідно з

$$\mu_b = \frac{\mu}{1 + l_n/d_b}, \quad (3)$$

де l_n визначається із співвідношення

$$l_n = \frac{\mu h}{2e} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{1/3}. \quad (4)$$

Тут n – концентрація носіїв, h – стала Планка.

Виявилось, що вже цей розрахунок дає добре узгодження з експериментальними результатами (рис.1, в – пунктирна крива).

Зауважимо, що якщо величина поверхневого заряду на структурах 1 і 2 має близькі значення, то для структури 3 вона дещо більша, що може бути пов'язано з провідним металевим шаром.

Висновки

1. Досліджено залежність електричних властивостей тонкоплівкових структур телуру від їх товщини.
2. У рамках моделі Петріца визначено кінетичні параметри поверхневого шару плівок телуру.
3. Залежність холлівської рухливості плівок від товщини для структури Al-Ta₂O₅-Te пояснено дифузним механізмом розсіювання носіїв.

Автор висловлює вдячність проф. Д.М. Фреїку за постановку завдання, цінні поради та обговорення результатів дослідження.

1. Шалимова К.В., Солдатов В.С., Смотраков А.А. и др. Влияние поверхностного рассеяния на подвижность дырок в тонких пленках теллура // Физика и техника полупроводников. – 1973. – Т.7. – №8. – С.1457–1460.
2. Ravich Yu.I., Efimova B.A., Tamarchenko V.I. Scattering of current carriers and transport phenomena in lead chalcogenides. II. Theory // Phys. stat. sol. (b). – 1971. – Т.43. – №2. – P.453–469.
3. Jensen J.D., Schoolar R.B. Surface charge transport in PbS_xSe_{1-x} and Pb_{1-y}Sn_ySe epitaxial films // J. Vac. Sci. Technol. – 1976. – Т.13. – №4. – P.920–925.

4. Френк Д.М., Галушак М.А., Межиловская Л.И. Физика и технология полупроводниковых пленок. – Львов: Высшая школа, 1988. – 152 с.

The dependence Hall mobility on thickness and also mechanisms of their scattering in thin-film structures on the basis of tellurium are obtain. Under condition of implementation the two-layer and diffusion scattering is determined kinetic factor of near-surface layers of the thin films.

Key words: films, tellurium, scattering, Petritz model.

УДК 546.28, 681.31
ББК 31.233, 32.97

Р.Б. Атаманюк, С.П. Новосядлий

МІНІМІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІЧНОГО ПРОЦЕСУ ПРОЕКТУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СХЕМ МЕТОДОМ КРЕМНІЄВОЇ КОМПІЛЯЦІЇ ЗА ЧАСОВО-ЙМОВІРНІСНИМ КРИТЕРІЄМ

Запропоновано вдосконалення методу кремнієвої компіляції через оптимальний покрововий вибір операторів та логічних умов за критеріями часу та ймовірності правильного виконання з дотриманням КТО. Введено поняття достовірних операторів та гарантованих умов. Суть алгоритму оптимізації – у відсіканні на кожному кроці кремнієвої компіляції неперспективних варіантів реалізації операторів та логічних умов.

Ключові слова: кремнієва компіляція, інтегральні схеми, оптимізація, верифікація.

Кремнієва компіляція – це метод автоматичної побудови топології кристала великих інтегральних схем (ВІС).

Кремнієвий компілятор – це генератор топології, тобто сукупність автоматичних перетворень від спеціальних властивостей ВІС до геометричного опису кристала в цілому. Кремнієвий компілятор зорієнтований на використання всіх можливостей технології ВІС, а не лише на такі окремі методи, як, наприклад, декомпозиція, метод вентильних матриць (проекткування базових матричних кристалів), метод стандартних бібліотечних елементів.

Кремнієвий компілятор – це програмна генерація топології мовою ICL – мовою інтегральних схем. Цією мовою створено, як мінімум, два кремнієві компілятори: RELAY, BRISTLE BLOCKS. Кремнієвий компілятор – це САПР ВІС, що задовольняє три умови:

- 1) ієрархічність проекту;
- 2) високий рівень мови вхідного опису проекту;
- 3) застосування параметризованих клітинок замість стандартних.

До переваг методу кремнієвої компіляції відносимо:

1. Скорочення термінів проектування ВІС.
2. Автоматичне дотримання проектних норм самими генераторами топології, так звана “коректність за побудовою”.
3. Можливість залучення до проектування САПР ВІС спеціалістів, які не є конструкторами, оскільки кремнієвий компілятор – це сукупність програмних модулів.

Одним із рівнів, через які проходить проектування ВІС, є алгоритмічний рівень. Кремнієву компіляцію можна подати як алгоритмічний процес. При проектуванні алгоритмічного процесу (АП) кремнієвої компіляції виникають задачі аналізу та синтезу. Позначимо через P імовірність безпомилкового виконання деякого процесу, через T – час його виконання. Суть задачі аналізу – у прогнозуванні показників P і T на основі інформації про структуру АП кремнієвої компіляції.

Суть задачі синтезу – у генерації такого варіанта АП кремнієвої компіляції, при якому б оптимізувалися показники P і T , а саме $P \rightarrow \max$, $T \rightarrow \min$. Насправді P і T суттєво взаємопов'язані. Тоді дана задача розбивається на дві окремі задачі:

- 1) $T \rightarrow \min$, $P > P_{\text{доп}}$,
- 2) $P \rightarrow \max$, $T < T_{\text{доп}}$.

На відміну від методів структурної надійності складних систем, надійність алгоритмічних процесів і кремнієвої компіляції зокрема забезпечується на стадії формування

топології ВІС за рахунок можливості системи виявляти та виправляти помилки при виконанні операцій.

За допомогою мови програмування ICL (Integrated Circuit Language – мови інтегральних схем) весь алгоритмічний процес кремнієвої компіляції в загальному вигляді можна записувати мовою алгоритмічних алгебр шляхом суперпозиції послідовних, паралельних, розгалужених та циклічних алгоритмічних структур. Зауважимо, що алгоритмічні процеси бувають регулярні та нерегулярні [1]. Нерегулярні зображаються графами, але кожний нерегулярний алгоритмічний процес можна звести за скінченну кількість кроків до регулярного. А тоді за допомогою апарату теорії ймовірності та теорії нечітких множин можна розв'язувати задачу надійності кремнієвої компіляції на стадії створення цього алгоритмічного процесу.

Оптимізацію топології в загальному випадку проводять зведенням до задачі лінійного програмування. Цільову функцію будують, виходячи з критеріїв якості топології:

- 1) сума гіпотетичних довжин з'єднувальних провідників має бути мінімальною;
 - 2) мінімізація щільності монтажу проводиться за рахунок порожніх комірок методом “шлях деформації”;
 - 3) площа топології, зайнята блоками й провідниками, повинна займати не менше 80% від усієї площі кристала, тому мінімізація топології зводиться до мінімізації незайнятої площі;
 - 4) при застосуванні методу дихотомічного поділу площа блоків в обох половинах має бути однаковою, але мінімізується кількість провідників, що проходять через лінію поділу.
- Система обмежень задачі лінійного програмування виникає з таких конструктивно-технологічних обмежень:

1) геометричні обмеження: а) провідники, що містяться в одному технологічному шарі, не повинні перетинатися, а відстань між ними має бути більшою від деякої заданої допустимої відстані; б) ланцюги, які відносяться до двох або більше технологічних шарів, з'єднуються між собою наскрізними вертикальними отворами, які також мають певні розміри, причому відстані між ними повинні бути більшими від деякої наперед заданої допустимої відстані, зокрема такі отвори для вертикальних з'єднань не можуть розміщуватися всередині блоків;

2) обмеження на довжину провідників: як по горизонтальних трасах, так і по вертикальних каналах провідники мають бути якнайкоротшими – ця вимога накладається для того, щоб зменшити їх опір;

3) обмеження, які пов'язані з допустимою силою струму в шинах живлення: густина струму повинна не перевищувати допустиму норму; якщо густина струму занадто велика, то від тепла може бути розплавлення, тому шини живлення мають бути досить товстими;

4) обмеження на виводи з'єднувальних провідників: рисунок з'єднань задається деревом Штейнера для того, щоб мінімізувати їх довжину;

5) обмеження на стандартизацію методу: передусім задається ширина всіх сигнальних шин та відстань між ними, що тягне за собою зниження щільності монтажу;

б) якщо маємо два технологічні шари та на одному з них провідники проходять уздовж, а на іншому – уперек, тобто ортогонально, то в такій ґратковій структурі наскрізні вертикальні отвори мають бути розміщені у вузлах решітки.

Крім названої системи обмежень, існують також метричні та топологічні обмеження. Серед метричних назвемо такі: фіксовані розміри елементів, фіксована ширина провідників, мінімальна допустима відстань між провідниками, а також між елементами монтажного рисунка. До топологічних обмежень належать: заборона прокладення трас у зайнятих ділянках, заборона перетину різних з'єднань, вимога електричного об'єднання деяких груп виводів.

Якщо технологічні шари кристала покрити координатними сітками за методом “бітової карти”, то окремо взята клітина може бути покрита кількома елементами з різних шарів. Якщо кожній клітині поставити у відповідність її степінь покриття r , тобто кількість непорожніх технологічних шарів, якими вона покрита, то доменом називається прямокутник максимальної площі, усі клітини якого мають однаковий степінь r .

Якщо всі контури паралельні вибраним осям координат, то задача оптимізації топології, тобто побудови такого топологічного рисунка, який забезпечує мінімізацію розмірів кристала та дотримання КТО (конструктивно-технологічних обмежень), зводиться до екстремальної задачі лінійного програмування.

Два методи такого зведення (метод доменів і метод критичного шляху) та формалізація задачі планарного трасування електричних з'єднань, яка зводиться до цілочисельної задачі лінійного програмування, подано А.І. Петренком у [2].

Методом доменів у [2] деталізованому ескізу, розбитому на n доменів, ставиться у відповідність орієнтований граф, за допомогою якого мінімізується площа кристала симплексо-методом. Цього ж можна досягти також методом критичного шляху. У результаті можна досягнути максимальної щільності упаковки інтегральної схеми. Зведення до задачі лінійного програмування дозволяє оптимізувати топологію практично всіх інтегральних схем.

Застосування даних методів потребує значних об'ємів оперативної пам'яті та великих затрат часу. Тому пропонуємо вдосконалення методу кремнієвої компіляції через оптимальний покроковий вибір операторів та логічних умов за критеріями часу та ймовірності правильного виконання з дотриманням КТО.

Для аналізу надійності кремнієвої компіляції використовують такі алгоритмічні структури:

- 1) послідовна структура (композиція) $B = A_1 \cdot A_2$;
- 2) розгалужена структура (α -диз'юнкція) $C = \alpha(A_1 \vee A_2)$;
- 3) ітеративна або циклічна структура (зворотна α -ітерація) $F = \{A\}_\alpha$;
- 4) робота – контроль (виявлення помилок) – виправлення $K = A_\omega(E \vee V)$;
- 5) робота – вибірковий контроль (у тонких місцях – виправлення)
 $P = A_\psi(E \vee_\omega(E \vee V))$;

- 6) багатократна робота (виконання композиції N разів) $M = A^N$.

Для побудови ймовірнісних та часових характеристик, що пов'язані з виконанням операторів та умов, уведемо необхідні події, що пов'язані з виконанням заданих операторів та умов:

- A^1 – правильне, тобто безпомилкове виконання оператора A ,
- A^0 – неправильне виконання оператора A ,
- α^1 – апіорна істинність логічної умови α ,
- α^0 – апіорна хибність логічної умови α ,
- α^{11} – апостеріорна відсутність помилки I роду при виконанні умови α ,
- α^{10} – апостеріорна наявність помилки I роду при виконанні умови α ,
- α^{00} – апостеріорна відсутність помилки II роду при виконанні умови α ,
- α^{01} – апостеріорна наявність помилки II роду при виконанні умови α .

З урахуванням даних позначень обчислимо функції правильного виконання вказаних алгоритмічних структур:

- 1) $B^1 = A_1^1 \cdot A_2^1$ – правильне виконання композиції;
- 2) $C^1 = \alpha^1 \alpha^{11} A_1^1 \vee \alpha^0 \alpha^{00} A_2^1$ – правильне виконання розгалуженої структури;
- 3) $F^1 = A^1 \alpha^{11} \vee (A^1 \alpha^{10} \vee A^0 \alpha^{00}) \cdot A^1 \alpha^{11} \vee (A^1 \alpha^{10} \vee A^0 \alpha^{00}) \cdot (A^1 \alpha^{10} \vee A^0 \alpha^{00}) \cdot A^1 \alpha^{11} \vee \dots$ – правильне виконання циклічної структури;
- 4) $K^1 = A^1 \omega^{11} \vee (A^1 \omega^{10} \vee A^0 \omega^{00}) \cdot V^1$ – правильне виконання: робота – контроль – виправлення;
- 5) $P^1 = A^1 \psi^0 \vee A^1 \psi^1 \cdot (\omega^{11} \vee \omega^{10} \cdot V^1) \vee A^0 \psi^1 \omega^{00} V^1$ – правильне виконання структури робота з вибірковим контролем і виправленням;
- 6) $M^1 = A^1 \cdot A^1 \cdot \dots \cdot A^1$ (N разів) – правильне виконання структури багатократної роботи.

Після цього можна замінити вказані оператори єдиним оператором B , або C , або F , або K , або P , або M з еквівалентними характеристиками відповідно $p_B^1 = p_{A_1}^1 \cdot p_{A_2}^1$, $t_B = t_{A_1} + t_{A_2}$ для послідовної структури.

Для структури “ α -диз'юнкції”: $p_C^1 = p_\omega^1 k_\omega^1 p_A^1 + (1 - p_\omega^1) \cdot k_\omega^{00} p_A^1$;

$$t_C = t_\omega + (p_\omega^1 k_\omega^{11} + (1 - p_\omega^1)(1 - k_\omega^{00})) \cdot t_A + (p_\omega^1(1 - k_\omega^{11}) + (1 - p_\omega^1) \cdot k_\omega^{00}) \cdot t_{A_2}$$

Структура “робота з вибірковим контролем і виправленням” замінюється одним оператором P із відповідними часово-ймовірнісними характеристиками:

$$p_P^1 = (1 - p_\psi^1) p_A^1 + p_\psi^1 \cdot (p_A^1 k_\omega^1 + (p_A^1(1 - k_\omega^{11}) + (1 - p_A^1) \cdot k_\omega^{00}) \cdot v^1);$$

$$t_p = t_A + p_\psi^1 (t_\omega + t_V (p_A^1(1 - k_\omega^{11}) + (1 - p_A^1) \cdot k_\omega^{00})).$$

Структура “багатократна робота” $M = A^N$ замінюється одним оператором M з еквівалентними часово-ймовірнісними характеристиками:

$$p_M^1 = (p_A^1)^N; t_M = N \cdot t_A.$$

Для оцінки надійності алгоритмічного процесу кремнієвої компіляції використовують такий алгоритм:

- I. Подати процес кремнієвої компіляції у вигляді суперпозицій алгоритмічних структур.
- II. Задати або обчислити часово-ймовірнісні характеристики операторів та логічних умов.
- III. Встановити лічильник алгоритмічних структур $i:=1$.
- IV. Знайти i -ту алгоритмічну структуру.
- V. За допомогою оператора вибору замінити дану i -ту алгоритмічну структуру одним із шести операторів B, C, F, K, P, M для вказаних типових структур.
- VI. Перевірити, чи наявні ще якісь алгоритмічні структури; якщо “так”, то повернутися до кроку IV, збільшуючи лічильник $i:=i+1$, якщо “ні”, то перейти до кроку VII.
- VII. Кінець.

Нехай задано початковий варіант алгоритмічного процесу кремнієвої компіляції, в якому кожний оператор на i -тому кроці може бути реалізований різними n способами. Позначимо цей оператор через A_i , а відповідну йому кількість варіантів – через n_i .

Нехай для кожної логічної умови ω_j також існує n_j способів реалізації. Наявність різних варіантів для логічних умов пов'язана з урахуванням на кожному кроці проектування існуючих КТО. Позначимо такі набори варіантів векторами

$$A_i = \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}\}; \omega_j = \{\omega_{j1}, \omega_{j2}, \dots, \omega_{jn}\}.$$

Нехай $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ – це список усіх існуючих КТО, тобто вектор керованих змінних, від якого залежить вибір номерів операторів та логічних умов. Нехай $P(x)$ і $T(x)$ – імовірність та час правильного виконання кремнієвої компіляції тоді, коли керовані змінні задані вектором X . Нехай P_{don} – найменше допустиме значення ймовірності, T_{don} – найбільше допустиме значення часу.

Тоді в прямій постановці задача оптимізації має вигляд: $T(x) \rightarrow \min, P(x) \geq P_{don}$, а у зворотній постановці задача оптимізації виглядає так: $P(x) \rightarrow \max, T(x) \leq T_{don}$.

Суть алгоритму оптимізації – у відсіканні на кожному кроці кремнієвої компіляції неперспективних варіантів реалізації операторів та логічних умов. При відсіканні будемо дотримуватися таких критеріїв:

1. Якщо A_1 і A_2 – різні варіанти реалізації оператора A мовою інтегральних схем ICL, то реалізацію A_1 вибираємо тоді й тільки тоді, коли виконуються дві такі нерівності:

$$p_{A_1}^1 > p_{A_2}^1 \text{ і } t_{A_1} < t_{A_2},$$

де p^1 – це ймовірність правильного виконання оператора A_1 , а $p_{A_2}^1$ – ймовірність правильного виконання оператора A_2 .

2. Так само вибираємо логічну умову ω_1 тоді й тільки тоді, коли виконуються дві такі нерівності:

$$k_{\omega_1}^{11} > k_{\omega_2}^{11} \text{ і } t_{\omega_1} < t_{\omega_2},$$

де $k_{\omega_1}^{11}$ означає ймовірність відсутності помилок першого роду при контролі, а через $k_{\omega_1}^{10}$

позначаємо ймовірність наявності помилок першого роду при контролі, через $k_{\omega_1}^{01}$ позначаємо ймовірність відсутності помилок другого роду при контролі, а через $k_{\omega_1}^{00}$ позначаємо ймовірність наявності помилок другого роду при контролі.

Записуємо алгоритм оптимізації процесу кремнієвої компіляції в прямій постановці:

- 1) установити лічильник алгоритмічних структур $m:=1$;
- 2) знайти алгоритмічну структуру з номером m ;

3) відкинути неперспективні варіанти виконання операторів, що входять у дану структуру, залишити тільки оптимальні варіанти;

4) відкинути неперспективні варіанти виконання логічних умов, що входять у дану m -ту структуру, і залишити тільки оптимальні варіанти;

5) обчислити характеристики всіх варіантів виконання m -ї структури, ураховуючи, що ймовірності перемножуються, а часи – додаються;

6) відкинути неперспективні варіанти виконання всієї m -тої структури;

7) перевірити умову: “весь попередній процес кремнієвої компіляції замінено еквівалентним оператором”. Якщо “так”, то перейти до пункту 8, якщо “ні”, то збільшити лічильник $m := m+1$ і перейти до пункту 2;

8) відкинути всі варіанти процесу кремнієвої компіляції, для яких виконується нерівність $P(x) < P_{\text{дон}}$, а з решти варіантів вибрати той, для якого досягається $T(x) \rightarrow \min$;

9) розгорнути вибраний варіант до попереднього рівня операторів та логічних умов мовою інтегральних схем ICL і записати оптимальний процес кремнієвої компіляції.

Уведемо поняття достовірних операторів та гарантованих умов – це такі оператори й умови, які в процесі кремнієвої компіляції виконуються зі ймовірністю одиниця, тобто виконуються завжди. Тоді алгоритм оптимізації у зворотній постановці виглядає так:

1) установити лічильник алгоритмічних структур $m:=1$;

2) знайти структуру з номером m ;

3) відкинути неперспективні варіанти для операторів, використавши вищезазначений критерій, і зробити це для всіх операторів, що входять у m -ту структуру;

4) з усіх операторів m -тої структури, що є достовірними, відкинути ті, які перевищують обмеження за часом;

5) відкинути неперспективні варіанти для логічних умов, що входять у m -ту структуру згідно з критерієм;

6) з решти гарантованих логічних умов відкинути ті, які перевищують обмеження за часом;

7) обчислити характеристики всіх варіантів виконання m -тої структури, користуючись правилами, що ймовірність послідовного виконання операторів дорівнює добутку ймовірностей, а час послідовного виконання операторів рівний сумі часів виконання кожного оператора;

8) відкинути неперспективні варіанти виконання m -тої структури, користуючись критерієм;

9) перевірити умову: “чи замінено весь попередній процес кремнієвої компіляції еквівалентним оператором”. Якщо “так”, то перейти до пункту 10, а якщо “ні” – то збільшити лічильник $m := m+1$ і перейти до пункту 2;

10) відкинути варіанти процесу кремнієвої компіляції, для яких перевищено часові обмеження, тобто $P(x) > T_{\text{дон}}$;

11) з решти варіантів вибрати той, для якого досягається $P(x) \rightarrow \max$. Цей варіант дає оптимальний набір аргументів, тобто список конструктивно-технологічних обмежень, на яких досягається максимум;

12) розгорнути вибраний варіант алгоритмічного процесу до рівня операторів та логічних умов і записати оптимальний процес кремнієвої компіляції мовою інтегральних схем ICL.

Висновки. Знайдено вдосконалений метод кремнієвої компіляції, тобто такий спосіб побудови алгоритмічного процесу, що забезпечує вибір оптимальної послідовності операторів за часово-ймовірнісним критерієм. Надійність кремнієвої компіляції визначається її алгоритмічним процесом.

1. Базилевич Р.П. Декомпозиционные и топологические методы автоматизированного конструирования электронных устройств. – Львов: Вища школа, Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 168 с.
2. Петренко А.И. и др. Автоматизация конструирования больших интегральных микросхем. – К.: Вища школа, 1983. – 312 с.
3. Мельник Р.А. Алгоритмы иерархического моделирования плоскостной та просторової топології НВІС. – Львів: Вид-во ДУ “Львівська політехніка”, 1999. – 140 с.

4. Atamanyuk R.B., Novosyadly S.P. Silicic compiling as instrument of planning of topology of large-scale arrays and providing its reliability at algorithmic level // The IX International Conference “Modern problems of radio engineering, telecommunications and computer science” (Lviv – Slavske, February 28 – March 4, 2006). – Lviv, 2006. – P.604–605.
5. Атаманюк Р.Б., Новосядлий С.П. Ушільнене компонування топології інтегральних схем методом деформаційної ретракції // П'ята науково-технічна конференція “ПРИЛІДОВОБУДУВАННЯ 2006: стан і перспективи” (25 – 26 квітня 2006 р.). – К., 2006. – С.209–210.

In this paper the silicic compiling process is described as instrument of planning of topology of large-scale arrays and providing its reliability at algorithmic level of the integrated circuit. Improvement of method of the silicic compiling through discrete optimization of topology is proposed.

Key words: silicic compiling, integrated circuit, optimization, verification.

УДК 621.382

ББК 32.85

В.І. Голота, І.Т. Козум

ЕЛЕМЕНТИ АРХІТЕКТУРИ МАТРИЧНО-ЕМІТЕРНОЇ НАНОМЕТРОВОЇ ЛІТОГРАФІЇ

Розглянуто сучасний стан розвитку оптично-проекційної та матрично-емітерної нанометрової літографії. Подано вихідні дані та результати розрахунків структури й основних елементів архітектури системи. Запропоновано інтегровані КНІ КМОН структури на основі базових матричних кристалів для реалізації ІС логіки, пам'яті й керування матричними випромінювачами.

Ключові слова: нанометрова літографія, елемент архітектури, КНІ КМОН структури, мікроелектронні пристрої.

Вступ. Прогрес сучасної мікроелектроніки в значній мірі визначається можливостями технології виробництва інтегральних схем (ІС). Одним із базових технологічних процесів у виробництві ІС є літографія. У сучасних оптичних літографіях використовується ультрафіолетове (УФ), глибоке ультрафіолетове (ГУФ) та екстремальне ультрафіолетове (ЕУФ) випромінювання [1]. Літографії з УФ, ГУФ та ЕУФ випромінюванням забезпечують технологічні норми нанометрового діапазону. ЕУФ літографія має найвищу роздільну здатність і продуктивність і буде основною в масовому виробництві ІС на найближче десятиріччя. Але в зв'язку з надзвичайною складністю та високою вартістю ЕУФ літографії, недовговічністю проекційної оптики й відбиваючих масок актуальним є завдання створення альтернативних літографій. Однією з таких є матрично-емітерна (МЕ) літографія.

Оптичні проекційні літографії. На даний час у масовому виробництві ІС використовуються оптичні проекційні літографії з технологічними нормами 180 нм, 130 нм, 90 нм, 65 нм, а в перспективі планується освоєння – 45 нм (2007), 32 нм (2009), 22 нм (2011) [2, 3].

Технологічна норма визначає мінімальний (планарний) розмір елемента (МРЕ) топології (рис.1).

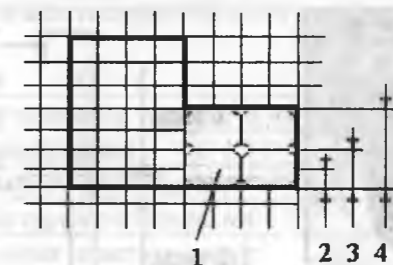


Рис.1. Топологічний елемент: 1 – піксел; 2 – крок координатної сітки; 3 – розмір пікселя; 4 – мінімальний розмір елемента

Так, для оптичної проекційної літографії МРЕ визначається з формули (1):

$$MPE = k_1 \frac{\lambda}{NA}, \quad (1)$$

де k_1 – коефіцієнт, що визначається характеристиками джерела випромінювання, проекційної системи, геометрії маски та чутливості фоторезисту; λ – довжина хвилі випромінювання, нм; NA – числова апертура лінзи.

Літографія УФ випромінювання з довжинами хвиль до 248 нм і спеціальними методами формування топографічного зображення дозволяє отримувати MPE 180÷130 нм. Літографія ГУФ випромінювання з довжинами хвиль 193,4÷157 нм і спеціальними методами формування топографічного зображення дозволяє отримувати MPE 90÷45 нм.

Подальше зменшення MPE до 32÷22 нм без використання спеціальних методів формування топографічного зображення забезпечує літографія ЕУФ випромінювання з довжиною хвилі 13,4 нм. Значення MPE топології для оптичної літографії з різними характеристиками УФ випромінювання подане в таблиці 1.

Таблиця 1

Мінімальний розмір елемента топології

Випромінювання	Довжина хвилі, нм	k_1 ($k_{\min} = 0,25$)	NA ($NA_{\max} = 0,87$)	MPE, нм
УФ	248 (KrF)	0,40	0,55	180
		0,40	0,76	130
ГУФ	193,4 (ArF)	0,30	0,64	90
		0,27	0,80	65
			0,72	65
ЕУФ	13,4 (Xe2)	0,30	0,72	65
		0,25	0,87	45
		0,83	0,17	65
		0,57	0,17	45
		0,41	0,17	32
		0,28	0,17	22

Таким чином, при масовому виробництві ІС ЕУФ літографія забезпечує найвищу роздільну здатність і найбільшу продуктивність (60 пластин Ø300 мм у годину). Але у зв'язку з надзвичайною складністю й високою вартістю ЕУФ літографії, недовговічністю комплектів відбиваючих масок і проекційної оптики актуальним є завдання створення альтернативних літографій. У цьому напрямку ведуться активні дослідження та розроблено багато варіантів безмаскових літографій: оптичної, електронно-променевої, йонно-променевої, інтерферонційної та імпринтової [4, 5]. Однією з перспективних є МЕ літографія.

3. Матрично-емітерна літографія. Випромінювачем електронів у МЕ літографії є холодний катод у вигляді вертикальної вуглецевої нанотрубки Ø17 нм [6, 7]. Мікрофотографія вуглецевої нанотрубки та схематичне зображення одного випромінювача зображені на рис.2.

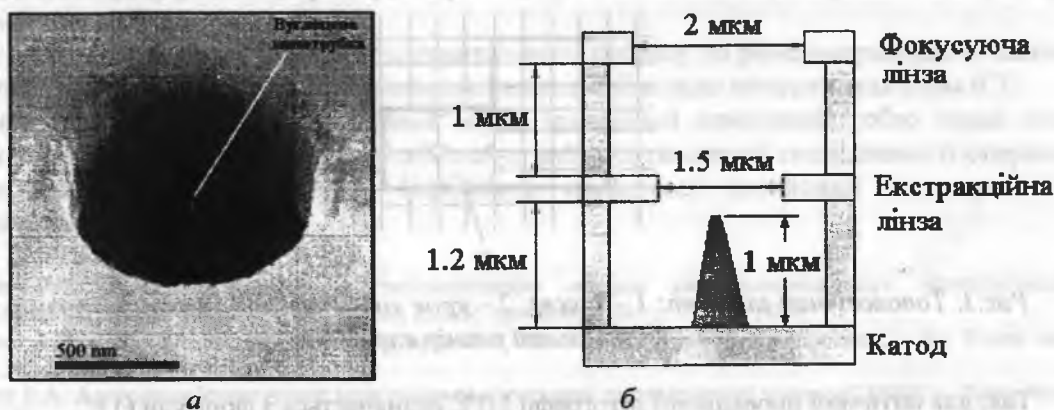


Рис.2. Вуглецева нанотрубка: а – мікрофотографія; б – схематичне зображення випромінювача електронів

Випромінювачі об'єднуються в матриці та розміщуються на кристалі однієї великої ІС розміром 300 мм×300 мм рядами. На одній матриці площею 100 мм² розміщується від 3×10⁶ до 9×10⁶ випромінювачів із кроком t_x мкм× t_y мкм залежно від розміру пікселя. Для експонування всієї пластини використовується від 10 до 20 рядів матриць випромінювачів із кроком t_{row} залежно від схемотехнічної архітектури, під яку необхідно виділити площу кристала. Кожний випромінювач має електростатичний екстракційний і фокусуючий електроди, розділені шаром діелектрика SiO₂. Крім того, кожний випромінювач інтегрований зі схемами логіки, пам'яті, керування й контролю дози експозиції [7, 8]. Схематичне зображення одного ряду випромінювачів показано на рис.3.

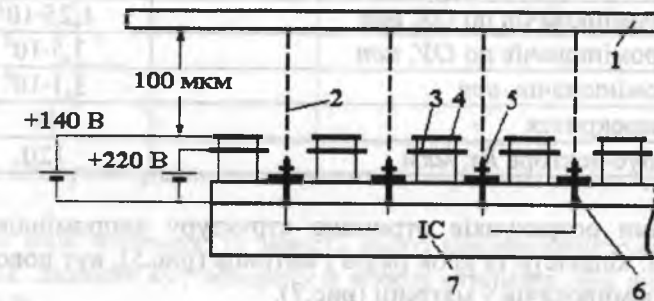


Рис.3. Ряд випромінювачів: 1 – кремнієва пластинка; 2 – електронний промінь; 3 – екстракційний електрод (анод); 4 – фокусуючий електрод; 5 – вуглецева нанотрубка (катод); 6 – контакт між ІС та випромінювачем; 7 – ІС логіки, пам'яті й керування

Для отримання напівтонових пікселів при формуванні країв зображень використовуються 5-розрядні біти й система експонування з 32 значеннями заповненості імпульсу з періодом T (рис.4).

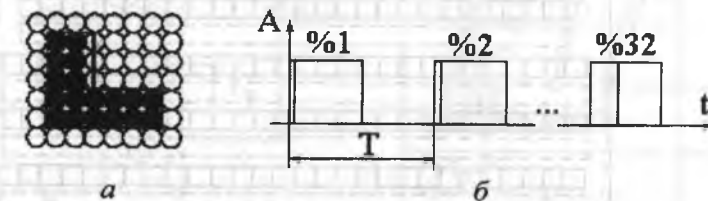


Рис.4. Сіротонові піксели: а – піксели різної дози експонування; б – імпульси експонування різної заповненості

Для усереднення геометричного відхилення та різної емісійної здатності вуглецевих нанотрубок один піксел експонується 8–10 разів різними випромінювачами. Така надлишковість і суцільність перекриття досягається за рахунок повороту всього кристала відносно напрямку руху пластини на кут α .

4. Вихідні дані для розрахунку структури й елементів архітектури. Вихідні дані для розрахунку структури й елементів архітектури МЕ літографії вміщені в таблиці 2.

Таблиця 2

Вихідні дані для розрахунку

Мінімальний розмір елемента топології, нм	65÷22
Кількість рівнів експонування	32
Час експонування одного пікселя, мкс	1
Струм експонування одного пікселя, нА	1
Швидкість переміщення пластини, мм/с	≤5
Частота модуляції випромінювача, МГц	1
Продуктивність, Ø300 мм пластин/год	80

Результати розрахунку структури випромінювачів подано в таблиці 3.

Таблиця 3

Результати розрахунку

Показники	Варіант 1	Варіант 2
1. Кількість рядів матриць, шт	10	10
2. Крок рядів ($t_{ряд}$), мм	22	22
3. Розмір матриці, мм×мм	10×10	10×10
4. МРЕ топології, нм	65	22
5. Розмір пікселя, нм	32	11
6. Крок випромінювачів по OX (t_x), мкм	8	4
7. Крок випромінювачів по OY (t_y), мкм	4	2,7
8. Кількість випромінювачів по OX, шт	$1,25 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$
9. Кількість випромінювачів по OY, шт	$2,5 \cdot 10^3$	$3,7 \cdot 10^3$
10. Усього випромінювачів, шт	$3,1 \cdot 10^6$	$9,2 \cdot 10^6$
11. Коефіцієнт перекриття	10	10
12. Проекція радіус-вектора R_x , мкм	120	60

За результатами розрахунків отримано структуру випромінювачів і перші елементи архітектури системи: кількість та крок рядів і матриць (рис.5), кут повороту кристала α (рис.6), кількість і крок випромінювачів у матриці (рис.7).

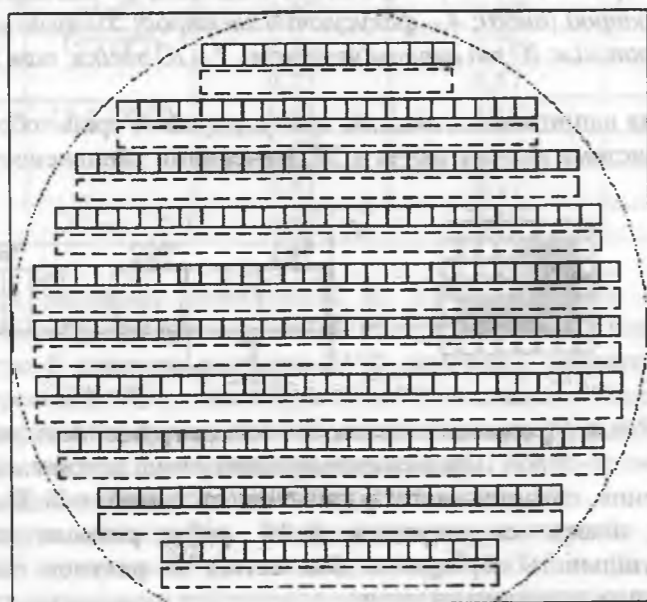


Рис.5. Розміщення рядів і матриць: □ – матриця випромінювачів, \circ – топографічний образ ІС на кремнієвій пластині

Розрахункова кількість матриць в 10 рядках: 1 – 12, 2 – 20, 3 – 24, 4 – 26, 5 – 28, 6 – 28, 7 – 28, 8 – 26, 9 – 22, 10 – 16. Таким чином, на кристалі розміщується 230 матриць розміром 10 мм×10 мм. Для експонування всіх 460 топографічних образів ІС на пластині її необхідно перемістити на величину кроку рядів $t_{ряд} = 22$ мм.

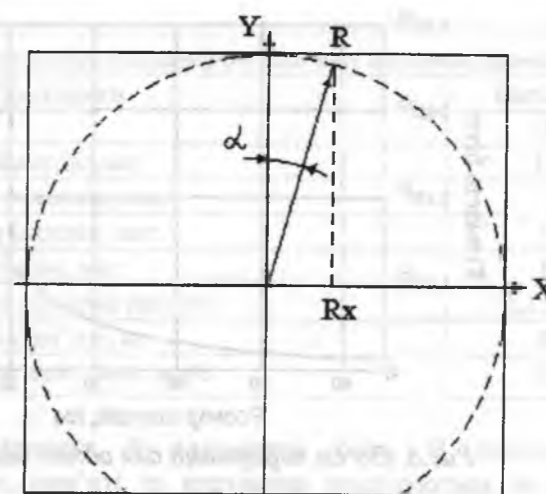


Рис.6. Поворот кристала на кут α : R_x – проекція радіус-вектора

Оскільки кут α має малі значення, то замість нього використовується значення проекції радіус-вектора на вісь OX. Заданий кут повороту α можна отримати при досягненні проекцією радіус-вектора величини R_x .

У матриці випромінювачі розміщуються з кроком t_x і t_y (рис.7, а). Значення кроків t_x , t_y і кута повороту α розраховані з умови забезпечення кратності та суцільності перекриття ряду пікселів (рис.7, б).

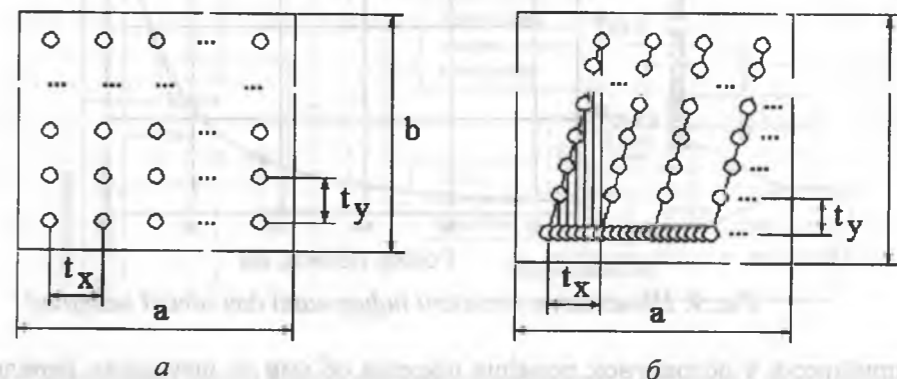


Рис.7. Матриця випромінювачів: а – розміщення випромінювачів; б – перекриття ряду пікселів із заданою кратністю

5. Елементи архітектури матрично-емітерної літографії. З вихідних даних таблиці 4, узятих за основу для розробки елементів архітектури системи, видно, що за роздільною здатністю й продуктивністю МЕ літографія переважає ЕУФ літографію. Це зумовлює розширення напрямків пошуків і досліджень. Для реалізації системи у вигляді керованого комп'ютером мікроелектронного пристрою проводяться дослідження й розробляються елементи архітектури за такими напрямками:

- архітектура системи (послідовна, послідовно-паралельна, синхронна, асинхронна);
- ІС МЕ літографії (технологія, схемотехніка, елементна база, топологія);
- САПР система – канал передачі даних – ІС МЕ літографії – система синхронізації і переміщення – кремнієва пластинка.

Щодо першого напрямку елементи архітектури вибрано за показниками продуктивності та об'ємів інформації. Згідно з таблицею 1, продуктивність МЕ літографії повинна становити одну $\varnothing 300$ мм пластину за 45 с. Для експонування на цій пластині всіх пікселів розміром 11 нм із можливістю вибору 32 значень заповненості імпульсу потрібно передати $1,9 \cdot 10^{15}$ бітів інформації. Ураховуючи неприйнятно великий об'єм інформації, можна зробити висновок: передавати біти для всіх матриць потрібно паралельно й синхронно. Для такої архітектури залежність об'ємів і швидкості передачі інформації для однієї матриці від розміру пікселя показана на рис.8 і рис.9.

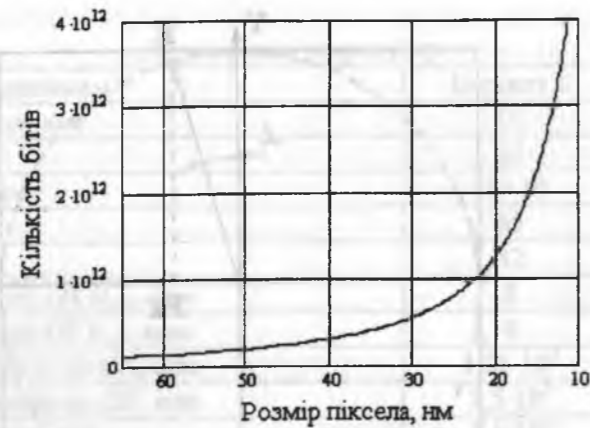


Рис.8. Об'єм інформації для однієї матриці

Як видно з рис.8, об'єми інформації для однієї матриці попадають у діапазон 1+4 Тбіт. Джерелом таких великих об'ємів інформації можуть бути накопичувачі на жорстких магнітних дисках системи RAID HDD.

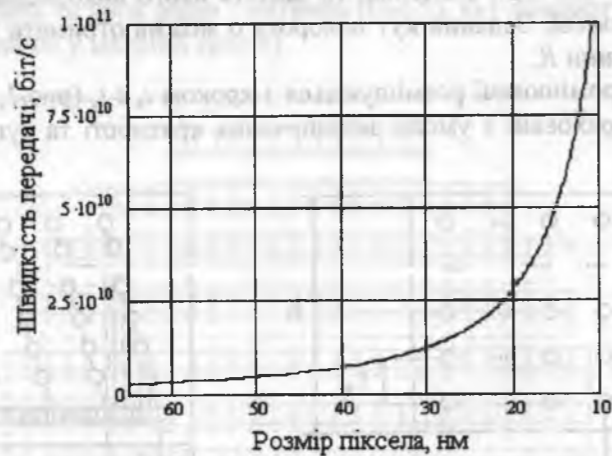


Рис.9. Швидкість передачі інформації для однієї матриці

Для прийнятих у розрахунок розмірів пікселів об'єми та швидкість передачі інформації подані в таблиці 4. У цьому випадку на одну матрицю передаються також великі, але прийнятні об'єми та швидкості передачі інформації.

Таблиця 4

Об'єми і швидкість передачі інформації для однієї матриці

Показники	Варіант 1	Варіант 2
1. Розмір піксела, нм	32	11
2. Кількість бітів	$0,488 \cdot 10^{12}$	$4,132 \cdot 10^{12}$
3. Швидкість передачі, біт/с	$10,8 \cdot 10^9$	$91,8 \cdot 10^9$

Наступним кроком у деталізації елементів архітектури є вибір структури комірок пам'яті випромінювачів. Структура комірок пам'яті повинна забезпечити розрахункову швидкість передачі інформації матрицею з урахуваннями швидкодії елементної бази, часу експонування пікселів і переміщення пластини. З багатоваріантних розрахунків структури комірок пам'яті було вибрано таку: паралельний доступ до комірок пам'яті за рядами і послідовний за стовпцями матриці. Для цього всі стовпці матриці підключаються до окремих дешифраторів адреси. Час доступу (читання/запису) до однієї комірки пам'яті при такій структурі поданий у таблиці 5. Запис інформації в комірки пам'яті дозволяє керувати випромінювачами (включено/виключено) та засвічувати піксели.

Піксели експонуються рядами за синхроімпульсами, що надходять від системи переміщення пластини.

Таблиця 5

Програмування комірок пам'яті й експонування пікселів

Показники	Варіант 1	Варіант 2
1. Розмір піксела, нм	32	11
2. Час актуалізації ряду пікселів, мкс	144	49,5
3. Час експонування ряду пікселів, мкс	1	1
4. Час переміщення ряду пікселів, мкс	10	13
5. Час міжрегістрових передач, мкс	12	16
6. Кількість дешифраторів комірок пам'яті	$1,25 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$
7. Час доступу до комірки пам'яті, нс	49	8
8. Швидкість переміщення пластини, мм/с	3,2	1,1

6. Схемотехнічні рішення й елементна база. В експериментальних матрицях випромінювачів ІС логіки, пам'яті та керування реалізуються за КМОН технологією [8]. Структурна схема керування одним випромінювачем показана на рис.10.

Проте значно перспективнішими для побудови таких ІС є структури кремній-на-ізоляторі (КНІ). Порівняно зі стандартними КМОН ІС на об'ємному кремнії, КНІ КМОН ІС мають значно кращі характеристики швидкодії, щільності елементів на кристалі, споживаної потужності, температурного діапазону та радіаційної стійкості. На рис.11 показана структура стандартного та КНІ МОН транзисторів.

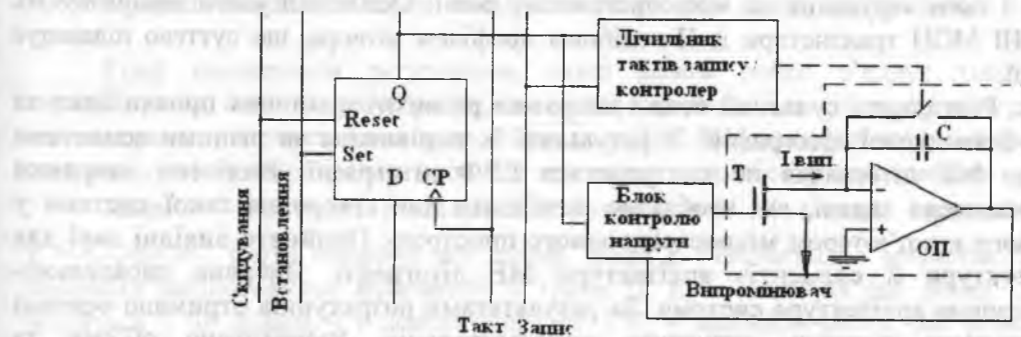


Рис.10. Структурна схема керування випромінювачем: D-тригер; лічильник тактів запису/контролер; блок контролю напруги; блок контролю дози експозиції (інтегратор з елементів T, C, ОП)



Рис.11. Структура транзисторів: а – стандартного; б – КНІ МОН

Із використанням КНІ МОН транзисторів можна будувати базові логічні схеми. Так, на рис.12 показано схематичні топології стандартного (а) та КНІ КМОН інверторів (б).

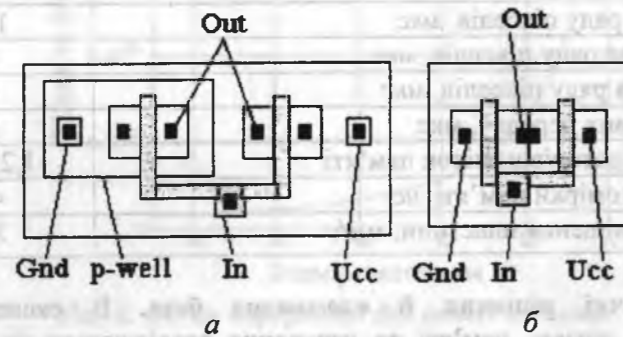


Рис.12. Топологія інверторів: а – стандартного; б – КНІ КМОН

З рисунків видно, що за розміром площі, кількістю контактів, довжин з'єднань, при однакових співвідношеннях ширина та довжина каналів МОН транзисторів, КНІ структури мають суттєві переваги. Оскільки матриця випромінювачів має регулярну структуру, то для реалізації ІС логіки, пам'яті та керування оптимальним є базовий матричний кристал (БМК) на КНІ КМОН структурах [9]. Крім цього, КНІ структури є значно гнучкішими при створенні тривимірних мікросистемних пристроїв, що дозволяє монолітну інтеграцію матричних випромінювачів і схем керування на мікросистемному рівні. Особливої уваги заслуговують розроблені КНІ МОН транзистори із П-подібним профілем затвора, що суттєво підвищує ступінь інтеграції.

Висновки. Розглянуто сучасний стан і напрямки розвитку оптичних проекційних та альтернативної безмаскової літографії. У результаті їх порівняння за різними аспектами встановлено, що МЕ літографія не поступається ЕУФ літографії. Виділено напрямки досліджень і визначено задачі, які необхідно розв'язати для створення такої системи у вигляді керованого комп'ютером мікроелектронного пристрою. Прийнято вихідні дані для розрахунку структури й елементів архітектури МЕ літографії. Вибрана паралельно-последовна синхронна архітектура системи. За результатами розрахунків отримано основні елементи архітектури системи, структуру випромінювачів. Розраховано об'єми та швидкість передачі інформації. На основі цього визначено структуру і швидкодію комірок пам'яті. Запропоновано інтегровані КНІ КМОН структури на основі базових матричних кристалів. У цих структурах пропонується використовувати КНІ МОН транзистори як із П-подібним, так і з планарним профілем затвора.

1. Berkeley Extreme Ultraviolet Microexposure Tool. 2004 Year-End Report. Technology Transfer #05024630A-Eng. Sematech. February 28, 2005. <http://www.sematech.org/docubase/abstracts/4630aeng.htm>.
2. Semiconductor Industry Association (SIA), The International Technology Roadmap for Semiconductors. 2005. Lithography. www.sia-online.org.
3. Gwyn C., Lee S.H. First lithographic results from extreme ultraviolet Engineering Test Stand // J. Vacuum Science & Technology B, 19. – 2001. – Nov/Dec. – V.6. – P.2389. EUV LLC project. www.intel.com/technology/silicon/lithography.htm.
4. Rajesh Menon, Amil Patel, Dario Gill, Hi Smith. Maskless lithography // Material Today's. – 2005. – February. – P.26–33.
5. Алферов Ж. Полупроводниковая электроника в России. Состояние и перспективы развития // ЭЛЕКТРОНИКА. – 2005. – №4. – С.5–9.
6. Baylor L.R., Lowndes D.H., Thomas C.E., Guilor M.A., Merkulov V.I. Digital electrostatic electron-beam array lithography // J. Vacuum Science & Technology B (Microelectronics and Nanometer Structures). – 2002. – V.20. – P.2646.
7. Baylor L.R., Lowndes D.H., Thomas C.E., Guilor M.A., Merkulov V.I., Yang X., Melechko A.V., Hale M.D. Vertically aligned carbon nanofiber-based field emission electron sources with an integrated focusing electrode // J. Vacuum Science & Technology B 22. – 2004. – Jan/Feb. – No.1. – P.35–39.
8. Baylor L.R., Lowndes D.H., Simpson M.L., Thomas C.E., Guillo M.A., Merkulov V.I. Digital electrostatic electron-beam lithography // J. Vacuum Science & Technology B 20. – 2002. – Nov/Dec. – No.6. – P.2646–2650.
9. Druzhynin A., Kogut I. Digital CMOS ARRAY based on SOI Structures // Electron Technology. – Warshawa, 1999. – V.32. – No.1/2. – P.142–145.

The modern situation and directions of nanometer optical and matrix array emitter lithography development is considered. The input data and calculation of structure and basic elements of architecture system is described. The integrated SOI CMOS structures are offered on the basis of base matrix crystals for realization of logic, memory and management for matrix emitters.

Key words: nanometer lithography of architecture element, SOI CMOS structure, microelectronic devices.

УДК 621.382, 546.28

ББК 31.233, 32.97

Б.В. Атаманюк

ДЕКОМПОЗИЦІЯ ТА ВЕРИФІКАЦІЯ ТОПОЛОГІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ СХЕМ

За допомогою нерва канонічного покриття графа, що відповідає інтегральній схемі або алгоритмічному процесу проектування топології інтегральної схеми, проводиться декомпозиція графа за хвильовим алгоритмом, через континуумзначну ретракцію та стереографічну проекцію проводиться планаризація графа, за допомогою фундаментальної групи та відповідних гомотопних теорем здійснюється верифікація графа на лінійну зв'язність.

Ключові слова: інтегральна схема, розбиття, верифікація.

Природно подавати окремі елементи інтегральної схеми вершинами, а з'єднання – дугами графа.

Граф називається регулярним, якщо кожне ребро з'єднує тільки два вузли, і нерегулярним, якщо існують ребра, які з'єднують не два, а кілька вузлів графа, тобто ребро одним краєм приєднується не до вузлів, а до ребер. Якщо коефіцієнт розгалуження більший за одиницю, то таку мережу називають багатоеlementною або багатовіконною.

Нехай r – кратність розгалуження графа $G = \{V, E\}$ в даній вершині $a \in V$. Позначимо $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, тобто множина всіх ребер графа E складається з множини E_1 : усіх ребер, що належать зафіксованому фрагменту Φ графа G , E_2 – множина тих ребер, що одним кінцем містяться у Φ , іншим – у доповненні $\bar{\Phi}$ і E_3 – множина ребер, що розміщені за межами фрагмента Φ , тобто $E_3 = \{e \in E / e \notin \Phi\}$. Тоді ясно, що сумарна кратність розгалужень $r(\Phi) = r(E_1) + r(E_2)$.

Потрібно знайти таке розбиття $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ графа $G = \{N, E\}$ на частини, при якому мінімізується кількість підграфів Ω_i , а також мінімізується кількість зв'язків між ними, тобто $\sum r(E_2) \rightarrow \min$.

Мінімізація кількості фрагментів здійснюється методом оптимізації згортання графа з побудовою дерева згортання. Це дерево будують так: до найнижчого рівня відносимо всі вершини $a \in (V, E)$, тобто приймаємо $X_1 \equiv V$. Позначимо вибраний критерій через F . Тоді на першому кроці виділяємо з множини X_1 рівноцінні за вибраним критерієм F групи елементів (по два, які утворюють ребра). Сформовані групи належать до множини X_2 – другого рівня згортання. На другому кроці беремо елементи з двох множин X_1 та X_2 і за тим же критерієм F формуємо множину X_3 як об'єднання вибраних елементів з X_1 та X_2 і т. д. На найвищому рівні одержимо вершину X_n , що містить об'єднання всіх вершин із множини X_1 . Ця вершина називається коренем дерева згортання. Насправді вершина X_n – це символічне позначення U всіх вершин графа, але вибрана вона специфічним способом через дерево згортання.

Нехай зафіксовано дві вершини x_k та x_j . Позначимо через b_{kj} кількість ребер, що з'єднують ці дві вершини й не виходять за межі фрагмента Φ . Позначимо $a_n + a_j = r(E_2(x_k)) + r(E_2(x_j))$ – сумарна кратність вершин, з яких ребра виходять за межі фрагментів. Позначимо через c_{kj} сумарні кратності обох вершин x_k та x_j . Тоді цільова функція F_{kj} із коефіцієнтами ω_{kj} має вигляд: $F_{kj} = \omega_1 b_{kj} + \omega_2 c_{kj} - \omega_3 (a_k + a_j)$. При $\omega_3 = 0$ шукаємо пару фрагментів, що мають максимальну кількість зовнішніх зв'язків $\max(\omega_1 b_{kj} + \omega_2 c_{kj})$. При $\omega_1 = 0$ шукаємо пару фрагментів, що мають

мінімальну кількість зовнішніх зв'язків. При $\omega_2 = 0$ шукаємо максимальні різниці між числами внутрішніх та зовнішніх зв'язків.

Згідно з [1] недоліком методу оптимального згортання є випадкове призначення перших максимальних підграфів, що призводить до вимушеного об'єднання в одному підграфі слабко зв'язаних частин. Але цього можна уникнути, якщо користуватися хвильовим алгоритмом, тобто починати побудову множини першого рівня X_1 із тих вершин, які мають максимальну кратність розгалуження $r(a)$, а далі користуватися вибором вершин на одиницю меншої кратності розгалуження і т. д.

На кожному графі можна ввести покриття зірками його вершин, позначимо його ω . Воно називається канонічним покриттям. Зіставляємо з цим покриттям його нерв $N(\omega)$ – абстрактний комплекс, що складається з одновимірних симплексів – коли дві вершини з'єднуються ребром, з двовимірних симплексів – коли в даній вершині маємо потрібне розгалуження, з тривимірних симплексів – коли з даної вершини виходить чотири ребра і т. д. Тоді розмірність Лебега даного нерва $\dim N(\omega)$ дорівнює максимальній розмірності симплексів даного нерва й дорівнює максимальній кратності розгалужень. Об'єднання T^0 усіх 0-вимірних симплексів, які є підмножинами нерва $N(\omega)$ даного графа, називаються 0-вимірним скелетоїдом. Насправді це сукупність вершин графа. Об'єднання T_1 усіх ребер графа називаємо одновимірним скелетоїдом, об'єднання всіх трикутників, що відповідають трикратним розгалуженням графа, називаємо двовимірним скелетоїдом і т. д. Тоді нерв $N(\omega)$ записується як об'єднання скелетоїдів менших розмірностей:

$$N(\omega) = T^0 \cup T^1 \cup T^2 \cup \dots \cup T^N, \text{ де } N = \dim N(\omega).$$

Назвемо два графи тотожними, якщо в них збігаються не лише нерви, а й усі скелетоїди. Скелетоїду найбільшої розмірності N поставимо у відповідність прадерево згортки I рівня згідно з методом оптимального згортання схем [1]. Скелетоїд розмірності $N-1$ відповідає прадереву II рівня. Суть хвильового алгоритму – “нарощування” скелетоїдів спочатку від скелетоїда T^N , далі – приєднання скелетоїда T^{N-1} , і аж до приєднання скелетоїда T^1 . За допомогою такого алгоритму одержимо нерв $N(\omega)$.

Використовуючи “променевий” алгоритм із [2], можна виявити ділянки, які не зайняті топологією всередині кристала. Вибираючи всередині цієї ділянки довільну точку O так, щоб вона геометрично містилася в центрі кристала (або в околі центра), застосуємо неперервну деформацію (гомотопію H). Можна вважати, що кристал має форму кулі, а точка O – її центр. Перетворення H будується так: якщо вершина A є вершиною куба, то радіус $OA = R$ не змінюється; якщо точка E міститься на грані куба, або на ребрі й не збігається з жодною вершиною, то розтягуємо відрізок OE по радіусу на довжину R за формулою: $H(x) = (R/r)x$, де $R = OA$ – половина великої діагоналі куба, а $r = OE$ – відстань від центра O до вибраної точки E . Зауважимо, що об'ємна топологія інтегральної схеми також розтягнеться, але без утворення нових самоперетинів чи розривів. За вибором точка O не збігається з жодною вершиною графа, який реалізує топологію інтегральної схеми. Це означає, що будь-який вузол топології інтегральної схеми буде на деякій ненульовій відстані від точки O всередині кулі, утвореної гомотопією з кристала. Далі застосуємо нове перетворення (так звану континуумзначну ретракцію) до одержаної кулі. Це буде така ретракція кулі на обмежуючу її сферу S , що образами точок B (вузлів топології) будуть опуклі круги на сфері S з центрами в точках $T = OB \cap S$ і радіусами, що дорівнюють $\pi r = \pi |BT|$. Таким чином, кожний вузол B (відповідно й вершина B даного графа) відображається на круг (T, r) , який при відповідному гомеоморфізмі можна вважати плоским. Побудоване відображення буде неперервним. Зауважимо, що всі точки сфери S при такому відображенні залишаються нерухомими (тому воно й називається континуумзначною ретракцією). Точки, які містяться на одному радіусі кулі, відображаються в концентричні круги із спільним центром, але різними радіусами r , тому такі круги на площині можна розрізати, а значить – топологічно розвести. Ураховуючи те, що кількість вузлів скінченна, то можна розвести й відповідні вузли інтегральної схеми. Залишається відновити ребра графа, з'єднавши відповідні вузли на площині. Щоб одержати з опуклих сферичних кругів плоскі, можна використати стереографічну проекцію, вибравши полюс за межами топології інтегральної схеми, але на сфері S . Зауважимо, що стереографічна проекція – це

топологічне відображення сфери з вирізаним полюсом на екваторіальну площину, при якому не буде ні розривів, ні самоперетинів.

Таким чином, ми одержали планаризацію об'ємної топології інтегральної схеми, розміщеної на кристалі, який має форму куба.

Далі введемо поняття фундаментальної групи, або групи Пуанкаре, яка визначається трьома теоремами, що доводяться в курсах диференціальної геометрії й топології; для кращого розуміння геометричної сутності фундаментальної групи наводимо детальні доведення цих теорем, хоча вони не є результатами автора, але будуть інтенсивно використані в даній статті.

Теорема 1. (Коректність означення композиції гомотопічних класів петель).

Якщо маємо дві петлі $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$ та $\delta: [0, 1] \rightarrow G$, що $\gamma(0) = \gamma(1) = \delta(0) = \delta(1) = x_0$, то композицією двох петель називається петля з тією ж відміченою точкою x_0 , яка задається формулою:

$$\Phi(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, 1/2], \\ \delta(2t-1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Далі гомотопічним класом $[\varphi]$ називаються множини всіх петель, тобто $[\varphi] = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow G, \gamma(0) = \gamma(1) = x_0, \text{ що } \gamma \text{ гомотопне } \varphi\}$. Гомотопія петель означає, що існує неперервне відображення $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$, таке, що $H(t, 0) = \gamma(t)$, $H(t, 1) = \varphi(t)$, $H(0, \xi) = H(1, \xi) = x_0$.

Теорема стверджує, що означення композиції гомотопічних класів $[\varphi]$ та $[\psi]$ за формулою $[\varphi] \circ [\psi] = [\varphi \circ \psi]$ коректне для будь-яких петель, тобто для будь-яких петель γ гомотопне φ та δ гомотопне ψ маємо $[\varphi] \circ [\psi] = [\gamma] \circ [\delta]$.

Доведення. Оскільки φ гомотопне γ , то існує гомотопія $H(t, \xi)$ така, що виконуються певні умови:

$$H(t, 0) = \gamma(t), \quad H(t, 1) = \varphi(t), \quad H(0, \xi) = H(1, \xi) = x_0.$$

Так само з умови, що δ гомотопне ψ , випливає, що існує гомотопія $K(t, \xi)$ така, що: 1) $K(t, 0) = \delta(t)$, 2) $K(t, 1) = \psi(t)$, 3) $K(0, \xi) = K(1, \xi) = x_0$. Для того, щоб довести $[\varphi] \circ [\psi] = [\gamma] \circ [\delta]$, досить побудувати гомотопію, яка з'єднає $\varphi \circ \psi$ та $\gamma \circ \delta$. Оскільки:

$$\gamma \circ \delta = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, 1/2], \\ \delta(2t-1), & t \in [1/2, 1], \end{cases} \text{ а також } \varphi \circ \psi = \begin{cases} \varphi(2t), & t \in [0, 1/2], \\ \psi(2t-1), & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

то гомотопія, яка з'єднає $\varphi \circ \psi$ та $\gamma \circ \delta$, задається формулою:

$$F(t, \xi) = \begin{cases} H(2t, \xi), & t \in [0, 1/2], \\ K(2t-1, \xi), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Теорема 2. Множина гомотопічних класів петель утворює групу, яка називається фундаментальною групою з відміченою точкою x_0 .

Доведення. Досить довести виконання трьох аксіом групи.

Аксіома 1. $([\varphi] \circ [\psi])[\theta] = [\varphi]([\psi] \circ [\theta])$.

Аксіома 2. Існує одиниця $[e]$, де e – постійна дуга, $e(t) \equiv x_0$ для будь-якого $t \in [0, 1]$ така, що $[\varphi] \circ [e] = [e] \circ [\varphi] = [\varphi]$.

Аксіома 3. Для будь-якого гомотопного класу $[\varphi]$ існує зворотний елемент $[\varphi(t)]^{-1} = [\varphi(1-t)]$.

Доведення аксіом.

$$[\varphi(t)] \circ [\varphi(t)]^{-1} = [\varphi(t) \circ \varphi(1-t)] = \varphi \circ \psi = \begin{cases} \varphi(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \varphi(1-2t), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = [e],$$

а також $[\varphi(t)] \circ [e] = [\varphi(t) \circ e(t)] = [\varphi(t)]$.

Відповідні формули для гомотопій мають вигляд:

$$G(t,s) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{2t}{1-s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2}, \\ e\left(\frac{2t+s-1}{2s}\right), & \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{s+1}{2}, \text{ тут } \varphi(t) \circ e(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & t \in [0, 1/2], \\ e(2t-1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases} \\ \varphi\left(\frac{2t-1}{s-1}\right), & \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Треба побудувати гомотопію $F(t,\xi)$ таку, що $F(t,0) = \varphi(t) \circ e(t)$, $F(t,1) = \varphi(t)$. Така гомотопія має вигляд:

$$F(t,\xi) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{2t}{1+\xi}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1+\xi}{2}, \\ e\left(\frac{2t-\xi-1}{1-\xi}\right), & \frac{1+\xi}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Якщо

$$(\varphi \circ \psi)(t) = \begin{cases} \psi(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \varphi(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

тоді

$$\theta \circ (\varphi \circ \psi) = \begin{cases} (\varphi \circ \psi)(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \theta(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

або

$$\theta \circ (\varphi \circ \psi) = \begin{cases} \psi(4t), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ \varphi(4t-1), & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \theta(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

так само

$$(\theta \circ \varphi) \circ \psi = \begin{cases} \psi(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \varphi(4t-2), & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ \theta(4t-3), & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тоді гомотопія між $\theta \circ (\varphi \circ \psi)$ та $(\theta \circ \varphi) \circ \psi$ задається такою формулою:

$$H(t,s) = \begin{cases} \psi\left(\frac{4t}{s+1}\right), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}, \\ \varphi(4t-s-1), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}, \\ \theta\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Теорема 3. У лінійно-зв'язному просторі G для будь-яких двох різних точок x_0 та y_0 фундаментальні групи рівні.

Доведення. Установимо ізоморфізм фундаментальних груп із відміченими точками x_0 та y_0 . Нехай $\varphi(t) = \gamma^{-1}(t) \circ \psi(t) \circ \gamma(t)$, де γ – шлях, що лінійно зв'язує дві точки x_0 та y_0 , тобто $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y_0$. Це означає, що кожній петлі $\psi(t)$ з відміченою точкою y_0 відповідає петля

$\varphi(t)$ заданою формулою з відміченою точкою x_0 . Позначимо таке відображення через π , тобто $\pi[\psi(t)] = [\varphi(t)]$. Це відображення зіставляється з гомотопічним класом $[\psi(t)]$ із відміченою точкою y_0 із гомотопічним класом $[\varphi(t)]$ із відміченою точкою x_0 . Відображення π задано коректно тому, що з умови $\psi_1 \cong \psi_2$ випливає $\gamma^{-1} \circ \psi_1 \circ \gamma \cong \gamma^{-1} \circ \psi_2 \circ \gamma$, тобто $\varphi_1 \cong \varphi_2$. Ізоморфізм π означає, що: 1) π – гомоморфізм, 2) π – відображення “на”. Гомоморфізм означає, що $\pi([f] \circ [g]) = \pi[f] \circ \pi[g]$. Але:

$$\begin{aligned} \pi([f] \circ [g]) &= \pi[f \circ g] = [\gamma^{-1} \circ f \circ g \circ \gamma] = \\ &= [\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma \circ \gamma^{-1} \circ g \circ \gamma] = [\gamma^{-1} \circ f \circ g] \circ [\gamma^{-1} \circ g \circ \gamma] = \pi[f] \circ \pi[g]. \end{aligned}$$

Доведемо, що π – відображення “на”, тобто що для будь-якої петлі ψ із відміченою точкою y_0 існує така петля φ із відміченою точкою x_0 , що $\pi[\varphi] = [\psi]$. Беремо $\varphi = \gamma \circ \psi \circ \gamma^{-1}$. Тобто $\pi[\varphi] = [\psi]$ за побудовою, бо $\pi(\varphi) = \gamma^{-1} \circ \varphi \circ \gamma = \gamma^{-1} \circ \gamma \circ \psi \circ \gamma^{-1} \circ \gamma = \psi$. Теорема доведена.

Виникає запитання про обчислення фундаментальної групи $\pi_1(G, x_0)$ графа з відміченою точкою. Відповідь проста: стягуємо всі ребра, що належать скелетоїду T^1 , до вершин, які не є розгалуженими. Якщо на графі маємо дугу – петлю, то вона також стягується у вершину x_0 , з якої виходить і в яку вона входить. Така петля відповідає оператору циклу при проектуванні топології інтегральної схеми.

У результаті стягування по дугах залишаються паралельні фрагменти графа, що відповідають альтернативному застосуванню різних операторів, або ті фрагменти, що утворюють замкнений контур. Замкнений контур як фрагмент графа від точки x_0 до точки y_0 означає, що до входу x_0 можуть застосовуватися дві різні послідовності операторів, що призводять до одного й того ж виходу y_0 . У таких випадках ясно, що дуги не стягуються в точку і ці фрагменти будуть ділянками нетривіальної фундаментальної групи. Один такий контур означає множення фундаментальної групи на множину цілих чисел. У зв'язку з тим, що кількість вершин графа – скінченна кількість, фундаментальну групу можна обчислити в кожній вершині графа.

Тоді алгоритм верифікації графа на лінійну зв'язність має такий вигляд:

1. Вибираємо початкову точку x_0 , що є вершиною графа G і має максимальне розгалуження, покладемо $k = 0$.
2. Обчислюємо фундаментальну групу $\pi(G, x_k)$ графа G у вершині x_k .
3. Обчислюємо фундаментальну групу $\pi(G, x_{k+1})$ в наступній вершині x_{k+1} , вершини вибираємо за вищезгаданим хвильовим алгоритмом.
4. Порівнюємо фундаментальні групи $\pi(G, x_k)$ та $\pi(G, x_{k+1})$. Якщо вони рівні, то збільшуємо лічильник $k = k + 1$ і переходимо до пункту 2.
5. Якщо фундаментальні групи різні, то ми одержуємо протиріччя з теоремою 3 і робимо висновок про відсутність лінійної зв'язності графа G .

Зауважимо, що з нерівності фундаментальних груп графа у відмічених вершинах випливає незв'язність графа, але з незв'язності графа ще не випливає нерівність фундаментальних груп. Тобто якщо фундаментальні групи в різних вершинах графа рівні, то граф може й не бути зв'язним. Отже, ця умова є необхідною, але недостатньою.

Для лінійної зв'язності графа достатньо, щоб він збігався зі своєю МЗС (максимальною зчепленою системою).

Висновки. У даній роботі ставиться у відповідність інтегральній схемі деякий граф. Тоді задачі декомпозиції, планаризації та верифікації топології інтегральних схем постають у вигляді таких самих задач для графа. Так само можна зіставити алгоритмічний процес проектування інтегральної схеми методом кремнієвої компіляції із деяким графом, ребрами якого є оператори. У цьому випадку задача верифікації алгоритмічного процесу також зводиться до верифікації графів. За допомогою топологічних методів із використанням нерва канонічного покриття графа, що відповідає інтегральній схемі або алгоритмічному процесу, проводиться декомпозиція графа за хвильовим алгоритмом, а також через континуумзначну ретракцію та стереографічну проекцію проводиться планаризація графа, за допомогою

фундаментальної групи та відповідних гомотопічних теорем проводиться верифікація графа на лінійну зв'язність.

1. Мельник Р.А. Алгоритми ієрархічного моделювання площинної та просторової топології НВІС. – Львів: Вид-во ДУ “Львівська політехніка”, 1999. – 140 с.
2. Atamanuk O. Verification of topology and “radial” algorithms in submicron technology of IC // Сучасні проблеми радіоелектроніки, телекомунікацій, комп'ютерної інженерії: Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції TCSET'2006 (Львів – Славське, 28 лютого – 4 березня 2006 р.). – Львів, 2006. – С.438–439.
3. Проектирование СВИС / М. Ватанабэ, К. Асада, К. Кани, Т. Оцуки: Пер. с япон. – М.: Мир, 1988. – 304 с.
4. Эйрис Р. Проектирование СВИС. Метод кремниевой компиляции. – М.: Наука, 1988. – 456 с.

In this paper we make the decomposition, planarization and verification of topology of integrated circuit on the linear connectedness with help of continuum image retraction, stereographic projection and fundamental groups.

Key words: *integrated circuit, decomposition, verification.*

УДК 546.28, 621.38

ББК 31.233, 32.844.1

О.Б. Атаманюк

ВЕРИФІКАЦІЯ ПРОЦЕСУ КРЕМНІЄВОЇ КОМПІЛЯЦІЇ ТОПОЛОГІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ СХЕМ

Задача верифікації процесу кремнієвої компіляції, що моделюється ймовірнісним графом, зводиться до скорочення цього графа, а далі – до знаходження всіх графів, що задовольняють часово-ймовірнісний критерій; використовуються стрічкові матриці та метод вилучення проміжних вершин.

Ключові слова: *кремнієва компіляція, стрічкові матриці, метод вилучення проміжних вершин.*

Для забезпечення стовідсоткової придатності топології ВІС необхідно провести такі верифікації:

- 1) перевірку геометричних параметрів;
- 2) перевірку трасування міжз'єднань;
- 3) перевірку електричних характеристик.

При перевірці першого виду застосовуються такі операції з багатокутниками: логічні операції; топологічні операції типу накладання та включення; з'єднувальні операції (простежується шлях з'єднання); операції щодо перевірки розмірів (для виявлення суперечностей між правилами проектування та геометрією транзисторів і міжз'єднань); зміна розмірів (стискування та розтягування); поділ на прямокутники або трапеції (так званий метод смуг, який застосовують для розбиття кристала на координатні ділянки).

До алгоритмів, що реалізують логічні операції, належить алгоритм бітової карти. Цей алгоритм ділить ділянку уявною координатною сіткою та формує структуру даних, що містить інформацію про порожні й заповнені клітини. Насправді формується таблиця, у кожній клітині якої розміщені дві цифри: 0 або 1 у першому розряді і 0 або 1 – у другому.

Перший розряд означає наявність або відсутність у даній клітині фігури A , а другий – наявність або відсутність у даній клітині фігури B .

Тоді виділення комірок виду 1 1 означає взяття перерізу (логічне AND), виділення комірок 0 1 або 1 0 означає взяття об'єднання (логічне OR). Логічні операції можуть також реалізуватися векторними алгоритмами. Якщо сторони фігури записувати векторами так, що обхід зовнішнього контуру здійснюється проти годинникової стрілки (фігура весь час справа), а обхід внутрішнього – за годинниковою стрілкою (фігура весь час справа), то, поділивши ділянку сіткою, розставляємо 0 1 або 1 0, 0 0 або 1 1 у кожній клітині. Далі алгоритм працює так само, як і в бітовій карті.

Логічні операції застосовуються для визначення розміщення елементів у даному контурі, а також для виявлення контактних площадок чи ділянок для методу “шлях деформації”. Застосовуючи операцію AND для шару полікристалічного кремнію та дифузійного шару, можна виявити ділянку каналу транзистора.

Застосовуючи операцію AND (логічне I) для нашарування з трьох шарів (дифузійний, металевий та контактний), можна виявити входи та виходи транзистора.

При перевірці другого типу – трасування з'єднань між схемами – проводимо такі операції:

- 1) розпізнавання схемних елементів;
- 2) відновлення з'єднань між елементами;
- 3) перевірка логічних функцій.

Відновлення з'єднань проводять через перевірку таких стадій:

- 1) наявність коротких замикань;
- 2) наявність провідників, які мають тільки один приєднаний край;
- 3) наявність ізольованих провідників та ізольованих контактів;
- 4) наявність провідників, через які не проходить струм, незважаючи на те, що відповідні транзистори проводять;
- 5) правильність підключення всіх транзисторів.

Зауважимо, що метою перевірки електричних характеристик не є розв'язання громіздких диференціальних рівнянь, а знаходження наближених значень, які могли би свідчити про погіршення характеристик схеми порівняно з існуючими моделями до початку проектування. Ці погіршення можуть з'являтися за рахунок паразитних ємностей та опорів.

Базовими задачами при верифікації плоских зображень є такі: задача про перетини відрізків, задача про перетини багатокутників, класифікація внутрішніх і зовнішніх точок, розділення багатокутників на ділянки та на прямокутники, розділення на трапеції, знаходження мінімальної ширини для даного багатокутника.

Нехай задано вершини замкнутого контуру без самоперетинів і деяку точку в площині даного контуру й треба виявити місцезнаходження даної точки відносно контуру. Для цього досить провести через дану точку пряму, яка не перетинає жодної вершини замкнутого контуру, і ввести два лічильники перетинів проведеної прямої зі сторонами контуру: один лічильник – на одному боці від досліджуваної точки, другий – на другому. Проводимо аналіз: якщо обидва лічильники парні, то досліджувана точка міститься зовні багатокутника; якщо обидва лічильники непарні, то досліджувана точка міститься всередині багатокутника; якщо один лічильник парний, інший – непарний, то досліджувана точка міститься на ребрі.

Для того, щоб провести пряму, яка не проходить через жодну вершину багатокутника, досить знайти максимум з усіх куткових коефіцієнтів прямих, проведених через досліджувану точку й кожну з вершин багатокутника. Додавши до максимуму одиницю, одержимо кутовий коефіцієнт прямої, яка не проходить через жодну з вершин багатокутника.

Позаяк пряма пронизує контур на зразок рентгенівського променя, то назовемо такий алгоритм “променеви́м”.

Застосуємо “променеви́й” алгоритм до виявлення ділянок ущільнення. Уведемо на кристалі осі координат, уважаючи, що Ox , Oy – це планарні осі, а Oz – вертикальна вісь, яка пронизує всі шари кристала. Тоді у верхньому шарі наносимо уявну координатну сітку й методом сканування визначаємо контури верхнього шару. За методом бітової карти заповнюємо числами всі координатні клітини, причому числа мають бути чотирирозрядні. Перший розряд: наявність (1) або відсутність (0) у даній клітині червоного поля (полікремнієвого контуру); другий розряд – наявність (1) або відсутність (0) у даній клітині зеленого поля (дифузійного шару іонної імплантації); третій розряд – наявність (1) або відсутність (0) у даній клітині синього поля (колір металізації); четвертий розряд – наявність (1) або відсутність (0) у даній клітині чорного поля (контактних вікон). Решта розрядів, які йдуть після чотирьох, позначає номер бітової карти або номер шару, починаючи згори, наприклад 0001. Далі проводимо уявні вертикальні перерізи по координатних сітках кожного шару в кристалі. Маючи інформацію у вигляді більше ніж чотирирозрядного числа про кожну клітину, можна за допомогою променевого алгоритму порахувати кількість перетинів вертикального променя з непорожніми клітинами. Якщо таке число рівне нулю, то це означає, що в даному

вертикальному стовпці немає жодного контуру нашої інтегральної схеми, а тоді цей стовпець можна стиснути за методом “шлях деформації”, щоб зекономити площу кристала або використати його для нового проектування.

За допомогою “променевого” алгоритму можна визначити, чи будуть сусідніми по вертикалі клітини з полями однакового кольору. Якщо це так, то одиничка розміщена в однакових розрядах на сусідніх бітових картах, тоді між цими топологічними шарами можна робити вертикальні отвори для провідників. Зауважимо, що цим же “променевим” алгоритмом можна обчислити кількість топологічних шарів однакового кольору, вводячи для кожного кольору лічильники перетинів із вертикальним променем.

Отже, застосування “променевого” алгоритму у вертикальних розрізах дає можливість ущільнити або відновити об’ємну топологію.

Назвемо мінімальною шириною многокутника найменшу з усіх мінімальних відстаней між будь-якими двома точками на краю цього многокутника, причому мінімальна відстань між точками береться за відрізком, який повністю належить даному многокутнику. Задача знаходження мінімальної ширини застосовується, наприклад, для знаходження мінімальної ширини трас або мінімальної відстані між провідниками, яка повинна бути більшою від допустимої за проектними нормами. Це вимагається для того, щоб виключити взаємні електричні впливи між сусідніми провідниками.

Розв’язування даної задачі проводиться комбінацією двох методів. За методом “розділай і володарюй” серед усіх вершин даного многокутника знаходимо найближчу пару. Методом перебору знаходимо всеможливі відстані від усіх вершин многокутника до найближчих ребер. Серед цих відстаней вибираємо найменшу й порівнюємо її з відстанню між найближчою парою. Менша з них і буде шириною многокутника.

Універсальний метод контролю КТО – використання трьох теоретично-множинних операцій: об’єднання, перетину та доповнення. При переході до доповнення можна знайти допустимі мінімальні розміри між блоками або трасами; при взятті перерізу можна знайти мінімальні розміри площ, які перетинаються: якщо перетин порожній, то перекриття площ відсутні. Комбінація цього універсального методу з векторним та променевим методом [1] забезпечує високу швидкість та лінійну залежність часу обчислень від об’єму інтегральної схеми. Існує ще два методи: матричний метод, або метод “бітової карти”, та координатно-сітковий метод. Розглянемо матричний метод детальніше. Нехай маємо n ділянок. Якщо A належить B , то парі A, B ставимо у відповідність число 1. Якщо B належить A , то даній парі ставимо у відповідність число 2. Якщо множини A і B не перетинаються, то даній парі ставимо у відповідність число 3, якщо перетин множин A і B непорожній, то даній парі ставимо у відповідність число 4. Одержані числа розміщуємо в матриці, розміром $m \times n$. Таким чином, числа 1, 2, 3, 4 фіксують взаємне розміщення n ділянок.

Наступний крок – збільшуємо всі ділянки інтегральної схеми на половину допустимих обмежень і складаємо нову матрицю взаємних перетинів. Якщо одержані дві матриці збігаються, то КТО контрольоване. Якщо виявляться відмінності в побудованих матрицях, то вони вказують на ті ділянки інтегральної схеми, відстань між якими менша від допустимого КТО (тут половина допустимих обмежень береться саме тому, що $1/2 + 1/2 = 1$, тобто розширення в обидва боки береться в межах допустимих норм).

Удосконаленням цього методу є метод дискретної топологічної моделі (ДТМ). Суть його така: методом бітової карти приписуємо кожній клітині координатної сітки число 0 або 1 залежно від того, чи вузол цієї сітки містить елемент топології, чи ні; якщо містить – то число 1, якщо ні – то 0.

Позначимо через M_i множину точок ДТМ, які належать деякій i -тій ділянці. Нехай p – фрагмент $V_p = \bigcup_{i=1}^k M_i$. Позначимо $T_p = V_p \setminus M_i$ – це перфорований фрагмент, з якого вирізано M_i .

За тими ж правилами побудови ДТМ будемо для кожного M_i множину Φ_i – таких точок, які містяться від M_i не більше, ніж на допустиму величину, тобто Φ_i – допустима оболонка M_i . Тоді беремо T_p перетин із Φ_i . Якщо $\Phi_i \cap T_p = \emptyset$, то контрольовані відстані допустимі, якщо $\Phi_i \cap T_p \neq \emptyset$, то контрольовані відстані перевищують допустимі.

Назвемо ймовірнісним орієнтованим граф $G(X, \Gamma)$, що задається такими умовами:

1. Вершини $x \in X$ графа G відповідають початку та закінченню дії оператора кремнієвої компіляції.
2. Дуги графа $\gamma \in \Gamma$ відповідають операторам кремнієвої компіляції.
3. Ваги дуг відповідають характеристикам надійності (безпомилкове виконання, або – з помилкою) та часу виконання операторів кремнієвої компіляції.
4. Ймовірності правильного виконання операторів незалежні між собою.
5. Граф може мати петлі або замкнуті контури, що відповідають послідовності операторів, які повторюються циклічно чи виконуються альтернативно.
6. Кожна j -та вершина ймовірнісного графа повинна задовольняти умову стохастичності:

$\sum_{i=1}^n P_{ji} = 1$, де P_{ji} – ймовірність правильного виконання оператора при переході з i -тої вершини в j -ту. Число n – кількість дуг, що виходять з j -тої вершини.

Задача верифікації процесу кремнієвої компіляції, що моделюється ймовірнісним графом $G(X, \Gamma)$, зводиться до скорочення цього графа, тобто заміни його новим графом $G(Y, \Delta)$ із множиною вершин Y та множиною дуг – операторів $\gamma \in \Delta$ таких, що Y складається з початкових x_0 та кінцевих y_0 точок процесу кремнієвої компіляції. Тобто множина Y одержується з множини X вилученням проміжних вершин.

Дуги $\gamma \in \Delta$ у новому графі $G(Y, \Delta)$ повинні відповідати операторам кремнієвої компіляції, які йдуть від початкової до кінцевої точки та не входять у композицію з іншими дугами, тобто не входять як оператори ні в яку послідовність операторів кремнієвої компіляції. Ваги таких дуг за відповідними правилами обчислюються як функціональні залежності від ваг проміжних дуг попереднього графа $G(X, \Gamma)$. Це означає, що ми вміємо обчислювати ймовірності та часи переходів від початкових вершин x_0 до кінцевих вершин y_0 графа $G(Y, \Delta)$. Таким чином, після скорочення графа $G(X, \Gamma)$ до графа $G(Y, \Delta)$ задача верифікації правильного виконання процесу кремнієвої компіляції зводиться до знаходження всіх графів $G(Y, \Delta)$, що задовольняють часово-ймовірнісний критерій: ймовірність правильного переходу від вершини x_0 до вершини y_0 має бути максимальною при однакових часах або час має бути найменшим при однакових максимальних ймовірностях. При скороченні ймовірнісних графів $G(X, \Gamma)$ до $G(Y, \Delta)$ застосовуються правила еквівалентних перетворень на часово-ймовірнісні характеристики для паралельних дуг, послідовних дуг та дуг-петель. Графом з послідовними дугами називається такий граф, що відповідає послідовному застосуванню операторів кремнієвої компіляції. Тоді, використовуючи вагову незалежність графа, можна записати правило об’єднання послідовних дуг: фрагмент ймовірнісного графа, що складається з двох послідовних дуг, які відповідають послідовному застосуванню двох операторів кремнієвої компіляції, може бути замінений однією дугою, що відповідає одному оператору кремнієвої компіляції з часово-ймовірнісними характеристиками, які обчислюються за формулами: $P_{ij} = P_{ik} \cdot P_{kj}$, а також $t_{ij} = t_{ik} + t_{kj}$. Аналогічно, графом із паралельними дугами називається граф, що відповідає альтернативному виконанню двох операторів кремнієвої компіляції з відповідними часовими та ймовірнісними характеристиками p_{ij} , t_{ij} та q_{ij} , s_{ij} . Тут p і q пов’язані задекларованою умовою стохастичності $p + q = 1$, якщо паралельних дуг тільки дві, або умовою $p + q \leq 1$, якщо паралельних дуг більше ніж дві. Тоді правило об’єднання паралельних дуг полягає в заміні фрагмента ймовірнісного графа, що складається з цих двох паралельних дуг, однією еквівалентною дугою, відповідно – одним оператором кремнієвої компіляції, ймовірності правильного виконання якого обчислюються за формулою:

$$P_{ij} = p_{ij} + q_{ij},$$

а часові характеристики – за формулою:

$$T_{ij} = \frac{p_{ij}t_{ij} + q_{ij}s_{ij}}{p_{ij} + q_{ij}}.$$

Ймовірнісним графом із дугою-петлею називається граф, що відповідає послідовному застосуванню двох операторів кремнієвої компіляції, один з яких – циклічний оператор, що має входом і виходом одну й ту ж вершину.

Сформулюємо правило вилучення дуги-петлі. Фрагмент графа дуги з петлею може бути замінений однією дугою, відповідна послідовність двох операторів, один із яких – оператор циклу, може бути замінена одним оператором, часові та ймовірнісні характеристики якого обчислюються за формулами:

$$P_{ij} = \frac{P_{ij}}{1 - P_{ii}},$$

а також:

$$T_{ij} = t_{ij} + \frac{t_{ii} P_{ii}}{1 - P_{ii}}.$$

Алгоритм скорочення ймовірнісного графа використовує поняття стрічкової матриці (S -матриці), тобто матриці розміром $4 \times N$, де N – кількість дуг графа $G(X, \Gamma)$.

Будь-який i -тий рядок такої матриці, що відповідає дузі δ_{ij} , записуємо так: $\delta_i = (x_i, y_i, p_i, t_i)$, де x_i – номер вершини, з якої виходить дуга δ_{ij} , а $y_i = x_j$ – номер вершини, в яку входить дуга δ_{ij} , p_i – ймовірність переходу з вершини x_i у вершину y_i , тобто ймовірність p_{ij} правильного виконання відповідного оператора кремнієвої компіляції.

В основу алгоритму скорочення ймовірнісного графа покладено правила об'єднання послідовних дуг, правила заміни паралельних дуг та правила вилучення дуги-петлі. Для стрічкових матриць ці операції виконуються спеціальними алгоритмами.

Алгоритм 1.

Об'єднання послідовних дуг (вилучення проміжної вершини):

1. Виділяємо множину всіх дуг $A = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, які входять у вершину $x_j = y_r$, $r = 1, 2, \dots, m$. Записуємо r -й член стрічкової матриці у вигляді: $\delta_r \{x_r, y_r, p_r, t_r\}$.

2. Виділяємо другу множину $B = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ усіх дуг, які виходять із вершини з номером j , але для того, щоб розрізняти рядочки, нумеруємо j -у вершину як x_u , $u = 1, 2, \dots, k$. Тоді рядочок стрічкової матриці записуємо формулою: $\gamma_u = \{x_u, y_u, p_u, t_u\}$.

3. Вилучаємо із стрічкової матриці всі рядочки, які входять в обидві множини A і B .

4. Формуємо множину $C = A \times B$, кожний елемент якої є рядочком S -матриці виду $\alpha_{ru} = \{x_{ru}, y_{ru}, p_{ru}, t_{ru}\}$, і доповнюємо S -матрицю цією множиною. Тут $x_{ru} = x_r$, $y_{ru} = y_u$, $p_{ru} = p_r p_u$, $t_{ru} = t_r + t_u$.

У результаті ми отримали стрічкову матрицю, яка відповідає скороченому ймовірнісному графу послідовного об'єднання дуг.

Далі записуємо другий алгоритм скорочення графа з двох паралельних дуг.

1. Знаходимо на стрічковій матриці два рядки з однаковими першими двома елементами. Нехай це будуть такі рядки:

$$\{x_i, y_i, p_i, t_i\} \text{ та } \{x_j, y_j, p_j, t_j\}, \text{ де } x_i = x_j, y_i = y_j.$$

2. Замінюємо обидва знайдені рядки іншим рядком $\{x, y, p, t\}$, де

$$x = x_i, y = y_i, p = p_i + p_j, \text{ а також } t = \frac{p_i t_i + p_j t_j}{p_i + p_j}.$$

Тоді утворена стрічкова матриця буде відповідати скороченому ймовірнісному графу для двох паралельних дуг, який, у свою чергу, відповідає альтернативному застосуванню двох різних операторів кремнієвої компіляції.

Розглянемо третій алгоритм – для вилучення дуги-петлі.

Ознакою дуги-петлі є наявність у стрічковій матриці рядочка з двома однаковими першими елементами $x = y = j$. Тоді алгоритм скорочення графа з дугою-петлею має вигляд:

1. Визначити рядок $s = \{x, y, p, t\}$, в якому $x = y = j$.

2. Виділити множину $A = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$ усіх таких дуг, які виходять із j -ої вершини. Тут $\delta_r = \{x_r, y_r, p_r, t_r\}$ – рядок стрічкової матриці, $x_r = j$, причому s не належить A .

3. Вилучаємо зі стрічкової матриці s -тий рядочок із першими елементами, що збігаються, та всі рядки, що входять до множини A .

4. Усі вихідні дуги δ_r , що виходять із j -тої вершини, замінюємо дугами γ_r вигляду $\gamma_r = \{x_r, y_r, q_r, s_r\}$, де $q_r = \frac{p_r}{1-p}$, тут $p = p_{rr}$, $s_r = t_r + \frac{t p_r}{1-p}$, тут $t = t_{rr}$ для всіх $r = 1, 2, \dots, m$.

Тепер можна записати загальний алгоритм скорочення ймовірнісних графів.

1. Побудувати зважений орієнтований граф $G(X, \Gamma)$ із часово-ймовірнісними характеристиками.

2. Якщо існують паралельні дуги, то скоротити цей фрагмент графа за відповідним алгоритмом 2.

3. Якщо існує хоча б одна проміжна вершина в графі, то зафіксувати її, інакше перейти до пункту 8.

4. Якщо проміжна вершина має дугу-петлю, то перейти до пункту 5, інакше – перейти до пункту 6.

5. Видалити дугу-петлю за допомогою алгоритму 3.

6. Видалити проміжну вершину за алгоритмом 1.

7. Перейти до пункту 2.

8. Записати результат у вигляді стрічкової матриці, яка відповідатиме скороченому графу.

Отже, у результаті проведеної верифікації правильності виконання алгоритмічного процесу кремнієвої компіляції за часово-ймовірнісним критерієм із використанням стрічкових матриць та переходом до скорочених графів виявилось, що верифікація процесу проектування топології інтегральних схем збігається на алгоритмічному рівні з мінімізацією цього процесу за часово-ймовірнісним критерієм.

1. Atamanyuk R. Improvement of method of the silicic compiling through discrete optimization of topology and structurally-technological limitations of the integrated circuit // Сучасні проблеми радіоелектроніки, телекомунікацій, комп'ютерної інженерії: Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції TCSET'2006 (Львів – Славське, 28 лютого – 4 березня 2006 р.). – Львів, 2006. – С.436–437.

2. Атаманюк Р. Оптимізація процесу кремнієвої компіляції за часово-ймовірнісним критерієм // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики ЄВРИКА-2006 (Львів, 15–17 травня 2006 р.). – Львів, 2006. – С.85.

3. Эйрис Р. Проектирование СБИС. Метод кремниевой компиляции. – М.: Наука, 1988. – 456 с.

4. Проектирование СБИС / М. Ватанабэ, К. Асада, К. Кани, Т. Оцуки: Пер. с япон. – М.: Мир, 1988. – 304 с.

The verification of silicic compiling process which is modeled by the probability graphs is reduced to the shorting its graph and so to foundation all graphs which satisfy to the time-probability criterion. In this sense the band matrixes and the deleting vertexes method are used.

Key words: silicic compiling, band matrixes, vertexes method.

УДК 004.415.3+519.711

ББК 22.181

Н.В. Превисокова, Л.Б. Петришин

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВІ ОСНОВИ ДИСКРЕТНОГО ГАРМОНІЧНОГО АНАЛІЗУ В СИСТЕМІ РАДЕМАХЕРА

З єдиних позицій теоретико-числових перетворень здійснено аналіз та встановлено ряд проміжних систем функцій, що утворюють відповідні коди чи кодові системи. Визначено черговість і процедури їх творення та взаємоперетворень, що дозволило класифікувати та в майбутньому оцінити ефективність дискретного гармонічного аналізу в поданих системах функцій.

Ключові слова: унітарні функції, функції Радемахера, дискретний гармонічний аналіз, кодові системи, аналітичні взаємозалежності системи функцій.

Вступ. Останнім часом широкого розповсюдження набувають складні територіально розподілені інформаційні системи, які містять у собі засоби формування, перетворення,

передавання та оброблення інформації [1, 2]. Більшість обчислювальних систем функціонує з використанням традиційних кодів і при переході до інших, спеціалізовано орієнтованих методів кодування виникає потреба кодового та алгоритмічного адаптування. Це зумовило необхідність установаження аналітичних взаємозалежностей між базисами та системними функціями та визначення їхньої первинності та функціоналів взаємоперетворення.

Досвід наукової роботи й наукові результати [3–4] підтверджують можливість ефективної технічної, алгоритмічної, програмної реалізації та покриття більшості системних функцій із забезпеченням хороших динамічних параметрів при переході до інших методів кодування.

Проблема аналізу ефективності взаємозв'язку різних дискретних базисів і систем функцій неодноразово вирішувалась ученими в галузі цифрового оброблення та перетворення сигналів [3, 5, 6], проте не охоплювалась з єдиних теоретичних позицій усієї повноти взаємодії зв'язків різних базисів та систем функцій, взаємозалежності між базисами, системами функцій та відповідними їм кодами та кодовими системами, що не дало можливості повністю здійснити ефективні міжбазисні та міжсистемні функціональні перетворення.

У пропорованих матеріалах статті здійснено аналіз дискретних теоретико-числових базисів і систем та подано результати дослідження математичних основ, аналітичних взаємозалежностей і визначення основних властивостей, на підставі яких здійснено класифікацію базисів та систем функцій, а також створених за їх допомогою кодових систем і базисних матриць теоретико-числових трансформацій [4].

Для визначення теоретико-числових основ кодів та кодових систем здійснено дослідження основних упорядкувань базисних функцій та систем функцій, установаємо функціональні взаємозалежності базисних перетворень та кодових систем, що ними творяться.

Дискретні лінійно-збіжні теоретико-числові базиси та системи функцій підрозділяються на дискретно-гармонічні та дискретно-нерегулярні. Аналіз теоретико-числових базисів та систем функцій розпочнемо з першої групи, оскільки склад її функцій є одним з основних.

Дискретно-гармонічні теоретико-числові базиси та системи функцій. Як вихідні в засобах перетворення форми інформації широкого застосування набули унітарні коди [2, 4, 6], котрі характеризуються значною розрядною надлишковістю інформаційних слів, яка зумовлена тим, що кількість розрядів бінарного подання слова відповідає повній шкалі квантування діапазону перетворення N . Оскільки унітарні коди не є ефективними при прийманні-передаванні та цифровому обробленні, бо потребують відповідної N -розрядної шини даних, виникає необхідність підвищення ефективності кодування шляхом зменшення кількості розрядів. Щоб здійснити перехід до більш ефективних кодів, виникає необхідність аналітичного подання унітарних кодів та встановлення функціональних залежностей з іншими кодами чи системами кодування.

Для математичного подання унітарних кодів використовуються унітарні функції, які аналітично подаються таким виразом:

$$Uni(m, \theta, i) = \text{sign}(\sin(2^m \pi(\theta + i \cdot 2^{1-n}))),$$

де $n = \log_2 N$ – найвищий порядок набору системи функцій;

N – модуль цілочислових дискретних значень системи;

$\theta = t/T$; ($0 \leq \theta < 1$) – нормований параметр часу на одиничному інтервалі визначення;

$T = 2\pi$; $0 \leq t < 2\pi$; t – потокове значення часу;

$i = 0, 1, \dots, 2^{n-m} - 1$ – порядковий номер функції в наборі з номером m ;

$m = 0, 1, \dots, n$ – номер набору функцій у системі n -го порядку.

Система унітарних функцій є лінійно залежною, оскільки частина функцій системи є лінійною комбінацією інших функцій системи, і не утворює базису.

Однією із характеристичних властивостей систем кодування є ортогональність їх системних функцій за часом чи за частотою.

Унітарні функції не є ортогональними в частотній ділянці, оскільки:

$$\int_0^1 Uni(m, \theta, i) Uni(k, \theta, j) d\theta \neq 0$$

для визначених k, m, i, j , де $k \neq m$, $i \neq j$, і не ортогональні у фазовій ділянці, тому що

$$\int_0^1 Uni(m, \theta, i) Uni(m, \theta, j) d\theta \neq 0,$$

а функція $Uni(m, \theta, j)$ є результатом фазового зсуву функції $Uni(m, \theta, i)$.

Неортогональність системи унітарних функцій є її властивістю, яка зумовлює некомпактне пакування кодових елементів системи, що спричиняє до значної надлишковості інформаційних потоків.

Функції $Uni(m+1, \theta, i)$ старших порядків $m+1$ у повному наборі є результатом попарного добутку вибірових функцій $Uni(m, \theta, i)$ нижчих порядків m (крім $Uni(0, \theta, 0)$) згідно з наступними залежностями:

$$Uni(m, \theta, i) \cdot Uni(m, \theta, i + 2^{n-m-2}) = Uni(m+1, \theta, i), \quad (1)$$

$$Uni(m, \theta, i + 2^{n-m-1}) \cdot Uni(m, \theta, i + 2^{n-m-1} + 2^{n-m-2}) = Uni(m+1, \theta, i), \quad (2)$$

для яких $i = 0, 1, \dots, 2^{n-m-1} - 1$, а також згідно з

$$Uni(m, \theta, i) \cdot Uni(m, \theta, i + 3 \cdot 2^{n-m-2}) = Uni(m+1, \theta, i + 2^{n-m-2}), \quad (3)$$

для цього виразу $i = 0, 1, \dots, 2^{n-m-2} - 1$.

Доведення співвідношень (1) – (2) проведемо за індукцією.

Згідно з означенням унітарних функцій виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} Uni(m, \theta, i+1) &= \text{sign}(\sin(2^m \pi(\theta + (i+1) \cdot 2^{1-n}))) = \\ &= \text{sign}(\sin(2^m \pi(\theta + i \cdot 2^{1-n} + 2^{1-n}))) = Uni(m, \theta + 2^{1-n}, i). \end{aligned} \quad (4)$$

Твердження (1) – (2) виконуються для $i = 0$.

Припустимо, що для будь-якого $k = i$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-m-1} - 2$ твердження справедливі, тобто:

$$Uni(m, \theta, k) \cdot Uni(m, \theta, k + 2^{n-m-2}) = Uni(m+1, \theta, k) \quad (5)$$

$$Uni(m, \theta, k + 2^{n-m-1}) \cdot Uni(m, \theta, k + 2^{n-m-1} + 2^{n-m-2}) = Uni(m+1, \theta, k). \quad (6)$$

Згідно зі співвідношеннями (4)–(5) для $i = k + 1$

$$Uni(m, \theta, k+1) \cdot Uni(m, \theta, k+1 + 2^{n-m-2}) =$$

$$= Uni(m, \theta + 2^{1-n}, k) \cdot Uni(m, \theta + 2^{1-n}, k + 2^{n-m-2}) = Uni(m+1, \theta + 2^{1-n}, k) = Uni(m+1, \theta, k+1).$$

Згідно зі співвідношеннями (4), (6) також виконується:

$$Uni(m, \theta, k+1 + 2^{n-m-1}) \cdot Uni(m, \theta, k+1 + 2^{n-m-1} + 2^{n-m-2}) =$$

$$= Uni(m, \theta + 2^{1-n}, k + 2^{n-m-1}) \cdot Uni(m, \theta + 2^{1-n}, k + 2^{n-m-1} + 2^{n-m-2}) =$$

$$= Uni(m+1, \theta + 2^{1-n}, k) = Uni(m+1, \theta, k+1),$$

тобто твердження (1) – (2) виконуються для всіх $i = 0, 1, \dots, 2^{n-m-1} - 2$, що й необхідно довести.

Доведення співвідношення (3) проводиться за індукцією.

Справджується також взаємозалежність:

$$Uni(m, \theta, i) \cdot Uni(m, \theta, i + 2^{n-m-1}) = Uni(0, \theta, 2^{n-1}),$$

для якої $i = 0, 1, \dots, 2^{n-m-1} - 1$.

Доведення залежності проводиться за індукцією.

З наведених викладок можна підсумувати, що унітарні функції $Uni(m+1, \theta, i)$ вищих порядків $m+1$ у певному наборі порядку $m+1$ є добутками вибірових функцій $Uni(m, \theta, i)$ нижчих порядків m .

Система унітарних функцій та творені за її допомогою унітарні коди є первинними в послідовності перетворень форми цифрової інформації [4].

Аналіз літературних джерел підтверджує факт відсутності інформації про перехідні базиси чи системи функцій від системи унітарних функцій до інших, а також про функціонали їх перетворень. Також не відомо аналітики здійснення перетворення унітарних кодів в інші коди. Але з теорії кодування відомо, що першим кроком до зменшення розрядності даних у два рази є перехід до кодів Лібова – Крейга [6]. З метою вирішення задачі встановлення залежності системи унітарного кодування з іншими і, зокрема, з кодуванням Лібова – Крейга як

перехідного вперше введено систему дискретно-фазових функцій, що визначається як основа вказаного кодування Лібова – Крейга.

Формально система унітарних функцій порядку $m-1$ визначає свій період 2π на половині періоду π системи дискретно-фазових функцій порядку m із формальним поданням

$$Dyf(0, \theta, 0) = Uni(0, \theta, 0),$$

$$Dyf(m, \theta, i) = Uni(m-1, 2\theta, i).$$

Дискретно-фазові функції в наборах m до порядку n подаються згідно з таким узагальненим аналітичним виразом:

$$Dyf(m, \theta, i) = \text{sign}(\sin(2^m \pi(\theta + i \cdot 2^{-n}))),$$

де $i = 0, 1, \dots, 2^{n-m+1} - 1$ – порядковий номер функції в наборі з номером m .

Система дискретно-фазових функцій на періоді $T = 2\pi$ відображає фазовий зсув $\Delta\varphi$ sign -процедури над функцією $\sin(2\pi)$, де $\Delta\varphi = T/N = 2\pi/2^n = \pi/2^{n-1}$.

Система дискретно-фазових функцій є лінійно залежною, оскільки частина функцій системи є лінійною комбінацією інших функцій системи. Унаслідок цього така система не утворює базису. Також система дискретно-фазових функцій є неортогональною, тому що:

$$\int_0^1 Dyf(m, \theta, i) Dyf(m, \theta, j) d\theta \neq 0.$$

Одночасно дискретно-фазові функції є ортогональними в частотній ділянці, оскільки для $m \neq k$

$$\int_0^1 Dyf(m, \theta, i) Dyf(k, \theta, j) d\theta = 0.$$

Дискретно-фазові функції не є ортогональними у фазовій ділянці, тому що довільна функція $Dyf(m, \theta, j)$ є результатом фазового зсуву функції $Dyf(m, \theta, i)$, де $i \neq j$, а

$$\int_0^1 Dyf(m, \theta, i) Dyf(m, \theta, j) d\theta \neq 0.$$

Функції в наборах порядків $m+1$ є результатом попарного добутку вибірових функцій наборів порядків m згідно з такими залежностями:

$$Dyf(m, \theta, i) \cdot Dyf(m, \theta, i + 2^{n-m-1}) = Dyf(m+1, \theta, i), \quad (7)$$

$$Dyf(m, \theta, i + 2^{n-m}) \cdot Dyf(m, \theta, i + 2^{n-m} + 2^{n-m-1}) = Dyf(m+1, \theta, i), \quad (8)$$

де $i = 0, 1, \dots, 2^{n-m} - 1$, а також згідно із залежністю:

$$Dyf(m, \theta, i) \cdot Dyf(m, \theta, i + 3 \cdot 2^{n-m-1}) = Dyf(m+1, \theta, i + 2^{n-m-1}), \quad (9)$$

для якої $i = 0, 1, \dots, 2^{n-m-1} - 1$.

Доведення співвідношень (7) – (9) проводиться за індукцією.

З вищевказаного за аналогією з унітарними функціями випливає те, що множина функцій $Dyf(m+1, \theta, i)$ наборів порядку $m+1$ є визначеною процедурою добутку вибірових функцій $Dyf(m, \theta, i)$ наборів порядку m .

Дискретно-фазові функції розглядаються як перехідні та як основа творення базисів чи систем функцій Радемахера, Грея, Уолша, кодування цифрових даних в яких здійснюється з меншою розрядністю порівняно з N для унітарного кодування за допомогою n -розрядних слів (де $n = \log_2 N$) [4, 6].

Для встановлення вказаних функціональних залежностей здійснимо деякі перетворення. Оскільки повна дискретно-фазова система вміщує всі складові фазового зсуву функції виду $\text{sign}(\sin(2^n \pi\theta + \Delta\varphi))$, то при $\Delta\varphi = \pi/2$ вказані функції трансформуються у функції виду $\text{sign}(\cos(2^n \pi\theta))$ [4].

Набір \sin - та \cos -складових системи дискретно-фазових функцій можна подати у вигляді:

$$Dyf(n, \theta, i) = \begin{cases} \text{sign} \sin(2^n \pi(\theta + \Delta\varphi)) \\ \text{sign} \cos(2^n \pi(\theta + \Delta\varphi)) \end{cases}$$

Екстракція \sin -складових за кожним із порядків n набору функцій утворює систему функцій Радемахера $Rad(n, \theta)$, за допомогою якої твориться звичайний двійковий код, а екстракція \cos -складових – відповідно систему функцій Грея $Gry(n, \theta)$, що є основою коду Грея [4, 6]:

$$Rad(n, \theta) = Dyf(n, \theta, 0) = \text{sign}(\sin(2^n \pi\theta));$$

$$Gry(n, \theta) = \text{sign}(\cos(2^n \pi\theta)).$$

Взаємодоповнення двох наведених систем полягає в тому, що система функцій Радемахера вміщує набір непарних функцій $f(t) = -f(-t)$, а система функцій Грея вміщує парні функції $f(t) = f(-t)$. Це накладає відомі обмеження при дискретному гармонічному аналізі процесів, у спектри яких включені парні та непарні складові функції [3, 4, 5].

2. Функції Радемахера. Екстракція \sin -складових за кожним із порядків n набору дискретно-фазових функцій утворює систему функцій Радемахера:

$$Rad(n, \theta) = Dyf(n, \theta, 0) = \text{sign}(\sin(2^n \pi\theta)).$$

З означення можна твердити, що функції Радемахера є періодичними з періодом $1/2^{n-1}$ на інтервалі визначення $\theta \in [0, 1)$.

Функції Радемахера приймають постійні значення на інтервалах $[i/2^n; (i+1)/2^n]$, де $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, а в точках розриву $i/2^n$ вони неперервні справа.

Функції Радемахера ортонормовані на відрізку $[0; 1)$ [7], оскільки

$$\int_0^1 Rad(n, \theta) Rad(k, \theta) d\theta = 0$$

та

$$\int_0^1 Rad(n, \theta) Rad(n, \theta) d\theta = 1.$$

Система функцій Радемахера утворює в просторі інтегрованих із квадратом функцій $L_2[0, 1)$ неповну систему ортонормованих функцій [8], оскільки для довільного n :

$$\int_0^1 Rad(n, \theta) Rad(1, \theta) Rad(2, \theta) d\theta = 0.$$

Тобто існує функція $Rad(1, \theta) Rad(2, \theta)$, тотожно не рівна нулю на $[0, 1)$ та ортогональна до всіх функцій системи.

Указані функції є ортогональними в частотній ділянці, оскільки:

$$\int_0^1 Rad(n, \theta) Rad(k, \theta) d\theta = 0.$$

Система функцій Радемахера ортогональна у фазовій ділянці, оскільки:

$$\int_0^1 Rad(n, \theta + \Delta\varphi) Rad(k, \theta) d\theta = 0$$

та

$$\int_0^1 Rad(n, \theta + \Delta\varphi) Rad(k, \theta + \Delta\xi) d\theta = 0,$$

де $\Delta\varphi \neq \Delta\xi$.

Система Радемахера хоча і є ортонормованою, та не утворює базису, тобто повної системи. Однак ця система функцій важлива тим, що за її допомогою формується система функцій Уолша.

У матеріалах статті подано основні властивості систем функцій унітарних, дискретно-фазових, Радемахера, які мають прикладне застосування при реалізації системних складових

інфотехнології. Установлені аналітичні залежності між системами функцій дозволили аналітично описати та реалізувати відповідні процедури перетворення форми інформації.

1. Палагін А.В., Николайчук Я.Н. Опыт разработки микропроцессорных распределенных систем реального времени. – К.: Знання, 1988. – 19 с.
2. Романов В.А., Ключан П.С. Преобразователи формы информации для персональных ЭВМ. – К.: Знання, 1988. – 16 с.
3. Вариченко Л.В., Лабунец В.Г., Раков М.А. Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов. – К.: Наукова думка, 1986. – 248 с.
4. Петришин Л.Б. Теоретико-числові основи кодових систем Галуа / Івано-Франк. держ. техн. ун-т нафти і газу. – Івано-Франківськ, 1995. – 101 с. Моногр. деп. в ДНТБ України 20.12.95 №57 - Ук 96.
5. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
6. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – К.: Вища школа, 1983. – 455 с.
7. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). – М.: Высшая школа, 1980. – 279 с.
8. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Инлитиздат, 1963. – 359 с.

From sole the positions of number-theoretic transformations the analysis is carried out and a set of intermediate systems of functions, that form the corresponding codes or code systems, is set. It is built the order and procedures of their creation and mutual transformations, that permitted to classify and in following to estimate efficiency of discrete harmonic analysis in the considered systems of functions.

Key words: unitary functions, Rademacher functions, discrete harmonic analysis, code systems, analytical relations of system of functions.

УДК 004.421.5

ББК 32.811.4

М.В. Лаврів, Л.Б. Петришин

ГЕНЕРАТОРИ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИХ ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Запропоновано два нові методи генерування псевдовипадкових чисел; описано процеси генерування випадкових чисел згідно із запропонованими методами; подано порівняльну характеристику ступеня рівномірності даних методів генерування згідно із статистичними методами визначення типу розподілів – χ^2 та Колмогорова – Смірнова.

Ключові слова: генератори випадкових чисел, метод χ^2 , метод Колмогорова – Смірнова.

Методи та засоби генерування випадкових чисел застосовують при вирішенні прикладних задачах інформатики, зокрема при статистичних дослідженнях Монте-Карло, імовірнісному моделюванні, кодуванні, перетворенні форми та цифровій обробці інформації, тестуванні, чисельному аналізі, системах прийняття рішень, комп'ютерному програмуванні, у криптографії та системах захисту. Як на недоліки методів генерування випадкових чисел слід указати на складність їх технічної реалізації, обмеження швидкодії формування відліків, неможливість відтворення отриманих характеристик розподілів, передбачення генерованих послідовностей через їх випадковий характер, що стали причиною використання на практиці математичних методів синтезу псевдовипадкових послідовностей, які реалізуються здебільшого алгоритмічно за допомогою рекурентних залежностей. При цьому кожне наступне число утворюється з визначеної кількості попередніх шляхом обчислення за деякою заданою функцією. Серед методів генерування псевдовипадкових розподілів широке застосування отримали методи з рівномірним розподілом, для яких кожен із відліків характеризується однаковою ймовірністю появи в процесі генерування.

Лінійний конгруентний метод характеризується простотою алгоритму генерування та задовільними ймовірнісними характеристиками розподілу, що зумовило його широке практичне застосування [1, 2]. Такий метод визначається вихідними параметрами: m – модуль ($m > 0$), a – множник ($0 \leq a < m$), b – приріст ($0 \leq b < m$), x_0 – початкове значення ($0 \leq x_0 < m$). Процедура генерування здійснюється згідно із залежністю $x_{n+1} \equiv (ax_n + b) \pmod{m}$. Період

генерованого псевдовипадкового розподілу визначається вибором значень модуля, множника та приросту. Даний метод генерування визначено як рівномірний [2]. Є декілька способів модифікації конгруентного методу, наприклад метод Фібоначчі, що є модифікованим методом класу конгруентних, для якого генерування здійснюється згідно із залежністю $x_{n+1} = (x_n + x_{n-1}) \pmod{m}$, де n – порядковий номер числа, m – модуль).

У генераторах даного класу необхідно реалізувати операції додавання, множення елементів, знаходження остачі від ділення, а для методу Фібоначчі потрібні ще додаткові запам'ятовуючі пристрої (операції виконуються не тільки над попереднім числом), що ускладнює реалізацію даних генераторів.

На основі аналізу складності технічної реалізації методів псевдовипадкового генерування одним з ефективних запропоновано метод на базі використання незвідних поліномів над полем Галуа $GF(2)$ [3]. Формування n -розрядних псевдовипадкових чисел (c_1, c_2, \dots, c_n) у двійковій системі числення здійснюється на основі циклічного зсуву послідовності (b_1, b_2, \dots, b_n) , утворюючи послідовність (b_2, b_3, \dots, b_0) , причому елемент b_0 є сумою за модулем 2 добутків відповідних елементів послідовності b_1, b_2, \dots, b_n та маски a_1, a_2, \dots, a_n , утвореної коефіцієнтами незвідного полінома над полем Галуа. Отже:

$$c_1 = b_2, c_2 = b_3, \dots, c_n = \left(\sum_{i=1}^n b_i a_i \right) \pmod{2}.$$

Усі n -розрядні числа псевдовипадкової послідовності трансформують у відліки десяткової системи числення. Даний метод визначено *методом рекурсивного генерування в кодах Галуа*, який технічно реалізується на регістрах зсуву. Згідно з даним методом при генеруванні послідовностей із періодом N отримують $2^n - 1$ різних n -розрядних чисел ($N = 2^n - 1$). На рис.1 графічно зображено розподіл точок (i, j) на площині, де i – порядковий номер генерованого числа (що вказує порядок відліку в часі), j – число, генероване 12-розрядним генератором Галуа на періоді $[1, 2^{12} - 1]$.

Згідно з другим запропонованим способом генерування псевдовипадкових чисел кожен із їх відліків як n -розрядний двійковий код утворюється в результаті рандомізації ваг у дзеркально відображеному порядку розрядів двійкового коду поточного значення числа лінійно зростаючої двійкової послідовності чисел: $c_1 = b_n, c_2 = b_{n-1}, \dots, c_n = b_1$. На рис.2 зображено псевдовипадковий розподіл відліків 12-розрядних чисел, генерованих методом рандомізації двійкових розрядів. Після перетворення всі числа інтервалу $[0, 2^n - 1]$ відображаються в числа інтервалу $[0, 2^n - 1]$ за умови повної взаємно однозначної відповідності.

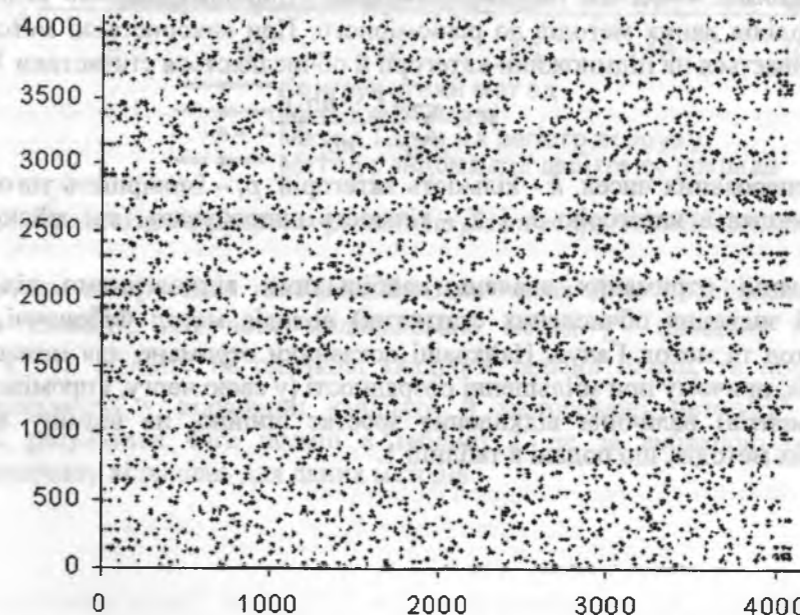


Рис.1. Розподіл на площині 12-розрядних відліків, генерованих методом Галуа Перевагою даного методу є простота технічної реалізації даного генератора за допомогою регістрів зсуву

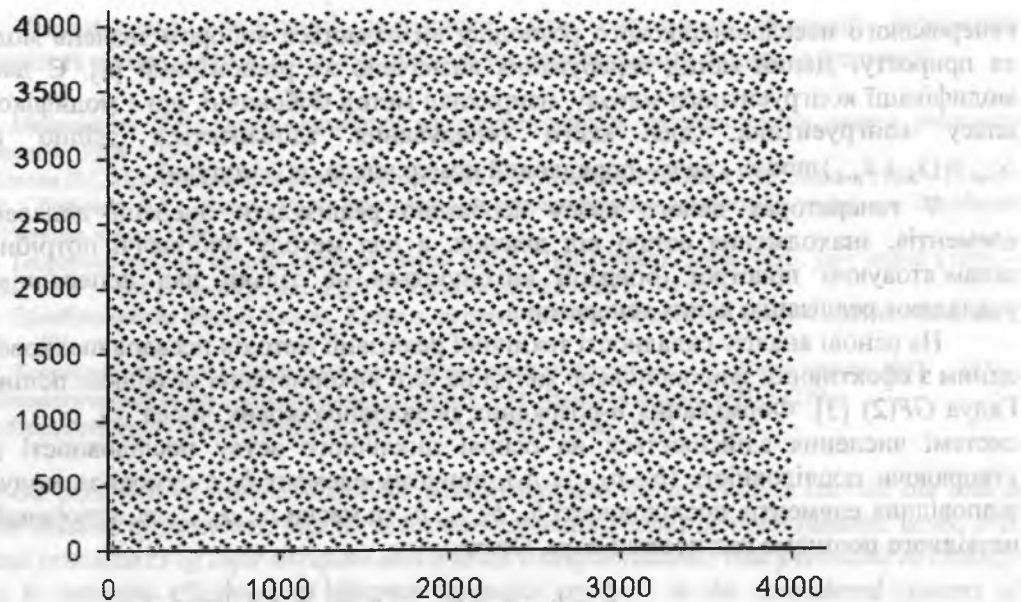


Рис.2. Розподіл на площині відліків 12-розрядних чисел, генерованих методом рандомізації двійкових розрядів

З метою визначення та порівняння характеристик рівномірності розподілу запропонованих методів, крім наведених, були також досліджені конгруентний метод і метод Фібоначчі.

При технічній реалізації методу Галуа на регістрах зсуву множина цілих додатних чисел розбивається на підмножини чисел $[0, 2^n - 1]$, де $n = 1, 2, \dots$, на яких було здійснено генерування чисел, що, у свою чергу, і визначало період даних генераторів. Дані розбиття визначають розряди генераторів Галуа на регістрах зсуву. Згідно з цим результати дослідження наводяться для розрядів $n = 8, \dots, 20$. Це, у свою чергу, вплинуло на вибір значення модуля при використанні конгруентного методу та адитивного генератора Фібоначчі.

Було здійснено дослідження генерованих чисел даними методами для визначення типу розподілу даних псевдовипадкових чисел. Для цього було використано статистичні методи знаходження закону розподілу випадкових чисел – метод χ^2 і метод Колмогорова – Смірнова [2, 4]. Згідно з даними методами на основі вибірки отриманих значень визначено ступінь наближення розподілів даних методів до рівномірного. При використанні методу χ^2 діапазон генерування розбивається на підмножини-категорії й обчислюються статистики V :

$$V = \sum_{1 \leq s \leq k} \frac{(Y_s - np_s)^2}{np_s},$$

де n – кількість генерованих чисел, k – кількість категорій, p_s – імовірність того, що результат генерування потрапляє в категорію s , і Y_s – кількість випробувань, які дійсно потрапили в категорію s .

При порівнянні отриманих значень найбільшими відхиленнями від рівномірного розподілу (великі значення обчислених статистик) володіє метод Фібоначчі, за ним ідуть конгруентний метод та метод Галуа. Найкращі показники отримано для методу рандомізації двійкових розрядів, причому при збільшенні розрядності (у свою чергу, і проміжку генерування та кількості елементів) величина відхилення зростає лінійно, на відміну від результатів застосування інших методів, що подані в таблиці 1.

Таблиця 1

Метод χ^2

Розрядність	Конгруентний метод	Метод Фібоначчі	Метод Галуа на регістрах зсуву	Метод рандомізації двійкових розрядів
8	8,52	34,39	5,14	0,33
10	4,546667	14,15333	6,64	0,246667
12	27,64333	50,67133	28,92267	1,787333
14	63,56	787	559,6	26,77875
16	673,8	1062,883	740,728	33,18783
18	902,5106	1133,867	905,0131	28,63763
20	939,02	1068,147	895,07	44,004

Відповідно до кількості генерованих чисел за таблицею χ^2 -розподілу було зіставлено критичні значення розподілу з обчисленими статистиками. Обчислені значення не перевищують критичних точок, що відповідають відхиленню 1–5% (відсоткові точки методу χ^2), що дало змогу підсумувати рівномірний характер досліджуваних розподілів на інтервалах $[0, 2^n - 1]$, де $n = 8, 10, \dots, 20$.

На рис.3 подано графічну залежність характеристик розподілів за розрядами.

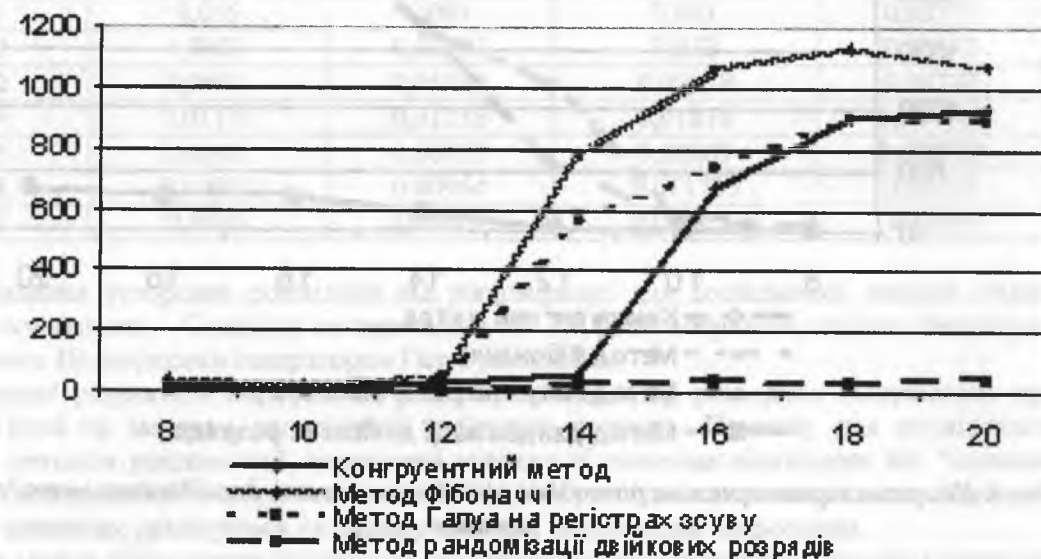


Рис.3. Діаграма характеристик розподілів різної розрядності, досліджених методом χ^2

Дані методи генерування псевдовипадкових чисел було досліджено на рівномірність розподілу на площині, для чого модифіковано метод χ^2 : площину генерованих чисел $[0, 2^n - 1] \times [0, 2^n - 1]$ розбито на однакові квадрати заданої площі, та підраховано кількість чисел, що попадають у відповідні квадрати й застосовано метод χ^2 до новоутвореної послідовності, результати чого подані в таблиці 2, де за вибраною розрядністю можна простежити величину відхилення для даних методів.

Таблиця 2

Метод χ^2 на площині

Розрядність	Конгруентний метод	Метод Фібоначчі	Метод Галуа на регістрах зсуву	Метод рандомізації двійкових розрядів
8	45,98	28,92	46,97	1,968842
10	99,19111	120,1644	66,92444	8,844444
12	1191,249	1218,223	571,6547	15,403
14	1687,183	1661,968	1699,79	159,574
16	2578,172	2592,477	2421,245	269,3505
18	2467,75	2612,756	2697,289	282,437
20	2438,827	2530,642	2637,283	337,5114

Згідно з отриманими результатами побудовано діаграму характеристик розподілів різної розрядності (рис.4).

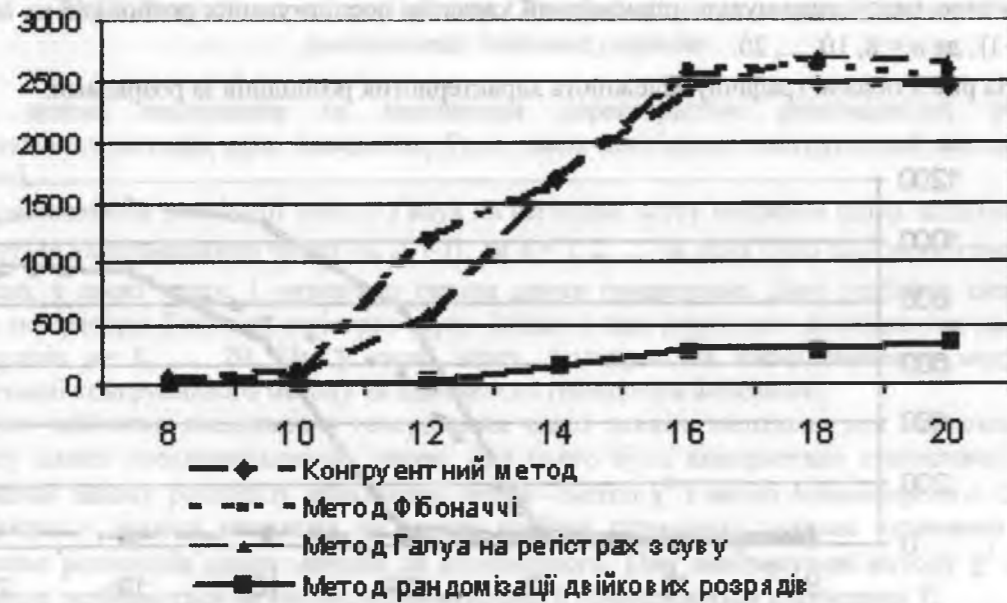


Рис.4. Діаграма характеристик розподілів різної розрядності, досліджених методом χ^2 на площині

Дані результати дозволяють ствердити рівномірний характер розподілу, отриманого за допомогою методу Галуа на регістрах зсуву. Крім того, метод рандомізації двійкових розрядів відзначився мінімальним значенням відхилення від рівномірного розподілу.

Для визначення характеристик рівномірних розподілів генерованих чисел також було використано метод Колмогорова – Смірнова, який дозволив визначити статистики відхилень і встановити величину відхилень побудованих емпіричних функцій та рівномірного розподілу. При використанні методу Колмогорова – Смірнова для розглянутих методів були побудовані: функція розподілу рівномірно розподілених величин на інтервалах $[0, 2^n - 1]$, де $n = 8, 10, \dots, 20$, та функції розподілів кожного методу згідно з формулою:

$$F_n(x) = \frac{\text{кількість таких } X_1, X_2, \dots, X_n, \text{ які } \leq x}{n}$$

де n – кількість елементів, X_i – генеровані числа ($i = 1, 2, \dots, n$). Також визначено максимальні відхилення значень отриманих функцій розподілів від значень функції рівномірно розподілених псевдовипадкових величин.

У таблиці 3 подано отримані результати для методу Колмогорова – Смірнова.

Таблиця 3

Метод Колмогорова – Смірнова

Розрядність	Конгруентний метод	Метод Фібоначчі	Метод Галуа на регістрах зсуву	Метод рандомізації двійкових розрядів
8	0,84024	0,745562	0,6272	0,130178
10	0,47619	1,183673	0,86395	0,108844
12	1,433286	1,60396	1,062235	0,141914
14	0,015962	0,078993	0,109686	0,00244
16	0,008016	0,014997	0,01401	0,001023
18	0,05538	0,09177	0,10223	0,002433
20	0,088	0,083831	0,0986	0,003107

Аналогічно для модифікованого методу Колмогорова – Смірнова та обчислень для площини (таблиця 4).

Таблиця 4

Метод Колмогорова – Смірнова на площині

Розрядність	Конгруентний метод	Метод Фібоначчі	Метод Галуа на регістрах зсуву	Метод рандомізації двійкових розрядів
8	0,055	0,093	0,081	0,02332
10	0,0383	0,02601	0,032	0,00533
12	0,0602	0,05868	0,09478	0,00727
14	0,01176	0,01235	0,01816	0,001167
16	0,00901	0,00953	0,00869	0,000712
18	0,00969	0,00964	0,011705	0,00105
20	0,0099	0,009895	0,007159	0,0099

Відхилення утворених розподілів від рівномірного для досліджених методів згідно з методом Колмогорова – Смірнова не перевищує 5%. На рис.5 зображені графіки рівномірного та отриманого 10-розрядним генератором Галуа розподілів.

Отримані результати вказують на рівномірний характер розподілів генерованих чисел методом Галуа та методом рандомізації двійкових розрядів. Причому для послідовності, отриманої методом рандомізації, характерні мінімальні значення відхилення від “ідеальної” рівномірно розподіленої послідовності чисел. Технічна реалізація вказаних методів є достатньо простою й дешевою, реалізується на одному кристалі інтегральної мікросхеми.

Тому можна підсумувати доцільність застосування запропонованих методів генерування Галуа, а особливо із рандомізацією розрядів, для отримання послідовностей рівномірно розподілених псевдовипадкових чисел, для вирішення прикладних задач статистичних досліджень Монте-Карло.

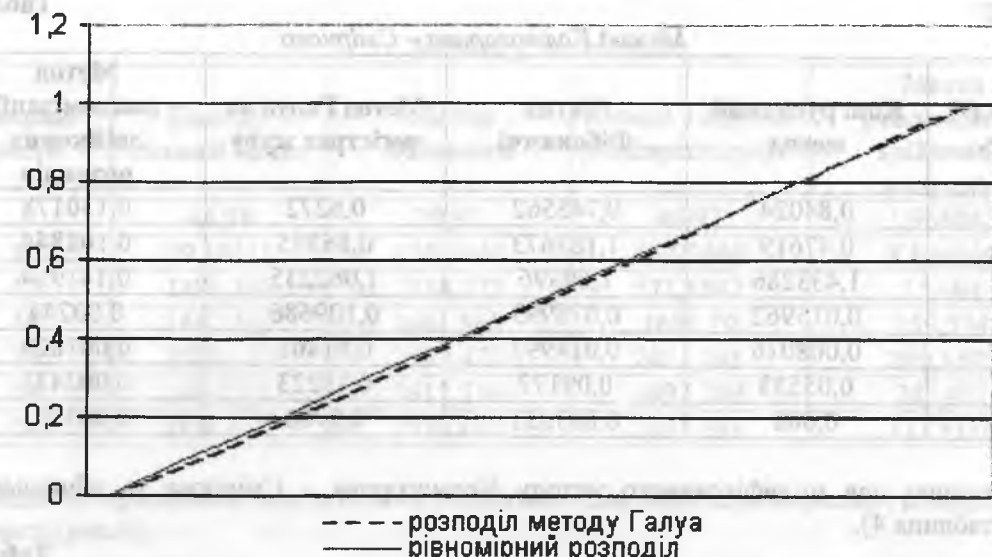


Рис.5. Графіки рівномірного та утвореного 10-розрядним генератором Галуа розподілів

1. Иванов М.А., Чугунков И.В. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003. – 240 с.
2. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 830 с.
3. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. – М.: Мир, 1976. – 754 с.
4. Ермаков С.М., Михалков Г.А. Курс статистического моделирования. – М.: Наука, 1976.

In the article two new methods generation of pseudorandom numbers are offered; the processes generation random numbers of the accordant offered methods are described; comparative degrees description of evenness the given methods generation is resulted in obedience to the statistical methods of determination type distributing – χ^2 and Colmogorov–Smirnov methods.

Key words: random numbers generators, χ^2 method, Colmogorov–Smirnov method.

ЗМІСТ

Математика

І.В. Буртняк, Г.П. Малицька. Про стабілізацію розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь.....	3
Б.В. Василюшин, О.М. Голубчак, М.І. Копач, Б.А. Шувар. Інтегральні нерівності типу Вольтерра з багатьма незалежними змінними.....	9
С.Ф. Григорів, О.Р. Никифорчин. Топологічна характеристика пари $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ - та $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -многовидів.....	15
В.В. Мазуренко, М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій. Про властивості матриці Гріна системи з дискретно-неперервним розподілом параметрів.....	21
А.В. Соломко, С.В. Шарин. Векторна операція крос-кореляції в довільному конусі.....	29
І.В. Федак. Мимобіжні послідовності ірраціональних чисел.....	36
О.В. Махней. Функція Гріна крайової задачі для векторного сингулярного диференціального рівняння.....	38
Л.С. Возняк, Н.О. Возняк. Математичне моделювання поширення комп'ютерних вірусів в обчислювальних системах.....	45

Фізика

М.А. Рувінський, О.М. Возняк, Б.М. Рувінський. Вплив флуктуацій спин-орбітальної взаємодії на електропровідність квантового напівпровідникового дроту.....	52
О.М. Возняк, Л.І. Никируй, О.І. Ільків. Варіаційний підхід до розгляду явищ переносу в напівпровідниках на основі кінетичного рівняння Больцмана (I).....	54
І.П. Яремій, В.І. Кравець, В.М. Пилипів, С.І. Яремій. Структурна діагностика приповерхневих шарів іонно-імплантованих монокристалів та плівок зі структурою гранату.....	59
Д.М. Фрейк, О.Л. Соколов, Ю.В. Кланічка. Вплив дислокацій невідповідності на рухливість носіїв заряду у двошарових епітаксійних структурах на основі сполук $A^{IV}B^{VI}$	65
Я.П. Салій, Л.Й. Межиловська, В.М. Чобанюк, І.М. Фрейк. Власні радіаційні дефекти та електричні властивості плівок $A^{IV}B^{VI}$	72
В.В. Прокопів, І.В. Горічок, У.М. Писклинець. Домінуючі точкові дефекти в нелегованому CdTe....	75
Б.С. Дзундза. Поверхневі явища в структурах на основі тонких плівок телуру.....	80
Р.Б. Атаманюк, С.П. Новосядлий. Мінімізація алгоритмічного процесу проектування інтегральних схем методом кремнієвої компіляції за часово-ймовірнісним критерієм.....	84
В.І. Голота, І.Т. Козут. Елементи архітектури матрично-емітерної нанометрової літографії.....	89
Б.В. Атаманюк. Декомпозиція та верифікація топології інтегральних схем.....	97
О.Б. Атаманюк. Верифікація процесу кремнієвої компіляції топології інтегральних схем.....	102
Н.В. Превисокова, Л.Б. Петришин. Теоретико-числові основи дискретного гармонічного аналізу в системі Радемахера.....	107
М.В. Лаврів, Л.Б. Петришин. Генератори рівномірно розподілених псевдовипадкових величин.....	112

CONTENTS

Mathematics

<i>I. Burtnyak, G. Malyska.</i> On stabilization of solutions Cauchy problem for one class ultraparabolic equations.....	3
<i>B. Vasylyshyn, O. Golubchak, M. Kopach, B. Shuvar.</i> Integral inequalities Volterra's type with many independent variables.....	9
<i>S. Grygoriv, O. Nykyforchyn.</i> Topological characterization of the pair $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ - and $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$ -manifolds.....	15
<i>V. Mazurenko, M. Stasyuk, R. Tatsiy.</i> On the properties of Green matrix of the system with the discrete-continuous distribution of the parameters.....	21
<i>A. Solomko, S. Sharyn.</i> Vector cross-correlation operation on cone.....	29
<i>I. Fedak.</i> Not intersected sequences of irrationals.....	36
<i>O. Makhney.</i> Green function of the boundary problem of the vector singular differential equation.....	38
<i>L. Voznyak, N. Voznyak.</i> Mathematic modelling of computer virus spreading in computational systems..	45

Physics

<i>M. Ruvinsky, O. Voznyak, B. Ruvinsky.</i> The influence of spin-orbital interaction fluctuations on the electroconductivity of quantum semiconductor wire.....	52
<i>O. Voznyak, L. Nykyruy, O. Ilkiv.</i> Variation approach to consideration of the phenomena of transfer in semiconductors on the basis of the kinetic equalization Boltzman (i).....	54
<i>I. Yaremiy, V. Kravets, V. Pylypiv, S. Yaremiy.</i> Structural diagnostics of surface layers of ionic monocrystals and films with a garnete structure.....	59
<i>D. Freik, O. Sokolov, Yu. Klanichka.</i> Influence of misfit dislocations on the charge carrier mobility in two-layer epitaxial structure on the base of $A^{IV}B^{VI}$ compounds.....	65
<i>Ya. Saliy, L. Mezhylovska, V. Chobanyuk, I. Freik.</i> Own radiation defects and electric properties of $A^{IV}B^{VI}$ films.....	72
<i>V. Prokopiv, I. Gorichok, U. Pysklynets.</i> Dominated points defects in undoped CdTe.....	75
<i>B. Dzundza.</i> The surface phenomena in structures on the basis of thin films tellurium.....	80
<i>R. Atamanyuk, S. Novosyadly.</i> Silic compiling as instrument of topology of large-scale arrays and providing its reliability at algorithmic level.....	84
<i>V. Holota, I. Kogut.</i> The architecture elements array emitter nanometer lithography.....	89
<i>B. Atamanyuk.</i> The decomposition and verification of integrated circuit topology.....	97
<i>O. Atamanyuk.</i> The verification of silicic compiling process of integrated circuit topology.....	102
<i>N. Prevysokova, L. Petryshyn.</i> The number theoretic bases of the discrete harmonic analysis in the Rademacher system.....	107
<i>M. Lavriv, L. Petryshyn.</i> Generators of the evenly distributed pseudocasual sizes.....	112

ВИМОГИ

до подання статей у Вісниках Прикарпатського університету, журналах, збірниках наукових праць, матеріалах конференцій

1. Обсяг оригінальної статті – 6–12 сторінок тексту, оглядових – до 12 сторінок, коротких повідомлень – до 3 сторінок.

2. Статті подаються у форматі Microsoft Word. Назва файлу латинськими буквами повинна відповідати прізвищу першого автора. Увесь матеріал статті повинен міститись в одному файлі.

3. Текст статті повинен бути набраним через 1,5 інтервалу, шрифт “Times New Roman Сур”, кегль 14. Поля: верхнє, нижнє, лівє – 2,5 см, правє – 1,5 см (30 рядків по 60–64 символи).

4. Малюнки повинні подаватись в окремих файлах у форматі *.tif, *.eps, Corel Draw або Adobe Photo Shop.

5. Таблиці мають мати вертикальну орієнтацію і мають бути побудовані за допомогою майстра таблиць редактора Microsoft Word. Формули підготовлені в редакторі формул MS Equation. Статті, що містять значну кількість формул, подаються у форматі LaTeX.

6. Текст статті має бути оформлений відповідно до постанови ВАК №7-05/1 від 15 січня 2003 року “Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України” (див. Бюлетень ВАК України. – 2003. – №1).

Статті пишуться за схемою:

- УДК і ББК (у лівому верхньому куті аркуша);
- автор(и) (ім'я, прізвище; жирним шрифтом, курсивом у правому куті);
- назва статті (заголовними буквами, жирним шрифтом);
- резюме й ключові слова українською мовою;
- постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями;

- аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання цієї проблеми й на які спирається автор, виокремлення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується стаття;

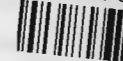
- виклад основного матеріалу дослідження з новим обґрунтуванням подальших розвідок у цьому напрямі;

- список використаних джерел;
- резюме й ключові слова англійською мовою.

7. Стаття повинна бути написана українською мовою, вичитана й підписана автором(ами).

8. У цілому до “Вісника” необхідно подати дві рецензії провідних учених у даній галузі.

НБ ПНУС



720937

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ВІСНИК
Прикарпатського університету

МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА
Випуск III

Видається з 1995 р.

Адреса редколегії: 76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57,
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
тел. 59-60-82, 50-37-52.

Ministry of Education and Sciences of Ukraine
Precarpathian National University named after Vasyl Stefanyk

NEWSLETTER
Precarpathian University

MATHEMATICS. PHYSICS
Release III

Published since 1995

Publisher's address: Precarpathian National University
57, Shevchenko Str.,
76025, Ivano-Frankivsk, tel. 59-60-82, 50-37-52.

Головний редактор: Василь ГОЛОВЧАК
Комп'ютерна верстка і правка: Дмитро РАДІОНОВ
Літературне редагування: Олександра ЛЕНІВ, Зоряна ЗАЙЦЕВА
Коректура: Віта ТИМКІВ
Комп'ютерний набір та упорядкування:
математика – Олександр МАХНЕЙ,
фізика – Віктор БОРИК

Друкується українською мовою
Реєстраційне свідоцтво КВ №435

Здано до набору 18.01.07 р. Підп. до друку 17.09.07 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Гарнітура "Times New Roman". Ум. друк. арк. 7,09. Вид. арк. 8,00.
Тираж 100 прим. Зам. 122.

Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.
76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57, тел. 59-60-50.

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
від 12.12.2006 серія ДК 2718*

15,00

НБ ПГУС



720937