МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УРСР

СТАНІСЛАВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА СЕРІЯ

ВИПУСК II

«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»

КИЇВ—1959

03

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УРСР

СТАНІСЛАВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА СЕРІЯ

ВИПУСК II

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»

КИЇВ—1959

НАУКОВІ ЗАПИСКИ
СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

П. І. БОДНАРЧУК

ПРО ОДНЕ ОЗНАЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Викладання математики в середній школі при політехнічному навчанні повинне підпорядковуватись останньому в тому розумінні, щоб знання та вміння, одержані учнями на уроках математики, останні могли правильно та безпомилково застосовувати на практиці, причому застосування на практиці знань повинно бути не догматичним, а теоретично обгрунтованим. На даний час з цим завданням важко справитись на уроках тригонометрії, особливо при вивченні початків останньої. Основна причина, що приводить до цих труднощів, криється в означеннях тригонометричних функцій, які в даний час викладаються в середній школі. Основні недоліки цих означень можна звести до таких:

1. Вони даються для окремих видів величин, а не для величин взагалі, що породжує їх обмеженість.

2. В розріз означенню функціональної залежності вони даються в більшості формально.

3. Сама форма викладу їх (навіть в найновішому підручнику по тригонометрії С. Й. Новосьолов «Тригонометрія») вимагає на початковій фазі вивчення, щоб вони спочатку запам'ятовувались та при наступному вивченні усвідомлювались, а не навпаки.

4. До деякої міри трудно застосовуються на практиці, оскільки обмежені, і початковим та кінцевим пунктом їх введення ставиться розв'язування трикутників, а не застосування підміченої точної закономірності для даних конкретних випадків.

Пропоноване означення тригонометричних функцій, будучи найбільш загальним геометричним означенням їх, в основному усуває ці недоліки та дає можливість гармонічного вивчення прямих та обернених тригонометричних функцій, починаючи з восьмого або дев'ятого класів. Вивчення пропонованого означення тригонометричних функцій з восьмого класу дає можливість з'єднати в єдине ціле викладання алгебри, геометрії та тригонометрії в тому розумінні, що викладання цих предметів доповнюватимуть один одного, а якість знань учнів стане значно кращою, про що говорить досвід.

ОЗНАЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Змінні величини.

Ф. Енгельс в «Діалектиці природи» писав:

«Поворотним пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика»...

(Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1948, стор. 208).

Спостерігаючи явища природи або слідкуючи за ходом технічних процесів, помічаємо, що величини, які беруть участь при протіканні явищ або процесів, поводяться по-різному. Одні з них залишаються весь час постійними, другі — змінюються, а потім спадають, або навпаки. Приклади з природи або техніки вказують на їх наявність та різноманітний характер зміни величин. А тому змінною величиною назвемо величину, яка при протіканні процесу або явища одержує різні то більші, то менші значення, а також в різні моменти протікання даного процесу або явища значення її відрізняються одне від одного. Хоч характер зміни різних величин різний, але з множини змінних величин можна виділити такі їх сукупності, для зміни величин, які в них входять, характерні певні закономірності. Вивчення цих закономірностей зміни певних класів величин має велике значення для розуміння процесів або явищ.

Найпростішим типом зміни величин може бути пряма пропорціональна залежність.

2. Пряма пропорціональна залежність та її графік

В арифметиці уже вивчались прямо пропорціональні величини. З вивченого можна зробити такий висновок:

Залежність між двома величинами, при якій з збільшенням (зменшенням) однієї величини в декілька разів друга величина збільшується (зменшується) в те саме число разів, називається прямою пропорціональною залежністю;

або

залежність між двома величинами, яка виражається рівнянням $y = kx$, де k — деяке дійсне число, називається прямою пропорціональною залежністю. Число k зветься коефіцієнтом пропорціональності. Отже, пряма пропорціональна залежність між величинами задається рівнянням

$$y = kx. \tag{1}$$

І для значень величин x_1 та y_1, x_2 та y_2, ..., x_i та y_i, ... справедливе співвідношення

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \ \dots \ = \frac{y_i}{x_i} = \ \dots \ = k, \tag{2}$$

якщо ці величини задовольняють рівняння (1).

Проведемо короткий аналіз співвідношення (2) та виведемо з нього короткі висновки.

Нехай величини $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ та $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$ вибрані так, що $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$ і $y_1 < y_2 < \ldots y_i < \ldots$.

Виясним, при якій умові вище згадані величини будуть задовольняти пропорцію (2).

Якщо $\frac{y_1}{x_1} = k$, то $\frac{y_2}{x_2} = k$, але це буде можливе тоді, коли величини y_2 та x_2 в свою чергу будуть кратні відповідно y_1 та x_1, тобто $y_2 = l_1 y_1$ та $x_2 = l_1 x_1$. Провівши аналогічні міркування щодо всіх інших величин, одержуємо:

$$y_3 = l_2 y_1, \ \ldots, \quad y_i = l_{i-1} y_1, \ \ldots \qquad \text{(a)}$$

та

$$x_3 = l_2 x_1, \ \ldots, \ x_i = l_{i-1} x_1, \ \ldots .$$

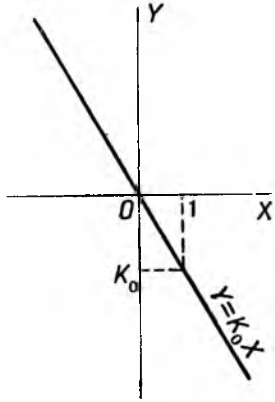


Рис. 1.

Зміст цих співвідношень має велике значення для розуміння суті прямої пропорціональної залежності.

Разом з тим, пряма пропорціональна залежність між величинами допускає досить просту графічну інтерпретацію. Для побудови графіка прямої пропорціональної залежності оберемо прямокутну систему координат та надамо коефіцієнту пропорціональності певне (фіксоване) числове значення k_0. Тоді множина величин, відношення яких рівне k_0, повинна задовольняти рівняння:

$$y = k_0 x.$$

За табличкою значень функції згідно загальних способів побудови графіків будуємо графік прямої пропорціональної залежності (рис. 1).

Виявляється, що графіком функції $y = k_0 x$ є пряма лінія, яка проходить через початок координат.

Але коефіцієнт пропорціональності приймає значення не тільки рівне k_0, а множини дійсних чисел, а тому графіком прямої пропорціональної залежності є множина прямих, що перетинається в початку координат. Інакше, графіком прямої пропорціональної залежності є пучок прямих з центром в початку координат.

3. Означення тригонометричних функцій

а) Означення функцій тангенс і котангенс

Вивчивши пряму пропорціональну залежність між величинами, ми вказували, що залежність між ними буде прямо пропорціональною, якщо вони задовольняють рівняння $\frac{y}{x} = k$, де k — коефіцієнт пропорціональності. Завжди існує множина величин, відношення яких дорівнює фіксованому значенню коефіцієнта пропорціональності. Але таких множин величин, як і значень k, нескінченна множина, еквівалентна множині дійсних чисел. На графіку цей факт інтерпретується пучком прямих з центром в початку координат.

Кожна пряма пучка відповідає певному фіксованому значенню коефіцієнта пропорціональності і, навпаки, кожній прямій пучка прямих з центром в початку координат відповідає єдине значення коефіцієнта пропорціональності.

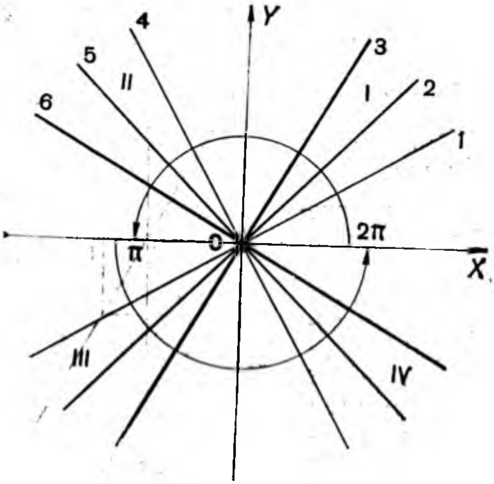


Рис. 2.

Але кожну пряму, яка проходить через початок координат, можна однозначно визначити кутом, який вона утворює відносно обраної системи відліку кутів, за яку ми оберемо в прямокутній системі координат додатний напрям осі Ox, і відраховуватимемо кути в напрямі, який приймемо за додатний, протилежному руху стрілки годинника.

Таким чином, кожному значенню коефіцієнта пропорціональності ми таким способом поставили у відповідність кут нахилу відповідної йому прямої графіка прямої пропорціональної залежності з обраною системою відліку.

У нас значення коефіцієнта пропорціональності є функцією відповідного йому кута, який утворює з обраною системою відліку відповідна йому пряма пучка і, навпаки, якщо прийняти до уваги означення функціональної залежності, а саме:

величина u називається функцією величини v, визначеної на множині M, якщо кожному значенню величини v, що належить множині M, відповідає єдине значення величини u.

Нехай дано прямокутну систему координат і пучок прямих з центром в початку її. Очевидно, що промені розміщені в III і IV чвертях лежать на продовженнях променів, що розміщені в I і II чвертях, тобто відповідність між значеннями коефіцієнта пропорціональності та кутами, які утворюють відповідні прямі пучка з обраною системою відліку, визначається для зміни кутів в проміжку $(0,\pi)$ та повторюються через кожні π (рис. 2), крім значень, кратних непарному числу $\frac{\pi}{2}$. Для значень, кратних непарному числу $\frac{\pi}{2}$, значення функцій невизначене, оскільки рівняння $y = kx$ при $x = 0$ та $y \neq 0$ не має смислу.

Якщо позначити коефіцієнт пропорціональності через u, а відповідні йому кути, про які мова йшла вище, через v, то функціональна залежність між величинами u та v визначає деяку функцію на змінній v, визначеній на проміжку $(0, \pi)$, крім значення $\frac{\pi}{2}$.

Таким чином, ми приходимо до такого означення визначеної функції.

Означення 1.

Функціональна залежність, встановлена між коефіцієнтом прямої пропорціональної залежності та кутами, утвореними з обраною системою відліку, відповідних йому прямих, визначає функцію тангенс на проміжку зміни кута від 0 до π або аналітично записують $u = \operatorname{tg} v$, де v змінюється від 0 до π, крім $v = \frac{\pi}{2}$.

Оскільки коефіцієнт пропорціональності є відношенням ординати до абсциси точок відповідної йому прямої пучка прямих з центром в початку координат, то функції тангенс можна дати таке, еквівалентне попередньому, означення.

Означення 1а.

Функціональна залежність, встановлена між відношенням ординати до абсциси точок прямих, які належать пучку прямих з центром в початку координат, та кутами, які утворюють ці прямі з обраною системою відліку, визначає функцію тангенс на проміжку зміни кута від 0 до π або аналітично записують $\operatorname{tg} v = \frac{y}{x}$, де v змінюється від 0 до π, крім $v = \frac{\pi}{2}$.

Вище ми вивчали властивості множини величин, визначуваної відношенням $\frac{y}{x} = k$. Чи тотожна функціональна залежність визначиться оберненим відношенням $\frac{x}{y} = \frac{1}{k}$? Очевидно, графічна інтерпретація цього випадку залишиться така ж сама, що і вище, а також без зміни, отже, залишиться множина кутів, утворених з обраною системою відліку прямими, відповідними коефіцієнтам пропорціональності. Але при цьому маємо одну істотну відмінність: у відповідність цим кутам ставиться не значення коефіцієнта пропорціональності, а значення оберненої до нього величини. Ця істотна відмінність вказує на те, що таким способом визначена функціональна залежність визначає не функцію тангенс, а функцію з дещо спорідненими властивостями, яку назвемо функцією котангенс.

Для значень аргументу, кратних π, функція котангенс невизначена. Дійсно, при $k = 0$, що відповідає $y = 0$ та $x \neq 0$, рівняння $\frac{x}{y} = \frac{1}{k}$ втрачає смисл. Отже, ми приходимо до такого означення функції котангенс.

Означення 2.

Функціональна залежність, встановлена між величинами, оберненими коефіцієнтом пропорціональності, та кутами, утвореними з обраною системою відліку, відповідних значень коефіцієнта пропорціональності прямих пучка з центром в початку координат, визначає функцію котангенс на проміжку зміни кута від 0 до π або аналітично записують $u = \operatorname{ctg} v$, де v змінюється від 0 до π, крім $v = 0$ і $v = \pi$.

Разом з тим означення функції котангенс можна подати інакше, врахувавши, що величина, обернена коефіцієнту пропорціональності, є відношення абсциси до ординати точок відповідної йому прямої пучка прямих з центром в початку координат.

Означення 2а.

Функціональна залежність, встановлена між відношенням абсциси до ординати точок прямих пучка з центром в початку координат та кутами, які утворюють ці прямі з обраною системою відліку, визначає функцію котангенс на проміжку зміни кута від 0 до π або аналітично записують $\operatorname{ctg} v = \frac{x}{y}$, де v змінюється від 0 до π, крім $v = 0$ і $v = \pi$.

Згідно закону відповідності значенням аргументів більшим або меншим за ті, які подані в означенні функцій, теж відповідають значення функції. Це свідчить про те, що функція тангенс та котангенс означені для означень аргументу, які змінюються в проміжку від $-\infty$ до $+\infty$, крім значення аргументу, кратних непарному числу $\frac{\pi}{2}$ для функції тангенс і кратних числу π для функції котангенс, для яких ці функції не визначені.

б) Означення функцій синус і косинус

Множина величин, яка задовольняє рівняння $y = k_0 x$, де k_0 — деяке фіксоване значення коефіцієнта пропорціональності, зображаються в графічній інтерпретації точками відповідної даному значенню k_0 прямої, а тому якісно величини можна характеризувати віддаллю d точок, які їх зображають, від початку координат з абсцисами або ординатами цих точок.

Але ми вже показали, що величини, які інтерпретуються точками певної фіксованої прямої графіка, задовольняють таким умовам:

$$x_2 = l_1 x_1, \quad x_3 = l_2 x_1, \ \ldots, \ x_i = l_{i-1} x_1, \ \ldots$$

та

$$y_2 = l_1 y_1, \quad y_3 = l_2 y_1, \ \ldots, \ y_i = l_{i-1} y_1, \ \ldots .$$

Для простоти та загальності викладок з усієї множини прямих пучка з центром з початку координат виберемо ту, яка відповідає деякому фіксованому значенню коефіцієнта пропорціональності. Нехай обрана нами пряма буде MN (рис. 3).

Пара величин x_1 та y_1, інтерпретується точкою M_1, пара величин x_2 та y_2 — M_2 і так далі, пара величин x_i та y_i — M_i.

Але точки M_1, M_2, ..., M_i, ... неоднаково віддалені від початку координат. Нехай $OM_1 = d_1$. Визначимо віддаль точки M_2 від початку координат O, тобто $OM_2 = d_2$ через d_1.

Але $OM_2 = OM_1 + M_1M_2$

або $OM_2 = d_1 + M_1M_2$.

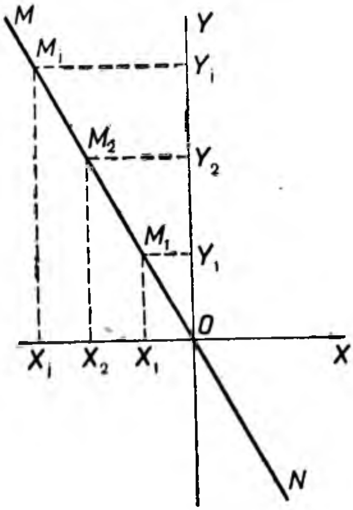


Рис. 3.

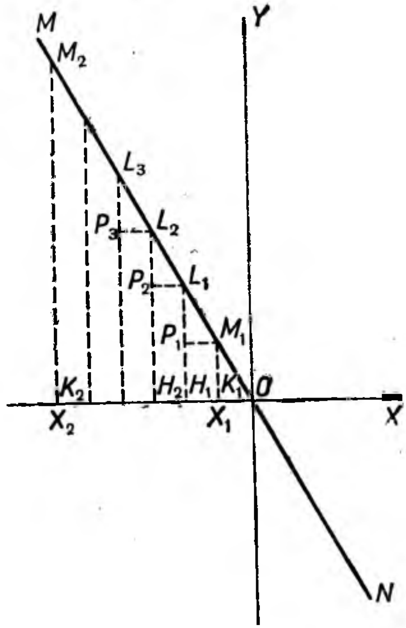


Рис. 4.

Разом з тим абсциса $OK_1 = x_1$ точки M_1, а для точки M_2 абсциса $OK_2 = x_2$, причому $x_2 = l_1x_1$, тобто відрізок OK_2 складається з l_1, відрізків OK_1. Але неважко показати, що кожному відрізку $OK_1 = x_1$ на прямій MN відповідає відрізок, рівний d_1, і тоді $OM_2 = d_2 = l_1d_1$ (рис. 4).

Дійсно, $OK_1 = K_1H_1 = H_1H_2 = \ldots = x_1$ і $P_1M_1 = H_1K_1 = P_2L_1 = = \ldots = x_1$ (як протилежні сторони прямокутника), причому $\triangle OK_1M_1 = \triangle M_1P_1L_1 = \triangle L_1P_2L_2 = \ldots$, бо $\angle K_1OM_1 = \angle P_1M_1L_1 = \angle P_2L_1L_2 = \ldots$ (як відповідні при паралельних прямих). Звідси випливає, що $OM_1 = L_1M_1 = L_2L_1 = \ldots = d_1$. Але таких відрізків в OM_2 є l_1, а тому дійсно $d_2 = l_1d_1$.

Аналогічним шляхом не важко показати, що $d_3 = l_2d_1, \ldots, d_l = l_{i-1}d_1, \ldots$. Отже, дійсно справедливі співвідношення: $d_2 = l_1d_1$, $d_3 = l_2d_1, \ldots, d_i = l_{i-1}d_1, \ldots$.

Якщо учні ознайомлені з подібністю трикутників (з IX класу), то ці співвідношення випливають з неї.

Оскільки ці співвідношення справедливі для прямої пучка, відповідної деякому фіксованому значенню k_0, але ми точно не вказували, яке це саме значення, то ці співвідношення справедливі для всіх прямих пучка з центром з початку координат. Якщо порівняти одержане співвідношення з виведеними при аналізі прямої пропорціональної залежності, то прийдемо до висновків: для всіх точок якої-небудь прямої пучка прямих з центром в початку координат відношення абсциси точки до її віддалі від початку координат та відношення ординати будь-якої точки до її віддалі від початку координат є величини постійні для кожної прямої пучка прямих. Дійсно, для розглядуваної прямої

$$\frac{x_1}{d_1} = \frac{x_2}{d_2} = \ldots = \frac{x}{d_i} = \ldots = \frac{x_1}{d_1}$$

та

$$\frac{y_1}{d_1} = \frac{y_2}{d_2} = \ldots = \frac{y_i}{d_i} = \ldots = \frac{y_1}{d_1}.$$

Це дає змогу знову встановити відповідність між величинами вказаних відношень та кутами, які утворюють з обраною системою відліку відповідні їм прямі пучка, або іншими словами: між вказаними величинами існує функціональна залежність, яка визначає деякі функції. Отже, ми приходимо до таких означень.

Означення 3.

Функціональна залежність, встановлена між відношенням ординат довільних точок прямих пучка, відповідних даному значенню коефіцієнта пропорціональності, до віддалей цих точок від початку координат та кутами, утвореними цими прямими з обраною системою відліку, визначає однозначну функцію синус даного кута при зміні останнього від 0 до 2π, а аналітично цей факт записують $u = \sin v$, де v змінюється від 0 до 2π.

Означення 4.

Функціональна залежність встановлена між відношенням абсцис — довільних точок прямих пучка,— відповідних даному значенню коефіцієнта пропорціональності, до віддалей цих точок від початку координат та кутами, утвореними цими прямими з обраною системою відліку, визначає однозначну функцію косинус даного кута при зміні останнього від 0 до 2π, а аналітично цей факт записують $u = \cos v$, де v змінюється від 0 до 2π.

Згідно встановленого вище закону відповідності значенням аргументу меншим або більшим за ті, які подані при означенні функцій синус та косинус, теж відповідають значенню функції. Це означає, що функції синус та косинус означені для значень аргументу, що змінюються від $-\infty$ до $+\infty$.

Короткі висновки

З розгляду пропонованого означення тригонометричних функцій та тригонометрії, побудованої на її основі, неважко прийти до таких висновків:

1. Означення тригонометричних функцій не даються формально, а конкретно виводяться.

2. Вивчення прямих і обернених тригонометричних функцій зв'язане однією і тією ж ідеєю введення.

3. Означення тригонометричних функцій на першій стадії усвідомлюються, а потім запам'ятовуються.

4. Оскільки означення тригонометричних функцій додаються для величин, то вони справедливі для окремих їх видів.

5. Зручні в практичному застосуванні, бо не обмежені ніякими рамками.

6. Не громіздкі при викладанні, а тому значно спрощують структуру будови курсу тригонометрії.

Спроби ознайомлення учнів з даним означенням тригонометричних функцій в Заболотівській СШ, Станіславської області, дали позитивні результати.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

М. О. КОРОЛЬ

ПИТАННЯ МЕТОДИКИ ВИКЛАДАННЯ ТОТОЖНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ АЛГЕБРАЇЧНИХ ВИРАЗІВ В VI—VII КЛАСАХ

Вивчення тотожних перетворень в курсі алгебри середньої школи викликає в учнів значні труднощі. Однією із причин цих труднощів є абстрактність цього матеріалу. Для полегшення та спрощення вивчення тотожних перетворень рекомендується пов'язувати їх виклад з арифметикою. В цій статті є прагнення до такого пов'язання за аналогією обчислень над многоцифровими числами, що учням добре відомо з арифметики натуральних чисел.

Спроба такого пов'язання тотожних перетворень многочленів, дій над ними зустрічається в літературі, але не розглядається детально. В цій статті є спроба дати таку деталізацію, яку можна було б використати в шкільній практиці. Можливість такого викладу перевірялася на практичній роботі математичного (шкільного) гуртка та на окремих уроках з математики в школах м. Станіслава.

Будь-яке натуральне число в прийнятій системі числення можна представити так: $a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1k + a_0$, де k — основа системи числення, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 — кількості розрядних одиниць. В цьому математичному виразі можна прийняти k за невідоме (або аргумент) многочлена, а букви a_n, a_{n-1}, ... a_1, a_0 — за коефіцієнти цього невідомого в різних степенях даного многочлена.

Так, наприклад, в десятковій системі числення число 26 754 можна представити: $2 \cdot 10^4 + 6{,}10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$, а відповідний цьому числу многочлен буде мати вид:

$$2x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 5x + 4:$$

Це ж саме число можна представити з основою системи числення 100. Тоді воно прийме вид: $2 \cdot 100 + 67 \cdot 100 + 54$, а відповідний до цього виразу многочлен матиме вид:

$$2y^2 + 67y + 54.$$

Якщо допускати основу системи числення далі як $1000 = 10^3$ та взагалі $100...0 = 10^n$, то тоді завжди можна буде представити будь-яке натуральне число в десятковій або подібній їй системі числення з основою 10^n та вказати відповідний цьому числу многочлен. Навпаки, при цих окремих умовах такому многочлену можна буде указати відповідне йому число за системою числення з основою 10^n .

Прикладом для учнів такого числення з основою 100 може бути співвідношення при вимірюванні земельних ділянок: ар має 100 кв. метрів, гектар має 100 арів (або 10 000 кв. метрів), один квадратний кілометр має 100 гектарів (або 1 000 000 кв. метрів). Тому числовий запис, наприклад, 36 кв. кілометрів 24 гектара 78 арів 54 кв. метра може відповідати многочлену:

$$36z^3 + 24z^2 + 78z + 54.$$

Прийнято порівнювати натуральні числа порозрядно. Якщо в першому числі більше розрядів в даній системі числення, ніж в другому при тій же системі числення, то тоді перше число більше другого. Якщо кількість розрядів в обох числах однакова, то тоді те число більше, у якого виявиться більша відповідна кількість розрядних одиниць при їх послідовному порівнянні від найвищого до їх першого розряду; якщо виявляються в обох числах всі відповідні кількості розрядних одиниць рівними, то ці числа будуть рівними. Тому рівність та нерівність многочленів, що відповідають натуральним числам в системі числення 10^n, природно прийняти в залежності від коефіцієнтів a^n, $a_{n-1}, \ldots,$ a_1, a_0 при невідомому (аргументі) k чисел вида:

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ \ldots \ + a_1 k + a_0.$$

Таке означення не суперечить загальноприйнятому означенню тотожності многочленів та їх нерівності. Такий підхід до рівності та нерівності многочленів більш доступний для учнів шостого класу, бо він аналогічний підходові до рівності та нерівності натуральних чисел.

Після вивчення від'ємних чисел многочлени з від'ємними коефіцієнтами можна розглядати як суми або різниці многочленів, що відповідають натуральним числам. Їх можна розглядати як алгебраїчну суму двох або декілька чисел виду одночленів або многочленів з коефіцієнтами різних знаків. Наприклад:

$$3x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 8x + 9 = (3x^5 + 7x^3 + 9) - (4x^4 + 5x^2 + 8x) -$$

це може відповідати різниці чисел: 307009—40 580.

У випадку, коли всі коефіцієнти від'ємні, можна розглядати такий многочлен відповідним від'ємному числу. Наприклад: $-2x^2 - 4x - 3 = -(2x^2 + 4x + 3)$ відповідає числу — 243 (із знаком мінус).

Дрібнораціональні коефіцієнти можна розглядати як утворення нових видів чисел з новими властивостями, пов'язуючи їх з теорією дробів.

Доцільніше вивчати спочатку одночлени виду ak^n, де a — число, позначене цифрами (наприклад: $4b^3$, $2y^2$), та многочлени з однією буквою (невідомим, аргументом), а потім вже вивчати многочлени з кількома буквами, з поступовим переходом від простих до більш складних виразів. Така послідовність вивчення теорії многочленів прийнята у вищій алгебрі, а дітей 12—13 років, учнів шостого класу, тим більше недоцільно зразу навчати досить складним виразам та їх перетворенням. Це приводить до поганого засвоєння основ алгебри.

Практика роботи математичних гуртків в деяких школах м. Станіслава (№ 4, 2, 5 та ін.) показує, що ознайомлення з різними системами числення та технікою дій цілком доступне для учнів V—VII класів, якщо їх викласти так, як звичайно викладається в школі арифметика натуральних чисел.

Вводити поняття упорядкованого многочлена за аналогією з многоцифровими числами значно простіше, ніж вводити поняття многочлена без упорядкування та зразу з багатьма різними буквами в одному і тому ж многочлені, хоч останнє звичайно і практикується в школах вже на перших уроках з алгебри. Шкільний експеримент доводить правильність цього твердження.

Вводити так поняття многочлена за аналогією з систематичними числами доцільно після вивчення першого та другого розділів програми з математики середньої школи на 1956/57 навчальний рік, тобто після вивчення раціональних (від'ємних) чисел. До цього букви можуть вживатися хоч би так, як це рекомендується в брошурі О. М. Барсукова «Перші уроки з алгебри в VI класі», тобто як узагальнені числа при розв'язуванні однотипних задач та запису їх розв'язку в загальному виді.

Згадана інтерпретація многочленів, які відповідають деяким цілим числам в системі числення при основі 10^n, мусить дати учням VI класу конкретну психологічну опору, з якої можна виходити для створення розуміння за аналогією алгебраїчних перетворень з многочленами. Це не суперечить теорії многочленів та одночасно відповідає загальним психологічно-педагогічним вимогам щодо викладання алгебри в середній школі з політехнічним навчанням.

Підготовча робота до вивчення дій над одночленами та многочленами може бути побудована за таким планом.

По-перше, в V класі учням треба навчитися числа заміняти буквами в числових формулах при розв'язуванні однотипних задач. Навпаки, вміти використати так одержану буквену формулу для розв'язування окремої задачі, підставляючи числове значення всіх букв, крім однієї, яку приймаємо за невідоме. Числове значення її визначається на підставі залежностей між компонентами та результатами чотирьох арифметичних дій.

По-друге, необхідно, щоб в учнів були тверді уявлення та навички в обчисленнях над раціональними числами, в умінні арифметично обгрунтовувати дії над сумами та різницями з скінченим числом компонентів на підставі законів дій (переставного, сполучного, розподільного), які мусять набуватися під час вивчення від'ємних чисел. Строге аксіоматичне обгрунтування дій над сумами та різницями в VI класі провести неможливо. Дати деяке уявлення про це потрібно хоч би на числових прикладах, щоб створити необхідні передумови для розуміння дій над одночленами та многочленами.

Властивості одночленів та многочленів розглядаються, виходячи з їх означення. Серед цих властивостей особливо важлива та, що будь-який одночлен та многочлен можна привести до канонічної форми (нормальної). Причому, треба вважати основним упорядкування многочленів за спадними степенями його членів і тільки як можливу форму їх упорядкування — за зростаючими степенями.

В школах за традицією додавання та віднімання многочленів виконується майже завжди «в рядок» та ігноруються такі обчислення «в стовпчик», а слід би, навпаки, дати перевагу записам «в стовпчик» так, як це прийнято для многоцифрових чисел. Адже можна і многоцифрові числа додавати «в рядок» (наприклад: 531 729 + + 895 673), але це викличе значне ускладнення в порівнянні з додаванням «в стовпчик», особливо якщо доданків більше двох. При обчисленнях «в стовпчик» значно спрощується техніка самих обчислень та значно зменшується навантаження на утримання в пам'яті проміжних числових значень з їх упорядкуванням, а тому менше виникає помилок від перевтоми пам'яті. Те ж саме можна сказати і про додавання многочленів. Для порівняння додамо два многочлени.

Наприклад (1):

Запис «в рядок»:	Запис «в стовпчик»:
а) $(4x^2 - 3x + 2) + (-3x^2 - 2x - 5) = 4x^2 - 3x + 2 - 3x^2 - 2x - 5 = x^2 - 5x - 3$	б) $\begin{array}{r} 4x^2 - 3x + 2 \\ \underline{-3x^2 - 2x - 5} \\ x^2 - 5x - 3 \end{array}$

При записах «в рядок» більше самих записів з підкресленням (та закресленням) подібних членів, їх переписуванням та нудним вибірковим шуканням подібних у випадках кількох многочленів з великим числом членів, що веде до пропусків та до переплутування коефіцієнтів подібних та неподібних членів.

При записах «в стовпчик», аналогічно, як при додаванні многоцифрових чисел порозрядно, многочлени підписуються так, щоб їх подібні члени були б під подібними та додавання цих многочленів зводилось би до зведення подібних членів по «стовпчиках», що зменшує затруднення та причини помилок при обчисленнях «в рядок».

Коли учням VI класу були показані обидва ці способи обчислення одночасно (м. Станіслав) та була надана свобода вибору, то вони завжди обирали спосіб додавання многочленів «в стовпчик» і на запитання відповідали: «Так додавати многочлен легше».

Віднімання виконується майже так, як і додавання многочленів. Різниця в тому, що при відніманні многочленів треба попередньо у від'ємнику (або у від'ємниках) змінити всі знаки перед всіма членами многочлена на протилежні та тоді вже виконувати додавання.

Наприклад (2):

Запис «в рядок»:

а) $(5x^2+7x-7)-(-2x^2+3x-4)=$
$=5x^2+4x-7+2x^2-3x+4=$
$=7x^2+x-3$

Запис «в стовпчик»:

б)
$$\begin{array}{r|r} (+) & 5x^2+4x-7 \\ (-) & \pm 2x \mp 3x \pm 4 \\ \hline & 7x^2+x-3 \end{array}$$

Ще приклад (3) для кількох многочленів:

а) $(2x^2-3x+5)-(3x^2-2x-4)-$
$-(-8x^2-12x+9)=2x^2-3x+$
$+5-3x^2+2x+4+8x^2+12x-$
$-9=7x^2+11x$

б)
$$\begin{array}{r|r} (+) & 2x^2-3x+5 \\ (-) & \mp 3x^2 \pm 2x \pm 4 \\ (-) & \pm 8x^2 \pm 12x \mp 9 \\ \hline & 7x^2+11x \end{array}$$

В записах «в стовпчик» ліворуч від вертикальної риски знаки плюс та мінус не означають дій, а є тільки показниками: де брати знаки многочленів без зміни (при знакові плюс ліворуч від вертикальної риски) та де треба міняти знаки на протилежні (при знакові мінус ліворуч від вертикальної риски), що слід робити в усіх многочленах, які треба віднімати. Протилежні знаки надписуються над даними, які і враховуються вже при додаванні, що замінює віднімання.

Обгрунтовування обчислень «в стовпчик» таке ж, як і при обчисленнях «в рядок», тобто на підставі переставної, сполучної та розподільчої властивостей членів многочленів, а також на підставі додавання та віднімання сум та різниць при їх скінченому числі.

Перевага додавання та віднімання многочленів «в стовпчик» перед діями «в рядок» не тільки в меншій кількості записів. Компактність, рельєфність записів «в стовпчик» дають широкі можливості прискорити виконання цих дій та в значній мірі вживати усний рахунок вже після невеликого тренування. В педагогічному відношенні вони виграють ще тим, що зв'язані за аналогією з досить відомим для учнів додаванням та відніманням «в стовпчик» многоцифрових чисел. Виникає також менше передумов для появи помилок, бо менше записів, вони скупчені і тому легкі для загального огляду. Це також сприяє прискоренню обчислень в алгебрі.

За схемою «в стовпчик» може бути проведено одночасно додавання та віднімання скінченого числа многочленів. В цьому випадку ще в більшій мірі видно перевагу перетворень за такою схемою.

Наприклад (4):

$$\begin{array}{r|l}
(+) & 4x^3 - 4x^2y \qquad\qquad - 2y^3 \\
(+) & -\ x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 5y^3 \\
(-) & \mp 3x^3 \pm 3x^2y \pm 2xy^2 \mp 4y^3 \\
(-) & \pm 2x^3 \mp 3x^2y \pm 4xy^2 \\
\hline
 & 2x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 11y^3
\end{array}$$

Цей приклад (4) при запису «в рядок» вимагав би спочатку запису в дужках, потім «розкриття дужок» та стомлюючого вишукування з підкресленням або з закресленням подібних членів, далі виконувати їх зведення при їх розкиданості в двох, а часом більше, довгих рядках, що приводить до частих помилок різного роду, особливо до загублення окремих членів. При обчисленнях «в стовпчик» все це виконується одночасно по окремих незалежних частинах (по окремих стовпцях), що не викликає ніяких затруднень вже після невеликого тренування.

Вивчення множення одночленів та многочленів на одночлени проводиться, як звичайно, на підставі переставного, сполучного та розподільчого законів додавання та множення. При цьому особливо важливі усні обчислення з невеликими по абсолютній величині коефіцієнтами, які учні повинні виконувати швидко та безпомилково. Після цього доцільно розв'язувати комбіновані приклади на додавання та віднімання многочленів в поєднанні з множенням многочленів на одночлени.

Для таких комбінованих прикладів записи «в рядок» потрібні лише на етапах їх вивчення як пояснювальні записи, як теоретичне обгрунтовання перетворень в усіх його послідовних деталях. Потім запис «в рядок» не вживається. Він змінюється або письмовим пояснювальним текстом (наприклад, в контрольних роботах), або усним роз'ясненням та обгрунтуванням цих перетворень (наприклад, при усному опитуванні учня). Записи ведуться «в стовпчик».

Нехай, наприклад (5), задано виконати дії:

$$(2x^2 - 3x + 2) \cdot 4x - (3x^2 + 2x - 6) \cdot 3x - (-x^2 - 2x + 3) \cdot 2$$

Цей приклад можна виконувати «в стовпчик» так:

5а) $$\begin{array}{r|l|l}
(+) & 2x^2 - 3x + 2 & \cdot 4x \\
(-) & \mp 3x^2 \mp 2x \pm 6 & \cdot 3x \\
(-) & \pm\ x^2 \pm 2x \mp 3 & \cdot 2 \\
\hline
 & -x^3 - 16x^2 + 30x - 6 &
\end{array}$$

5б) $$\begin{array}{r|l}
(+) & 8x^3 - 12x^2 + 8x \\
(+) & -9x^3 - 6x^2 + 18x \\
(+) & \qquad\quad + 2x^2 + 4x - 6 \\
\hline
 & -x^3 - 16x^2 + 30x - 6
\end{array}$$

В прикладі (5а) обчислення виконується усно по стовпцях з одночасним множенням, додаванням та врахуванням знаків так:

$$(2 \cdot 4 - 3 \cdot 3)\, x^3 = -x^3; \quad (-3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2)\, x^2 = -16x^2;$$

$$(2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2) \cdot x = 30x; \quad -3 \cdot 2 = -6;$$

це і є «пояснювальні записи» (один з їх видів).

В прикладі (5б) спочатку виконано множення многочленів на одночлени, а потім виконується додавання з одночасною зміною знаків на протилежні в усіх від'ємників. Тоді в прикладі (5а) підсумок не записується, а сам приклад (5а) використовується як допоміжний для одержання запису (5б).

В прикладі (5а) проміжні результати обчислюються в умі без записів, а тому множення многочленів на одночлени, додавання та віднімання одержаних добутків виконуються одночасно як одна операція. В прикладі ж (5б) проведено окремо множення, а потім додавання — як дві операції, як розчленування однієї операції в прикладі (5а) на дві операції в прикладі (5б). Це здається спочатку незвичайним, але ж відомо, що при діленні многочленів виконується одночасно багато операцій і всі вони зараховуються до однієї операції многочленів ділення многочленів, що приймається за цілком нормальне та звичне.

Такий порядок обчислень може бути застосований і до додавання та віднімання дробів, коли їх перетворення не виходить за межі виду прикладів (5а). Такі дії доцільно виконувати з використанням допоміжних обчислень.

Нехай треба виконати дії, наприклад (6):

6а) Основні обчислення:

$$\frac{4x^3-3x^2-2x-3}{3x^2}-\frac{4x^2+2x-5}{4x}=$$
$$=\frac{4x^3-18x^2+7x-12}{12x^2}$$

6б) Допоміжні обчислення:

$$\begin{array}{r|l|l}
(+) & 4x^3-\ \ 3x^2-2x-3 & \cdot 4 \\
(-) & \qquad \mp\ 4x^2\mp 2x\pm 5 & \cdot 3x \\ \hline
 & 4x^3-18x^2+7x-12 &
\end{array}$$

6в)
$$\begin{array}{r|l}
(+) & \ \ 16x^3-12x^2-8x-12 \\
(+) & -12x^3-\ \ 6x^2+15x \\ \hline
 & \ \ 4x^3-18x^2+7x-12
\end{array}$$

Допоміжний запис (6в) є пояснювальним і тому надалі (при одержанні навичок) його можна не писати, а записувати лише допоміжний (6б).

В такого роду прикладах, навпаки, може бути чисельник одночленом, а знаменник та додаткові множники до чисельників можуть бути многочленами. Наприклад (7):

а) Основні обчислення:

$$\frac{\overbrace{3x}^{2x+3}}{2x-3}-\frac{\overbrace{2x}^{2x-3}}{2x+3}=\frac{2x^2+15x}{4x^2-9}$$

б) Допоміжні обчислення:

$$\begin{array}{r|l|l}
(+) & \ \ 2x+3 & \cdot 3x \\
(-) & \mp 2x\pm 3 & \cdot 2x \\ \hline
 & 2x^2+15x &
\end{array}
=
\begin{array}{r|l}
(+) & \ \ 6x^2+9x \\
(+) & -4x^2+6x \\ \hline
 & \ \ 2x^2+15x
\end{array}$$

Записи «допоміжних обчислень», праворуч від вертикальної риски, дають можливість вести «основні обчислення» в чистому виді, без громіздких пояснювальних записів всіх послідовних перетворень. Основні обчислення тоді компактніші та не стомлюють багатьма переписуваннями, значно зменшують цим самим імовірність помилок, прискорюють обчислення, скорочують загальне число записів.

Обгрунтовування знаходження спільного найменшого знаменника (кратного), додаткових множників до кожного чисельника дробів та скорочення дробів (на спільний найбільший дільник) виконується звичайно та записується праворуч від вертикальної риски як допоміжні обчислення. Вони можуть зовсім не записуватися та виконуватися усно, якщо немає вимоги з боку вчителя їх записувати.

Такі записи перетворень потім вживаються при розв'язуванні рівнянь та їх систем. Вони тоді не будуть викликати ніяких сумнівів, а будуть прийматися як дещо звичайне, вже відоме. Вся увага буде зосереджуватися на розв'язуванні рівнянь, на їх теоретичному обгрунтуванні, на особливо важливому та трудному питанні еквівалентності рівнянь при перетвореннях.

Така форма записів перетворень при розв'язуванні рівнянь виключає багато випадків появи помилок в знаках, при умові твердих навичок в усних обчисленнях над невеликими раціональними числами. Для цього особливо важливі усні вільні обчислення в подібних випадках, які характеризуються такими прикладами:

$$(+5)\cdot(-3)-(-4), \text{ або } (-6)\cdot(-4)+(-7);$$
$$(-20)+(+2)\cdot(-5), \text{ або } (+20)+(+2)\cdot(-5):$$
$$(-4)\cdot(+3)+(-5)\cdot(-7), \text{ або } (-4)\cdot(-3)-(+5)\cdot(-7) \text{ і т. п.}$$

В таких прикладах зручно для полегшення обчислень завжди віднімання замінювати додаванням, множачи від'ємник на (-1), наприклад: $(-20)-(+3)\cdot(-5)=(-20)+(+3)\cdot(-5)\cdot(-1)$.

Обчислення (перетворення) повинні бути найменш громіздкими та зручними для огляду одночасно всіх або, принаймні, основних обчислень, з самими короткими та необхідними записами. Будь-які пояснювальні записи, допоміжні обчислення доцільно вести на спеціальних листах, або на відведеному для цього місці листа, на якому ведуться основні обчислення (перетворення). Звичайно таке місце відокремлюють вертикальною рискою на правому боці листа, а по розміру — в залежності від обсягу цих записів, обчислень, а саме так, як це зроблено в прикладі (6).

Професор М. В. Оглоблін в роботі [4] писав, що закреслення та підкреслення слід було б зовсім виключити: воно не полегшує обчислень, а створює неохайність та приводить часто до помилкових записів. Можна допускати підкреслення та закреслення тільки для того, щоб звернути особливу увагу учнів в процесі навчання на щось першорядне, але пізніше не допускати його використання, бо воно не приносить полегшення обчислень.

Закреслення приводить інколи до досить грубих помилок. Наприклад,

1) при скороченні дробів учні інколи пишуть: $\frac{4a^2}{12a^2b}$ дорівнює $3b$, якщо цілком закреслено чисельник та знаменник;

2) при зведенні подібних членів в чисельнику алгебраїчного дробу при їх закресленні учні приймають, що

$$\frac{4x - 4x}{5} \text{ дорівнює } \frac{1}{5} \text{ і т. ін.}$$

Дуже важливо, щоб учні негайно та вільно усно говорили та писали відповідь без закреслень в основних випадках дій над одночленами, многочленами та дробами. Наприклад (8):

$$3a^2b \cdot 4a^3b^2 = ; \quad (a \pm b)(n \pm k) = ; \quad (a \pm b) : c; \quad \frac{a}{b} \cdot bk = ;$$

$$am \cdot \frac{b}{a} = ; \ \frac{a}{b} : a = ; \quad a : \frac{a}{b} = ; \ \frac{a}{b} : \frac{1}{b} = ;$$

і т. п. (не допускаючи переписування). Для закріплення навичок таких перетворень усно можна широко вживати відповідні стінні таблиці з такими прикладами. Це можна робити при фронтальному опитуванні результатів та усних пояснень про їх розв'язування з теоретичним обгрунтуванням. В усіх випадках, коли зустрічаються подібні приклади, як складова частина більш складних перетворень, доцільно проводити їх усне обчислення.

При скороченні дробів та в других подібних випадках рекомендується вживати спеціальні знаки заміни для чисельника «$\overline{}$» та для знаменника дробу «$\underline{}$».

Наприклад:

$$\frac{\overset{2b^2}{\overline{8a^2b^3}}}{\underset{1}{\underline{7cn}}} \cdot \frac{\overset{c}{\overline{7c^2n}}}{\underset{3a^3}{\underline{12a^5b}}} = \frac{2b^2c}{3a^3}.$$

При такому записі закреслення виключається; показується заміна даних чисельника та знаменника новими величинами без змінювання та будь-яких поправок даного прикладу, що зручно для контролю читанням проведених записів.

Множення многочленів за схемою множення впорядкованих многочленів дано в підручниках та різних посібниках. Може бути використана і таблична форма множення многочленів, як наведено в статті [5]. Вона дає лише іншу форму запису. Схема множення впорядкованих многочленів ще корисна тим, що вона аналогічна множенню многоцифрових чисел, які мають вид $a_m k^m + a_{m-1} k^{m-1} + \ldots + a_1 k + a_0$ при основі системи числення $k = 10^n$. Це дає можливість пов'язати арифметику з алгеброю, конкретизувати в очах учнів множення многочленів. Наприклад (9):

а) Множення «в стовпчик» многоцифрового числа

$$\begin{array}{r} \times\ 21321 \\ 21 \\ \hline 21321 \\ 42642 \\ \hline 447741 \end{array}$$

б) Множення «в стовпчик» упорядкованого многочлена:

$$\begin{array}{r} \times\ 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ 2x + 1 \\ \hline 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ 4x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x\phantom{{}+1} \\ \hline 4x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 4x + 1 \end{array}$$

Звичайно множення впорядкованих многочленів починають з старшого члена (з найбільшим показником степеня «головної» букви), що вважається зручним для многочленів та незручним для чисел, але вибір тут довільний.

Обгрунтування такого множення многочленів звичайне: на підставі множення сум та різниць, на підставі переставного, сполучного та розподільного закону арифметичних дій.

Використовуючи поняття систематичного числа з основою числення $k = 10^n$ та розглядаючи особливості коефіцієнтів многочленів, вводиться множення многочленів з різними коефіцієнтами за величиною та за знаком. Для чисел натурального ряду одиниці нижчого розряду перетворюються в одиниці наступного вищого розряду, коли одиниць нижчого розряду набирається більше основи числення 10^n. Для многочленів цього не прийнято виконувати, тобто не прийнято перетворювати одиниці одного з коефіцієнтів членів многочленів в одиниці іншого члена, бо звичайно певно не визначається значення невідомого (букви) в многочленах.

Через зв'язок дій над многочленами з арифметикою та з рівняннями створюються широкі можливості зв'язку цих дій з конкретними задачами, зокрема з політехнічним змістом. Разом з цим указується на можливість позначення (заміну) одночлена з його знаком або многочлена, або взагалі будь-якого математичного виразу однією буквою та, навпаки, можливість заміни букви одночленом з його знаком або многочленом, або виразом довільного виду. Для цього необхідне тренування на протязі вивчення алгебри з перших і до останніх днів. Знання різних прикладень математики в учнів самі по собі не утворюються. Цьому треба навчати так же, як і самій математиці. Теорію та практику її застосування треба викладати в тісному поєднанні, що стає корисним для їх обох (теорії і практики).

Немає смислу розв'язувати значно ускладнені, довгі та великі комбіновані приклади на перетворення з многочленами, бо такі приклади досить рідко зустрічаються на практиці, а часу на їх виконання витрачається невиправдано багато. Цілком же такі приклади виключати не можна, бо вони створюють можливості для тренування обчислень на порядок дій, на шукання більш раціональних перетворень. Наприклад (10):

$$(3x^2 + 4x - 5)(2x^2 - 2x - 3) - (2x^2 - 3x - 4)(3x^2 - 4x + 5) +$$
$$+ (4x^3 - 3x^2 - 2) = N$$

Перетворення тут доцільно робити за частинами так:

1)
$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x - 5 \\ \times\, 2x^2 - 2x - 3 \\ \hline 6x^4 + 8x^3 - 10x^2 \qquad\qquad \\ -6x^3 - 8x^2 + 10x \qquad \\ -9x^2 - 12x + 15 \\ \hline 6x^4 + 2x^3 - 27x^3 - 2x + 15; \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x - 4 \\ \times\, 3x^2 - 4x + 5 \\ \hline 6x^4 - 9x^3 - 12x^2 \qquad\qquad \\ -8x^3 + 12x^2 + 16x \qquad \\ 10x^2 - 15x - 20 \\ \hline 6x^4 - 17x^3 + 10x^2 + x - 20 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|r}
3)\ (+) & 6x^4 + 2x^3 - 27x^2 - 2x + 15 \\
(-) & \mp 6x^4 \pm 17x^3 \mp 10x^2 \mp x \pm 20 \\
(+) & 4x^3 - 3x^2 \qquad - 2 \\
\hline
N = & 23x^3 - 40x^2 - 3x + 33
\end{array}
$$

Тут буквою N позначено шукану відповідь в цьому прикладі.

При обчисленнях в школі, переважно «в рядок» в прикладі (10) треба було виконати: 1) два множення, переписуючи весь приклад; 2) розкрити дужки та знов переписати увесь приклад; 3) вишукувати та підкреслювати (закреслювати) подібні члени в прикладі, розтягнутому на двох рядках, що вимагає великого напруження уваги, щоб не допустити пропуску або помилки; 4) звести подібні члени та впорядкувати многочлен як відповідь.

При обчисленнях по частинах та «в стовпчик» всі перетворення сконцентровані, а тому легкі для огляду та контролю; напруження часто переривається відпочинком при переході від однієї частини виконання прикладу до іншої, що значно менше стомлює і тому може не викликати помилок. Всі обчислення тут виконуються за єдиною та спрощеною формою, що полегшує їх вивчення та виробку навичок, близьких до автоматизму. Ця форма, звичайно, не виключає інших, але їй треба надати перевагу порівняно з записами «в рядок».

Перетворення на додавання, віднімання та множення одночленів та многочленів з кількома буквами та неупорядкованих многочленів слід було б розглядати окремо як більш складні випадки. В основі цих перетворень лежать дії над упорядкованими многочленами з однією буквою, які попередньо мусять бути вивчені та міцно закріплені. Такий порядок многочленів за концентрами значно повинен спростити і полегшити їх вивчення (як це є у вищому курсі алгебри).

Визнано, що алгорифм ділення многочленів теоретично не міг бути викладеним раніше в VI класі, а тепер і в VII класі. Тому порівняння за аналогією алгорифма ділення многоцифрових чисел з алгорифмом ділення многочленів буде корисним для ілюстрації та конкретизації уявлень учнів.

Наприклад (11), поділити (обернена дія до множення):

$$
\begin{array}{l}
\text{а)}\ 447741 \,\big|\, \underline{21} \\
\quad \underline{42} \qquad\ \ 21321 \\
\quad\ \ 27 \\
\quad\ \ \underline{21} \\
\quad\ \ \ \ 67 \\
\quad\ \ \ \ \underline{63} \\
\quad\ \ \ \ \ \ 44 \\
\quad\ \ \ \ \ \ \underline{42} \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ 21 \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{21} \\
\quad\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

б)
$$
\begin{array}{l|l}
4x^5+4x^4+7x^3+7x^2+4x+1 & \quad 2x+1 \\ \cline{2-2}
\mp 4x^5 \mp 2x^4 & 2x^4+x^3+3x^2+2x+1 \\ \cline{1-1}
\qquad 2x^4+7x^3 & \\
\quad \mp 2x^4 \mp x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 6x^3+7x^2 & \\
\qquad\quad \mp 6x^3 \mp 3x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 4x^2+4x & \\
\qquad\qquad\quad \mp 4x^2 \mp 2x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 2x+1 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \mp 2x \mp 1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Обгрунтування такого ділення многочленів може бути таким, як викладено в книзі В. Л. Гончарова [7], але разом з тим розглянуте як обернена дія до множення в прикладі (9). В учнів треба розвивати поняття зв'язків між різними питаннями математики, розвивати «алгебраїчне уявлення».

Пропонована схема ділення многочленів в загальній статті М. В. Яковкіна [6] не дає полегшення в силу того, що в ній вимагається в багатьох місцях змінювати знаки, що легко сплутати: де та коли міняти ці знаки. В звичайному алгорифмі ділення многочленів такої розкиданості в знаках немає, він схожий з алгорифмом ділення многоцифрових натуральних чисел, а тому більш легкий для вивчення, запам'ятовування та практичного застосування.

За алгорифмом ділення многочлена на многочлен потрібно ділити перший член діленого, а потім перший член кожної наступної остачі на перший член дільника; причому прийнято писати наступні остачі у виді многочлена (повністю всі члени). Але при діленні многочленів можна повністю не писати всіх членів наступних остач, а записувати лише перший член наступної остачі та ділити його на перший член дільника для одержання наступного члена частки, який потім множиться на всі члени дільника. Одержаний добуток підписується під діленим за подібністю членів та під таким самим попереднім добутком. В одержаному добутку потім змінюються знаки на протилежні, які надписуються над усіма знаками членів цього добутку. Всі послідовно одержані добутки підписуються так, щоб подібні члени діленого та цих добутків були розміщені в одному стовпці як подібні члени многочленів при їх додаванні. Продовжувати так ділення можна доти, поки перший член наступної остачі буде мати показник степеня вищий або рівний показнику степеня старшого члена (члена з найбільшим показником степеня) дільника. Ділення буде закінчено, якщо остання остача дорівнюватиме нулю; ділення не може продовжуватися, якщо перший член (старший член) остачі буде мати показник степеня хоч би на одиницю менше від показника степеня старшого члена дільника. В другому випадку буде ділення з остачею і тоді остання остача записується повністю. Це все стосується многочленів, упорядкованих за спадними степенями «головної» букви (аргументу, невідомого).

Наприклад (12) — (повторюючи приклад (11) — без запису остач):

$$
\begin{array}{l|l}
\;\;4x^5+4x^4+7x^3+7x^2+4x+1 & \;\;\;\;2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{\mp 4x^5 \mp 2x^4} & 2x^4+x^3+3x^2+2x+1 \\
\qquad\underline{\mp 2x^4 \mp x^3} & \\
\qquad\qquad\underline{\mp 6x^3 \mp 3x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad\underline{\mp 4x^2 \mp 2x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\underline{\mp 2x \mp 1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Розв'язування подібного прикладу по окремих етапах буде таке. Наприклад (13):

Нехай треба поділити многочлени:

$$(15m^4-m^3-m^2+41m-70):(3m^2-2m+7)=$$

П е р ш и й е т а п. Всі члени діленого та дільника впорядковуємо за спадними степенями (зводячи подібні члени, якщо вони є). Ділимо перший член (старший член) діленого на перший (старший) член дільника; частку записуємо першим (старшим) членом частки від ділення даних многочленів:

$$
\begin{array}{l|l}
15m^4-m^3-m^2+41m-60 & 3m^2-2m+7 \\ \cline{2-2}
 & \quad 5m^2
\end{array}
$$

Д р у г и й е т а п. Одержаний перший (старший) член частки $5m^2$ множимо на всі члени дільника $3m^2-2m+7$ та їх добуток $15m^4-10m^3+35m^2$ підписуємо під діленим так, щоб подібні члени були б під подібними; а потім змінюємо знаки в членах першого добутку на протилежні, надписуючи їх над знаками членів цього добутку, а саме так:

$$
\begin{array}{l|l}
\;\;15m^4-m^3-m^2+41m-70 & 3m^2-2m+7 \\ \cline{2-2}
\mp 15m^4 \pm 10m^3 \mp 35m^2 & \quad 5m^2
\end{array}
$$

Т р е т і й е т а п. Знаходимо старший член першої остачі, не рівний нулю, $9m^3$, та ділимо його на перший член дільника $3m^2$ — це буде другий член частки $3m$:

$$
\begin{array}{l|l}
\;\;15m^4-m^3-m^2-41m-70 & 3m^2-2m+7 \\ \cline{2-2}
\underline{\mp 15m^4 \pm 10m^3 \pm 35m^2} & 5m^2+3m \\
\qquad\qquad 9m^3 &
\end{array}
$$

Ч е т в е р т и й е т а п. Другий член частки $3m$ множимо на всі члени дільника та одержаний другий добуток $9m^3-6m^2+21m$ підписуємо під попереднім добутком та діленим так, щоб подібні члени його були під подібними в одному стовпці (для кожного з них); потім в другому добутку змінюємо всі знаки на протилежні, надписуючи їх над знаками цього другого добутку.

Перший член попередньої остачі та перший член наступного добутку завжди співпадають, бо вони взаємозалежні, як між діленим (добутком) та дільником з часткою (співмножниками).

Записується це так:

$$\begin{array}{r|l} 15m^4 - m^3 - m^2 + 41m - 70 & 3m^2 - 2m + 7 \\ \cline{2-2} \underline{\mp 15m^4 \pm 10m^3 \mp 35m^2} \qquad\qquad & 5m^2 + 3m \\ \mp 9m^3 \pm 6m^2 \mp 21m \qquad\quad & \end{array}$$

П'ятий етап. Знов знаходимо перший член другої остачі, не рівний нулю, та ділимо його ($-30m^2$) на перший член дільника ($3m^2$), одержуємо наступний (третій) член частки від ділення даних многочленів, який множимо на всі члени дільника. Одержаний третій добуток підписуємо під діленим та попередніми добутками:

$$\begin{array}{r|l} 15m^4 - m^3 - m^2 + 41m - 70 & 3m^2 - 2m + 7 \\ \cline{2-2} \underline{\mp 15m^4 \pm 10m^3 \mp 35m^2} \qquad\qquad & 5m^2 + 3m - 10 \\ \underline{\mp 9m^3 \pm 6m^2 \mp 21m} \qquad & \\ \underline{\pm 30m^2 \mp 20m \pm 70} & \\ 0 & \end{array}$$

Так продовжуємо доти, поки в остачі буде нуль або перший член наступної остачі буде мати показник степеня, менший принаймні на одиницю від показника степеня першого (старшого) члена дільника.

Таким чином, всі перетворення (дії) над многочленами та алгебраїчними дробами можна зводити до єдиної форми запису, схожою з діями над многоцифровими цілими числами (додатними та від'ємними), що мусить значно полегшити їх вивчення та практичне застосування. Цим самим інші форми не виключаються, а можуть бути використані як окремі випадки, які інколи доцільно вжити для прискорення обчислень та перетворень тільки в цих окремо взятих випадках.

При введенні сучасних електроннолічильних машин важливо уміти перетворювати будь-який математичний вираз на ряд арифметичних дій, тому вищевикладене повинно сприяти підготовці у виробці деяких таких вмінь та навичок.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Барсуков, Алгебра, I, Учпедгиз, 1956.
2. В. М. Брадис, Теория и практика вычислений, Учпедгиз, 1937.
3. С. И. Новосёлов, Специальный курс элементарной алгебры, 1951.
4. Н. В. Оглоблин, Об устных и письменных вычислениях. Известия Крымского педагогического института им. М. В. Фрунзе, IV, 1936.
5. И. В. Проскуряков, Числа и многочлены, АПН РСФСР, 1949.
6. М. В. Яковкин, О схеме деления многочленов, «Математика в школе», 1954, № 5.
7. В. Л. Гончаров, Начальная алгебра, АПН РСФСР, 1955.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

Я. А. РОЙТБЕРГ

ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ТЕОРЕМ ГЕОМЕТРІЇ КІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ СТЕРЕОГРАФІЧНОЇ ПРОЕКЦІЇ

Звичайно [3], [4] геометрію кіл будують за допомогою поняття степеня точки відносно кола.

А між тим геометрія кіл може бути побудована за допомогою стереографічної проекції. Така побудова має деякі переваги: вона знайомить з ідеєю геометричного перетворення фігури у фігуру та його використанням, з ідеєю інтерпретації (бо по суті в дальнішому будується інтерпретація сферичної геометрії на площині, кожне твердження сферичної геометрії дає деяку властивість плоскої геометрії), вона знайомить з однією з важливіших картографічних проекцій — з стереографічною проекцією.

В роботі доводяться основні теореми геометрії кіл за допомогою стереографічної проекції.

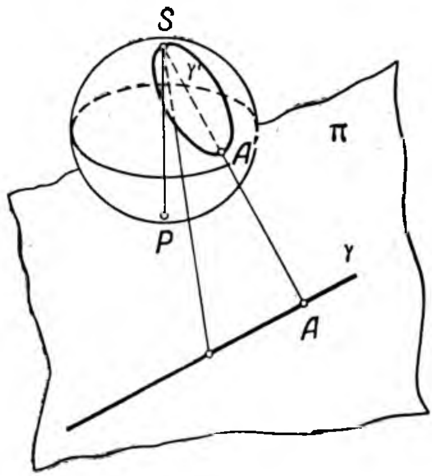


Рис. 1.

§ 1. Основні позначення. Властивості стереографічної проекції

Відомо [1], [2], що стереографічна проекція дає взаємно однозначне відображення сфери з виколотою точкою S на площину (π) (рис. 1). Умовимось про позначення. Центр проекції позначатимемо точкою S і називатимемо верхнім полюсом сфери. Точку дотику сфери з площиною π будемо позначати буквою P і називати нижнім полюсом сфери. Кола сфери, що проходять через точки P і S, називатимемо меридіанами; кола, ортогональні до меридіанів, називатимемо паралелями. Паралель, площина якої проходить через центр сфери, називатимемо екватором.

Фігури на сфері будемо позначати штрихованими буквами, їх образи на площині будемо позначати відповідними буквами без штрихів.

В дальшому будемо вважати відомими такі властивості стереографічної проекції [1], [2].

1. Образом кола γ сфери, що проходить через точку S, є пряма γ площини і навпаки (див. рис. 1). Зокрема меридіани сфери перетворюються в прямі, що проходять через точку P (рис. 2).

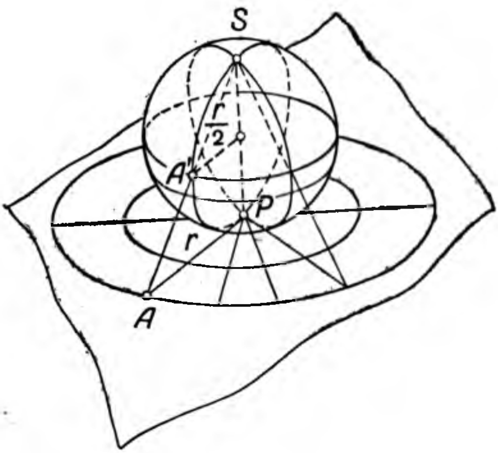


Рис. 2.

2. Образом кола γ' сфери, що не проходить через точку S, є коло γ площини і навпаки. Зокрема, паралелі сфери перетворюються в концентричні кола з центром в точці P (рис. 2).

3. Стереографічна проекція не змінює величини кутів, тобто якщо криві γ' і Γ' на сфері утворюють кут величини α, то їх образи γ і Γ утворюють також кут величини α. Зокрема, образи ортогональних ліній сфери теж ортогональні.

4. Відмітимо також, що всяке коло площини можна вважати образом екватора при стереографічній проекції відповідно підібраної сфери. Дійсно, якщо радіус сфери дорівнює половині радіуса кола (P, r) і якщо сфера дотикається до площини в точці P, то стереографічною проекцією екватора сфери буде коло (P, r). Центр проекції — точка S, як завжди, діаметрально протилежна точці P (рис. 2).

§ 2. Образи діаметрально протилежних точок сфери

Нехай γ — образ екватора і A образ деякої точки A' сфери. Знайдемо образи множини кіл великого круга (або, коротше, великих кіл), які проходять через точку A'. Кожне з таких кіл перетинає екватор γ^1 в двох діаметрально протилежних точках (бо всякі два великі кола перетинаються в двох діаметрально протилежних точках сфери). Ясно, що діаметрально протилежні точки екватора γ' проектуються в діаметрально протилежні точки кола γ. Тому розглядувана множина кіл сфери проектується в множину кіл, які перетинають γ в діаметрально протилежних точках. До останньої множини ми віднесемо також пряму AP, яка є образом меридіана $A'PS$. Навпаки, легко бачити, що всяке коло або пряма площини, яка проходить через точку A і перетинає коло γ в діаметрально протилежних точках, є образом великого кола сфери, яке проходить через точку A'. Таким чином, множина всіх великих кіл сфери, які проходять через точку A', проектується в множину всіх кіл і прямих (тільки одна пряма) площини, які проходять через точку A і перетинають γ діаметрально, тобто в діаметрально протилежних точках.

Всі великі кола сфери, які проходять через точку A', проходять одночасно через точку A_1', діаметрально протилежну точці A'. Звідси ясно, що їх образи разом з точкою A проходять також через точку A_1. Одержали доведення такої теореми:

1. Нехай дано коло γ і точка A. Всі кола і пряма, які проходять через точку A і перетинають γ діаметрально, мають ще одну спільну точку A_1.

Має місце обернена теорема.

2. Всяке коло (або пряма), яке проходить через точки A і A_1, перетинає γ діаметрально.

Доведення оберненої теореми легко одержати, якщо розглянути відповідні прообрази на сфері. Точки A і A_1 є образами діаметрально протилежних точок сфери A' і A_1'.

Покажемо тепер, як по колу γ і точку A побудувати точку A_1 (γ — образ екватора, A і A_1 образи діаметрально протилежних точок сфери). Через точку A проведемо довільне коло, яке перетинає γ діаметрально. (Виберемо на γ дві діаметрально протилежні точки C і C_1, які не лежать на прямій AP, і через точки A, C, C_1, побудуємо коло. (Точка A_1 лежить на перетині кола ACC_1 і прямої AP).

§ 3. Еліптична зв'язка

Означення. Множину всіх кіл і прямих, які перетинають деяке коло γ діаметрально, називатимемо еліптичною зв'язкою.

Коло γ називається базисним колом еліптичної зв'язки. Будемо вважати, що базисне коло теж належить зв'язці. Центр базисного кола називається центром зв'язки.

Звичайно до еліптичної зв'язки відносять лише кола, які перетинають коло γ діаметрально. З нашої точки зору зручно відносити до зв'язки і прямі, які перетинають γ діаметрально, тобто такі, які проходять через центр базисного кола. Тоді, якщо вважати (див. § 1, твердження 4), що γ — образ екватора, очевидно, що еліптична зв'язка — це множина образів всіх великих кіл сфери. (Треба мати на увазі, що всяке велике коло сфери перетинається з екватором — теж великим колом — діаметрально). Прямі зв'язки є образами меридіанів — теж великих кіл.

Теорема 1. Нехай задано базисне коло γ. Через кожну точку A площини, відмінну від центра P, проходить безліч кіл еліптичної зв'язки. Всі вони проходять ще через точку A_1. Навпаки, всяке коло, яке проходить через точки A і A_1, належить зв'язці.

Сформульована теорема є по суті іншим формулюванням теорем 1 і 2 попереднього параграфа.

Означення. Сукупність всіх кіл і пряма площини, що проходять через дві точки A і A_1, називається еліптичним пучком. Пряма AA_1 називається радикальною віссю пучка. Точки A і A_1 називатимемо вершинами пучка.

Якщо всі кола і пряма пучка належать зв'язці, говорять, що пучок належить зв'язці.

Ясно, що сукупність кіл і пряма еліптичної зв'язки, які проходять через точку A, утворюють еліптичний пучок, який належить зв'язці. Таким чином, кожна точка площини, відмінна від точки P, є вершиною еліптичного пучка, який належить зв'язці.

Теорема 2. Через всякі дві точки A і B, що не лежать з точкою P на одній прямій, проходить єдине коло еліптичної зв'язки.

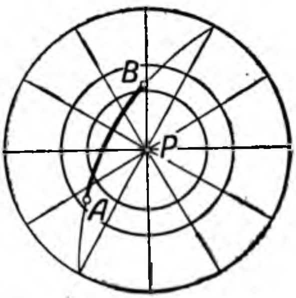


Рис. 3.

Доведення. Тому, що A і B не лежать з точкою P на одній прямій, точки A і B не є образами діаметрально протилежних точок сфери. По цій же причині прообрази точок A і B не лежать на одному меридіані. Теорема тепер випливає з того факту, що через дві недіаметрально протилежні точки A' і B' сфери проходить єдине велике коло, яке не є в цьому випадку меридіаном.

Приведемо на закінчення параграфа приклади задач.

1. Через дві точки A і B побудувати коло, яке перетинає дане коло γ діаметрально.

Шукане коло проходитиме через точки A, A_1, B, де A і A_1 образи діаметрально протилежних точок сфери, причому γ — образ екватора.

2. В першому наближенні можна вважати, що кожна задача картографії — це задача про відображення сфери або частини сфери на площину. Відомо, що не існує проекції, яка б давала перетворення області сфери на область площини без спотворення метричних елементів. (Не можна розгорнути сферу або її частину на площину. В цьому відношенні картографія була б «більш щасливою» наукою, якби земля мала форму циліндра чи конуса). Тому важливе значення мають такі проекції, які не міняють величини кутів. Такою, зокрема, є і стереографічна проекція, яка часто вживається для зображення східної і західної півкулі, а також для зображення навколополюсних областей.

Нехай, наприклад, карта (див. рис. 3, де схематично зображено сітку меридіанів і паралелей) північної півкулі виконана в стереографічній проекції. Накреслити на карті «найкоротший шлях» між точками A і B.

Вказівка. Як відомо, найкоротший шлях між двома точками сфери—коротша дуга великого кола, яка їх сполучає. Тому потрібно побудувати проекцію дуги кола великого круга, який проходить через точки A' і B', тобто потрібно через точки A і B побудувати коло еліптичної зв'язки, визначеної базисним колом γ (γ—образ екватора).

§ 4. Еліптичний пучок. Гіперболічний пучок. Параболічний пучок

Теорема 1. Для кожного еліптичного пучка можна вказати безліч еліптичних зв'язок, до яких пучок належить.

Доведення. Нехай AA_1 — еліптичний пучок і коло O — довільне коло пучка. Візьмемо на прямій AA_1 між A і A_1 довільну точку P. Через точку P проведемо хорду $CC_1 \perp PO$. Коло γ (P, PC) приймемо за базисне коло еліптичної зв'язки. γ — образ екватора. Тому що коло O і пряма AA_1 перетинають γ діаметрально (за побудовою), вони є образами великих кіл сфери, а точки A і A_1 є образами діаметрально протилежних точок сфери. Тепер ясно, що всяке коло пучка AA_1, проходячи через точки A і A_1, перетинатиме γ діаметрально, а значить, належатиме зв'язці. Теорема доведена.

Наслідок. Всякий еліптичний пучок AA_1 можна розглядати як множину образів кіл сфери (великих), які проходять через діаметрально протилежні точки сфери A' і A'_1. Ясно також, що через кожну точку площини проходить єдине коло (або пряма) еліптичного пучка, визначеного вершинами A і A_1.

Теорема 2. Нехай AA_1 — еліптичний пучок. Через кожну точку B площини проходить коло (або пряма), ортогональне до всіх кіл пучка.

Доведення. Еліптичний пучок AA_1 — образ множини всіх кіл сфери, які проходять через діаметрально протилежні точки A' і A_1', точка B — образ деякої точки B' сфери. Площина, яка проходить через точку B' і перпендикулярна до діаметра $A'A_1'$, перетинає сферу по колу, ортогональному до всіх кіл, що проходять через A' і A_1' (Чому?). Образом цього кола і буде коло (або пряма) площини, яке проходить через точку B і перетинає всі кола пучка (а також пряму AA_1) ортогонально (див. § 1, твердження 3).

Зауваження. Якщо точка B збігається з однією з точок A чи A_1, то ортогональне коло вироджується в точку. Дійсно, в цьому випадку площина, перпендикулярна до $A'A_1'$, дотикається до сфери, і ортогональне коло сфери вироджується в точку. Цю точку називатимемо нульовим колом, ортогональним до кіл еліптичного пучка. Точки A і A_1 — нульові кола, ортогональні до всіх кіл і прямої еліптичного пучка A_1 (коротше, ортогональні до пучка AA_1).

Теорема 3. Центри кіл, ортогональних до еліптичного пучка AA_1, лежать на радикальній осі AA_1, поза інтервалом (A, A_1).

Доведення. Всяке коло, ортогональне до еліптичного пучка, буде ортогональним і до прямої AA_1, тому центр кола лежатиме на цій прямій (бо пряма ортогональна до кола тоді і тільки тоді, коли вона проходить через центр кола).

Далі, неважко бачити, що два кола ортогональні тоді і тільки тоді, коли радіус одного кола, проведений до точки перетину кіл, дотикається до другого кола. Тому центри ортогональних кіл лежать одно поза одним (бо гіпотенуза O_1O_2 більше кожного з катетів r_1 і r_2) (рис. 4).

Звідси випливає, що точки інтервалу (A, A_1) не можуть бути центрами кіл, ортогональних до всіх кіл еліптичного пучка. Теорема доведена.

Теорема 4. Якщо коло (або пряма) ортогональне до двох кіл еліптичного пучка (або до прямої і кола пучка), то воно ортогональне до всіх кіл і прямої пучка.

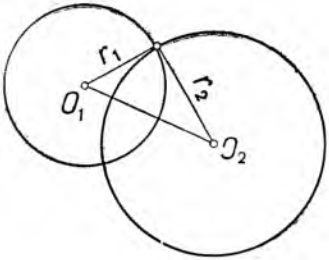


Рис. 4.

Д о в е д е н н я. Пучок AA_1 — образ множини великих кіл сфери, які проходять через діаметрально протилежні точки A' і A'_1. Тому для доведення теореми достатньо довести, що якщо коло l' сфери ортогональне до двох великих кіл, що проходять через A' і A_1', то воно ортогональне до всіх великих кіл, які проходять через A' і A_1'. Для доведення останнього достатньо довести, що площина кола l' перпендикулярна до діаметра $A'A_1'$ (рис. 5).

Нехай коло l' сфери перпендикулярне до великих кіл $A_1'B'A'$ і $A_1'C'A'$, тоді дотична B'_m до кола l' буде перпендикулярною до дотичної B'_n, до кола $A_1'B'A'$. $B'm \perp B'n$. Одночасно $B'm \perp OB'$ (O — центр сфери).

Тому дотична $B'm$ перпендикулярна до площини $A_1'\ B'A'$ і площина кола l', яка проходить через пряму $B'm$, перпендикулярна до площини $A_1'B'A'$. Аналогічно доведемо, що площина кола l' перпендикулярна також і до площини $A_1'C'A'$, а значить, і до їх прямої перетину. Теорема доведена.

З теорем 2 і 4 неважко заключити, що через кожну точку площини проходить єдине коло (або пряма), ортогональне для всіх кіл і прямої еліптичного пучка. (Інакше через точку на сфері проходили б дві площини, ортогональні до діаметра).

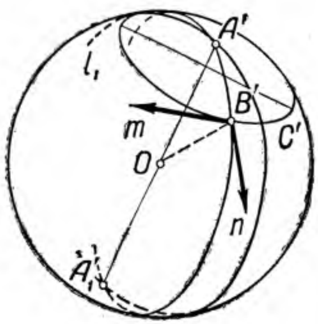


Рис. 5.

Теорема 5. Існує єдина пряма, ортогональна до всіх кіл і прямої еліптичного пучка,— це лінія центрів еліптичного пучка.

Д о в е д е н н я. Існування — очевидне. Єдиність легко випливає з розгляду відповідної картини на сфері (через точку S сфери проходить єдине коло, ортогональне до кіл, які проходять через діаметрально протилежні точки A' і A_1').

Означення. Сукупність всіх кіл (і пряма), ортогональних до всіх кіл еліптичного пучка, називається гіперболічним пучком. Пряма називається радикальною віссю гіперболічного пучка.

З попередніх теорем випливає: 1) що через кожну точку площини проходить єдине коло (або пряма) гіперболічного пучка; 2) що якщо коло l ортогональне до двох кіл еліптичного пучка, то воно належить до гіперболічного пучка; 3) що центр всякого кола гіперболічного пучка лежить на прямій AA_1 поза точками A і A_1; 4) що гіперболічний пучок містить єдину пряму — радикальну вісь пучка, яка перпендикулярна до відрізка AA_1 і ділить його пополам. Вище (див. зауваження після теореми 2) було сказано, що точки A і A_1 можна розглядати, як нульові кола, ортогональні до еліптичного пучка. Їх називають нульовими колами гіперболічного пучка. Гіперболічний пучок повністю визначається заданням точок A і A_1, бо ними визначається еліптичний пучок.

Таким чином, гіперболічний пучок визначається своїми нульовими колами.

П о б у д о в а. Через дану точку M побудувати коло гіперболічного пучка (гіперболічний пучок заданий нульовими колами A і A_1) (рис. 6). Проведемо через точку M коло еліптичного пучка (коло MAA_1). Точка перетину N дотичної MN до кола MAA_1 з прямою AA_1 буде центром шуканого кола. Дійсно, побудоване коло ортогональне до кола AA_1M і прямої AA_1 еліптичного пучка, тому воно, за теоремою 4, ортогональне до еліптичного пучка, а значить, належить до гіперболічного пучка.

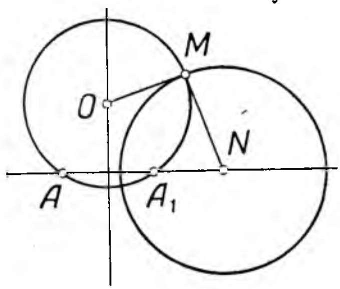


Рис. 6.

З побудови знову випливає, що через кожну точку площини проходить єдине коло (або пряма, якщо точка M лежить на радикальній осі) гіперболічного пучка.

Теорема 6. Всяка точка N прямої AA_1, яка лежить поза інтервалом (A, A_1), є центром деякого кола гіперболічного пучка.

Д о в е д е н н я. Проведемо дотичну NM до будь-якого кола еліптичного пучка AA_1. Коло (N, NM) ортогональне до кола MAA_1 і прямої AA_1 еліптичного пучка, а значить, належить до гіперболічного пучка (див. теорему 4). Теорема доведена.

З доведення теореми 4 ясно, що гіперболічний пучок — образ множини всіх кіл сфери, які лежать в паралельних площинах. Тому ніякі два кола гіперболічного пучка не перетинаються.

Теорема 7. Нехай дано гіперболічний пучок, визначений нульовими колами A і A_1. Якщо коло t ортогональне до двох кіл l і l_1 гіперболічного пучка, то воно ортогональне до всіх кіл гіперболічного пучка і належить до еліптичного пучка.

Д о в е д е н н я. Прообразом гіперболічного пучка є множина всіх кіл сфери, площини яких перпендикулярні до діаметра $A'A_1'$. Тому теорема буде доведена, якщо доведемо таке твердження: якщо коло t' сфери ортогональне до двох кіл l' і l_1', які лежать в паралельних площинах, то t' — великий круг, який проходить через кінці діаметра кулі, перпендикулярного до площин кіл l' і l_1' (рис. 7). Нехай коло t' ортогональне до кіл l' і l_1', B' і C' їх точки перетину, причому будемо вважати, що дуга $B'C'$ лежить між площинами кіл l' і l'_1. Тоді дотичні до кола t', проведені в точках B' і C', перетнуться в деякій точці K, яка лежить поза сферою між площинами кіл l' і l'_1. За умовою кола t' і l' ортогональні, тому їх дотичні в точці B' перпендикулярні. $B'm \perp B'K$. Очевидно, що $B'm \perp O_1B'$, і $B'm \perp OB'$, де O_1 центр кола l', а O центр сфери, звідси ясно, що $B'm$ перпендикулярно до площини $OB'O_1$. Але $B'm \perp B'K$, тому $B'K$ лежить в площині O_1OB'. Аналогічно доведемо, що $C'K$ лежить в площині OO_2C'. Площини O_1OB' і O_2OC' мають спільну пряму O_1O_2 (адже площини кіл l'_1 і l' паралельні) і точку K, яка лежить поза нею. Тому площини O_1OB' і O_2OC' зливаються. Точки C', K, B' (а значить, і коло t'), O_2, O, O_1 лежать в одній площині. Коло t' проходить через кінці діаметра, який проходить через точки O_1 і O_2. Теорема доведена.

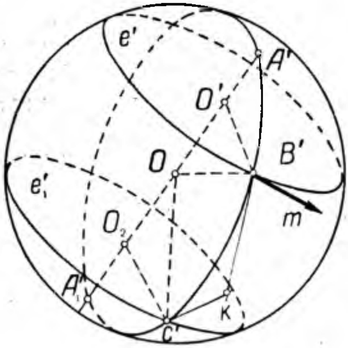


Рис. 7.

З теорем ясно, що сукупність кіл (і пряма), ортогональних до гіперболічного пучка, є еліптичний пучок, і, навпаки, множина кіл (і пряма), ортогональних до еліптичного, є гіперболічний пучок. При чому очевидно, що радикальна вісь еліптичного пучка

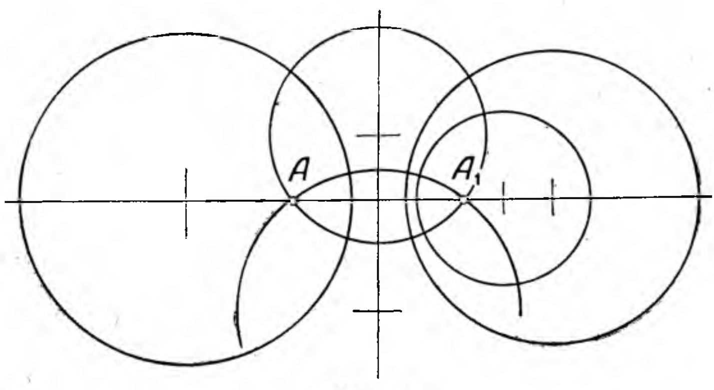


Рис. 8.

є лінією центрів кіл гіперболічного, а радикальна вісь гіперболічного пучка є лінією центрів еліптичного пучка (рис. 8).

Нехай дано два кола O_1 і O_2, які не перетинаються і не концентричні. Виконаємо таку допоміжну побудову (рис. 9). Проведемо до обох кіл довільні рівні дотичні $M_1N_1 = M_2N_2 > O_1O_2$. З центрами в точках O_1 і O_2 проведемо радіусами O_1N_1 і O_2N_2 дуги кіл, які перетнуться (чому?) в точці C. Дотичні з точки C до обох кіл рівні відрізку $M_1N_1 = M_2N_2$. Тому коло (C, r), де $r = M_1N_1 = M_2N_2$ буде ортогональним до обох кіл. Можна довести, що коло (C, r) перетне пряму O_1O_2, тому воно разом з прямою O_1O_2 визначає еліптичний пучок, ортогональний до обох кіл. Еліптичний же пучок визначає ортогональний гіперболічний, до якого належать кола O_1 і O_2. Таким чином, всякі два неконцентричні кола, що не перетинаються, визначають деякий гіперболічний пучок, до якого вони належать. Звідси, зокрема, випливає, що всякі два кола, що не перетинаються, можна розглядати як проекції кіл сфери, що лежать в паралельних площинах.

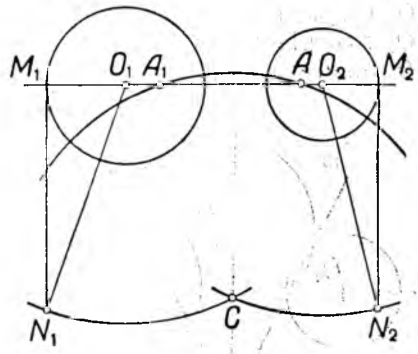


Рис. 9.

Означення. Сукупність всіх кіл, які дотикаються до прямої l в точці A на ній, називається параболічним пучком. Пряма l називається радикальною віссю пучка.

Очевидно, що через кожну точку площини, що не лежить на прямій l, проходить єдине коло параболічного пучка. Точки прямої l є центрами кіл, ортогональних до параболічного пучка.

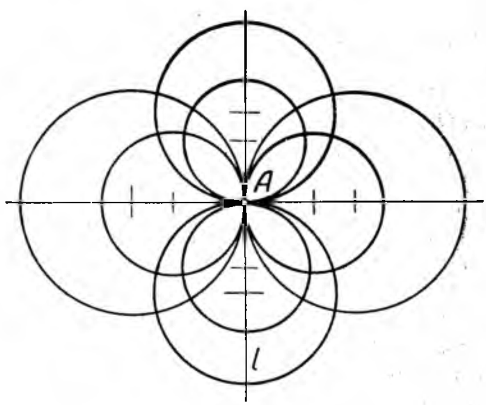


Рис. 10.

Множина кіл, ортогональних до параболічного пучка, утворює знову параболічний пучок (рис. 10).

Приведемо ще формулювання теореми, яка легко випливає з попереднього.

Теорема 8. Геометричним місцем точок, дотичні з яких до кіл пучка (еліптичного, гіперболічного, параболічного) рівні між собою, є частина радикальної осі, яка лежить поза колами пучка.

П о б у д о в а. Побудувати радикальну вісь l_{12} пучка, заданого двома неконцентричними колами O_1 і O_2.

Якщо кола перетинаються або дотикаються, задача розв'язується безпосередньо. Нехай кола не перетинаються. Проведемо допоміжне коло O_3 (рис. 11), центр якого не лежить на прямій O_1O_2 і яке б перетинало обидва кола. Радикальні осі кіл O_1 і O_3, O_2 і O_3 перетинаються в точці P, дотичні з якої до кіл O_1 і O_3, O_2 і O_3 рівні між собою. Тому що дотичні з точки P до кіл O_1 і O_2 рівні, точка P лежить на радикальній осі l_{12} кіл O_1 і O_2. Залишилось тепер опустити перпендикуляр з точки P на пряму O_1O_2.

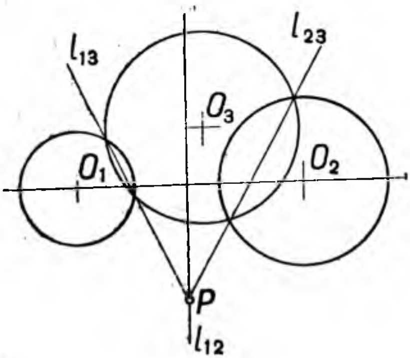


Рис. 11.

§ 5. Зв'язки кіл

Теорема. Нехай дано кола O_1, O_2, O_3, центри яких не лежать на одній прямій. Радикальні осі l_{12}, l_{13}, l_{23} перетинаються в одній точці (l_{ik} — радикальна вісь пучка, визначеного колами O_i і O_k).

Д о в е д е н н я. Нехай l_{12} і l_{13} перетинаються в точці P. Розглянемо 3 випадки.

1. Т о ч к а P л е ж и т ь п о з а к о л а м и. Тоді дотичні з точки P до кіл O_1, O_2, O_3 рівні між собою, тому точка P лежить на l_{23} (див. § 4, теорема 8).

2. Т о ч к а P л е ж и т ь н а о д н о м у з к і л, наприклад, на колі O_1. Тоді O_1 і O_2, O_1 і O_3 визначають або еліптичні, або параболічні пучки і кола O_2 і O_3 проходять через точку P. Тоді ясно, що l_{23} проходить через точку P.

3. Т о ч к а P л е ж и т ь в с е р е д и н і о д н о г о з к і л, наприклад, O_1. Тоді ясно, що кола O_1 і O_2, O_1 і O_3 визначають еліптичні пучки. Тому точка P лежить всередині всіх кіл. Нехай коло (P, r) — базисне коло еліптичної зв'язки, до якої належить пучок, визначений колами O_1 і O_2 (див. § 4, теорема 1). Тоді пряма l_{13} теж належить зв'язці, а тому зв'язці належить пучок, визначений колом O_1 і прямою l_{13}, тому зв'язці належить також коло O_3. Разом з колами O_2 і O_3 до зв'язки належить і пучок, визначений ними, а значить, і пряма l_{23}, тому вона проходить і через центр зв'язки — точку P. Теорема доведена.

Означення Точка P називається радикальним центром трьох кіл. Сукупність всіх кіл, які мають один і той же самий радикальний центр, називається зв'язкою кіл (тобто одна і та сама точка є радикальним центром будь-яких трьох кіл зв'язки). До зв'язки будемо відносити і прямі, які проходять через радикальний центр.

Якщо радикальний центр лежить всередині кіл зв'язки, то існує коло, яке всі кола зв'язки перетинають діаметрально (див. випадок з попередньої теореми), тобто в цьому випадку зв'язка називається еліптичною. Еліптичну зв'язку ми вивчили в § 3. Якщо радикальний центр лежить на всіх колах зв'язки, зв'язка називається параболічною. Іншими словами, параболічна зв'язка — це сукупність всіх кіл і прямих, які проходять через точку P,— радикальний центр зв'язки.

Якщо радикальний центр P лежить поза колами зв'язки, зв'язка називається гіперболічною. Тоді дотичні, опущені з точки P до всіх кіл зв'язки, рівні одному і тому ж самому відрізку r. Коло (P, r) буде ортогональним до всіх кіл і прямих зв'язки. Навпаки, всяке коло (або пряма), ортогональне до кола (P, r), належить зв'язці. Гіперболічну зв'язку можна, таким чином, визначити як множину всіх кіл і прямих, ортогональних до деякого кола (P, r). Коло (P, r) називається базисним колом гіперболічної зв'язки.

В роботі доведені основні теореми геометрії кіл без використання поняття степеня точки відносно кола. Нехай читач порівняє приведені доведення з іншими [3], [4]. Автор вважає, що використання деяких з приведених в роботі доведень більш збагатить в ідейному відношенні курс елементарної математики педінституту.

В роботі не вміщені задачі. Їх можна знайти в книгах [3], [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. Л. И. Волковыский, Стереографическая проекция. Вопросы элементарной и высшей математики, вып. I, Харьков, 1952.
2. Б. В. Кутузов, Геометрія, Київ, «Радянська школа», 1952.
3. Н. Ф. Четверухин, Методы геометрических построений, Учпедгиз, Москва, 1938.
4. Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I, Учпедгиз, 1948.

К. О. ЧАЙКІВСЬКА

ДО ПИТАННЯ ПРО ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ НАПРУГИ В VII КЛАСІ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

Формування понять є довгий і складний процес, що має властиві йому психологічні закономірності. Він проходить ряд етапів: *утворення первісного недосконалого* поняття на базі відчуттів, сприймань і уявлень; *конкретизація* понять при вивченні окремих сторін і властивостей явища чи предмета, відбитого в понятті, на базі дальшого поширення чуттєвого досвіду учня; одночасно з конкретизацією відбувається *поглиблення* змісту поняття та його уточнення на базі активної мислительної роботи учня. Завершальним моментом в процесі формування поняття є включення його в систему інших понять, що відбувається шляхом розкриття зв'язків між взаємозв'язаними поняттями. Систематизація понять є одним з важливіших моментів, бо освітня мета викладання основ наук у школі полягає не в нагромадженні окремих, розрізнених фактів, а в створенні цілісної, хай і обмеженої, картини розвитку матеріального світу, що знаходить свій відбиток в системі наукових понять.

В курсі електрики VII класу ми маємо справу також з певною, хай і обмеженою, системою понять (електрика, заряд, струм, магнітне поле і т. д.), а також поняттями особливого роду — з фізичними величинами (кількість електрики, сила струму, напруга, опір і т. д.). Ясно, що всі ці поняття вивчаються в системі, і процес формування не можна розглядати цілком відокремлено для кожного з них. Проте ми поставили своїм завданням в цій роботі розглянути деякі питання формування поняття напруги, як одного з важливіших питань курсу електрики і яке досить важко опановується учнями.

При дослідженні процесу засвоєння поняття напруги учнями (шляхом проведення спеціальної контрольної роботи, індивідуальних бесід з учнями і спостережень на уроках) виявлено різні відхилення від правильного оволодіння поняттям:

1) звуження поняття, коли учень вводить зайву обмежуючу ознаку. Наприклад: «Напруга показує, яка кількість енергії виділяється за 1 сек. при проходженні 1 кулона електрики». Обмежуюча ознака — 1 сек. по суті перекручує зміст поняття;

2) розширення поняття, коли учень виключає одну з важливих ознак поняття. Наприклад: «Напруга показує, яка кількість енергії виділяється при проходженні електрики по провіднику» — випущена вказівка на те, що ця енергія мусить бути віднесена до одиниці кількості електрики. Це знов-таки перекручує поняття напруги. Бувають випадки, коли учень знає означення напруги, але не може відповісти на просте практичне питання, інколи, навпаки, учень може добре розраховувати напругу (наприклад, по формулі $\frac{A}{q}$), але не може пояснити, чому потрібно ділити і що таке напруга.

Ці кілька прикладів показують, які помилки можуть траплятись при засвоєнні поняття напруги і, отже, чого треба уникати вчителю.

Ми не можемо зупинятись тут на науковому обгрунтуванні поняття напруги (див. курс фізики Фріша і Тіморєвої або курс «Основи теорії електрики» Тамма). Вкажемо тільки, яким мусив би бути науково-обгрунтований шлях формування поняття про напругу. Треба: 1) з'ясувати роботу сил електричного поля; 2) довести рівність нулю роботи цих сил по замкнутому контуру; 3) ввести звідси поняття про потенціал і різницю потенціалів; 4) з'ясувати умови переміщення зарядів по провіднику; 5) обгрунтувати необхідність наявності «сторонніх сил» для підтримання стаціонарного поля (а отже, і струму) в провіднику; 6) ввести поняття напруги, як сумарної роботи обох полів (стороннього і кулонівського), виконуваної при переміщенні одиничного додатного заряду. В простішому випадку, коли сторонні сили локалізовані в джерелі струму, а в зовнішньому колі нема ніяких е. р. с., напругу можна ототожнювати з різницею потенціалів на відповідній дільниці кола.

Ясно, що в VII класі ми не можемо дотримуватись цього порядку введення поняття напруги. Щоб виклад був хоч до деякої міри науково-обгрунтованим, ми мусимо висвітлити в VII класі принаймні такі положення. Напругу потрібно зв'язувати з роботою струму (або електричною енергією). Далі, потрібно, хоч до деякої міри, з'ясувати значення напруги як умови існування струму; нарешті, дати хоч мінімальне уявлення про роль джерела струму.

Історія розвитку методики фізики показує нам велику кількість спроб по-різному розв'язувати питання про формування поняття напруги. В основному вони зводяться до такого.

1. Застосування методу аналогій. Вживаються аналогії: термодинамічна (різниця температур порівнюється з напругою), аеродинамічна (різниця потенціалів — напруга порівнюється з різницею тиску газу) і гідродинамічна. Остання вживається найчастіше і має два варіанти. Один з них, як і в двох попередніх випадках, розглядає умови перетікання рідини і встановлює, що такою умовою є наявність напору. Звідси аналогія — для існування руху електрики потрібен електричний «напір» — напруга. Другий ва-

ріант виходить з підрахунку енергії водяного потоку: остання залежить від роботи, що її виконує кожен кілограм протікаючої води, і від кількості кілограмів води, що протекли [4].

Недостатність такого шляху використання аналогій полягає, по-перше, в тому, що ми проводимо аналогії між якісно відмінними явищами; по-друге, аналогія безсила утворювати нові поняття, її доцільно використовувати пізніше, після введення поняття, для кращого закріплення його; по-третє, в початковому курсі фізики в нашій школі не вивчаються питання руху рідини (газу тощо), не з'ясовуються умови їх руху, не дається поняття про напір, не обчислюється робота водяного потоку. Тому, коли ми починаємо розглядати закономірності водяного потоку, щоб потім перейти до поняття про напругу, то ми фактично одне невідоме визначаємо через друге невідоме.

Другий шлях введення поняття про напругу, що зустрічався раніше в підручниках, полягає в тому, що в електростатиці розглядається поняття потенціалу (степінь електризації, або характеристика електричного стану тіла). Напруга ж розглядається як різниця потенціалів, як умова існування струму.

Третій шлях — енергетичне введення цього поняття (2-ге вид. «Методики» Соколова [3], стабільний підручник для VII класу [1]). Треба відмітити, що хоч стабільний підручник правильно підходить до питання про напругу (з енергетичного боку) і дає потрібний матеріал (напруга — умова існування струму в колі, напруга існує на затискачах джерела струму, а при проходженні струму і на всіх дільницях кола), але в цілому питання розв'язано не цілком задовільно, бо всі положення подані як догматичні твердження, не мотивовані ні експериментально, ні логічно.

Тому ми і пропонуємо наш варіант викладання питання про напругу, поєднавши як третій, так і другий шлях введення цього поняття і наситивши його експериментом.

Ми виходимо з таких положень:

1. Термін «напруга» потрібно ввести як можна раніше і не спираючись на механічні уявлення, бо це характерна електрична величина. Раннє введення цього терміну приведе до того, що учні, оперуючи ним в різних зв'язках, краще і всебічніше ознайомляться із змістом поняття і протягом довшого часу матимуть можливість закріплювати його.

Поняття, означене цим терміном, на цьому етапі буде ще занадто вузьким, неповним і неточним.

2. Дальше ознайомлення з поняттям напруги — конкретизація поняття, поглиблення його — відбувається шляхом вивчення нових фактів, а саме: шляхом ознайомлення учнів з такими важливими ознаками напруги, як те, що вона виникає на клемах джерела струму і зумовлює струм в колі.

3. Розкриття найістотнішої ознаки напруги як енергетичної характеристики явищ, що відбуваються в електричному колі. Це дає можливість підійти до означення напруги.

4. Зміцнення і уточнення поняття напруги шляхом всебічного оперування цим поняттям, шляхом розкриття дальших властивостей напруги, її зв'язків з іншими фізичними величинами.

Для здійснення цих завдань ми застосували таку методику вивчення поняття напруги.

Перше знайомство з напругою ми проводимо в темі «Початкові відомості з електрики».

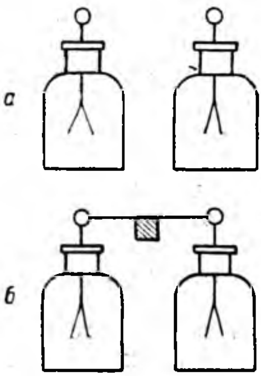


Рис. 1.

Вивчаючи електроскоп, ми звертаємо увагу на те, що різний розхил його листочків дає нам можливість судити про те «багато» чи «мало» наелектризований електроскоп, про міру його електризації, або про його «електричний стан». Коли два однакові електроскопи мають однаковий розхил листочків, вони знаходяться в однаковому електричному стані. Коли розхил листочків у них не однаковий, то вони знаходяться в різних електричних станах. Це — основні положення, що будуть основою дальшого експериментального дослідження явищ. Поняття «електричний стан» звичайно досить розпливчате і по суті мало що означає, але коли ми, вивчаючи температуру, говоримо про «тепловий стан тіла», то з таким же правом можна говорити і про «електричний стан».

На наступному уроці вивчаємо провідники і ізолятори. Ми підкреслюємо, що про перехід електрики по одних тілах судимо з факту зміни електричного стану обох електроскопів, з'єднаних цим тілом (рис. 1, *а* і *б*). Про відсутність переходу електрики по інших тілах судимо з факту незмінності електричного стану обох електроскопів (рис. 2*а* і 2*б*).

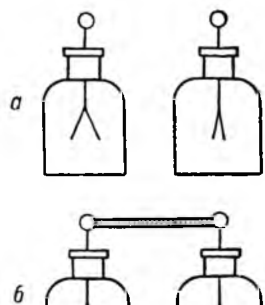


Рис. 2.

В кінці уроку, після визначення провідників і ізоляторів, наведення прикладів їх, повертаємось знов до основного досліду (рис. 1). Підкреслюємо одержаний раніше висновок і ставимо нові питання: Провідник це тіло, по якому електричні заряди *можуть* передаватись, переходити, рухатись. Але чи *завжди* заряди будуть рухатись, переходити по провіднику від одного електроскопа до другого? Чи *досить* для переходу зарядів того, щоб вибране тіло, яке сполучає електроскопи, було провідником?

Постановка питання зацікавлює учнів, і вони висловлюють різні припущення. Погоджуємось, що для перевірки, яке з цих припущень вірне, треба зробити ще дослід.

Повторюємо основний дослід (рис. 1), залишаючи другий електроскоп: а) зовсім не наелектризованим, б) електризуємо другий електроскоп до меншого розхилу листочків, в) електризуємо обидва електроскопи до однакового розхилу листочків однойменною і г) різнойменною електрикою і сполучаємо їх після електризації провідником на ізоляційній ручці. По ходу дослідів ставимо до учнів ряд питань, щоб вони глибше могли проаналізувати спостережувані явища і могли зробити вірне узагальнення з дослідів, яке буде відповіддю на поставлені запитання.

Ці додаткові питання можуть бути такі:

1. Чому листочки другого (не наелектризованого спочатку) електроскопа розійшлись? (Перейшла електрика з першого).

2. Коли припиняється розходження листочків електроскопа? (Коли однаковий розхил у обох).

3. Чи помітили ми під час хоч одного з дослідів, щоб електрика повністю перейшла з першого електроскопа на другий, тобто, щоб на першому зовсім не було розхилу листочків, а на другому був повний розхил? (Ні).

4. Чи однаковий електричний стан електроскопів до сполучення їх провідником? З чого ми про це судимо?

5. Чи однаковий електричний стан електроскопів після сполучення їх провідником? З чого про це судимо?

6. До якого моменту триває перехід електрики по провіднику? І т. д.

Після цього уже вимагаємо відповіді на поставлене запитання: «Чи завжди електрика переходить по провіднику від одного тіла до другого тіла? Коли переходить? Які умови переходу потрібні?»

Загальний висновок, що включає перше абстрагування: Коли провідник з'єднує два тіла, що знаходяться в різних електричних станах, то електрика переходить з одного тіла на друге, переміщується по провіднику. Отже, умовою переходу, переміщення електричних зарядів по провіднику є відмінність електричних станів між його кінцями. Замість того, щоб говорити: між цими тілами є відмінність в електричних станах, в електротехніці кажуть: між цими тілами є напруга. Умова переміщення зарядів по провіднику — напруга.

Ці загальні висновки записуємо.

Термін «напруга» введений. Поки що він не має означення (у нас пояснення терміну, а не означення). Поки що він не значить нічого іншого, крім короткої назви факту, що спрямований перехід електрики по провіднику здійснюється не сам собою, а при певних умовах. Цю умову ми називаємо або напругою, або відмінністю електричних станів. Перша назва зручніша, як коротша.

При умові, що буде вивчатися явище електризації через вплив, треба і тут закріпити набуті знання. З'ясувавши, що на кінцях провідника є заряди різних знаків (в присутності впливаючого тіла), робимо висновок про наявність на його кінцях відмінності електричних станів, тобто напруги. Ставимо питання, що ж буде, коли забрати впливаюче тіло? Взаємодії зарядів на провіднику з зарядами впливаючого тіла тепер не буде, а на провіднику є напруга. Висновок: Заряди мусять переміщуватись, а через те, що вони різнойменні, то наступить нейтралізація. Цей висновок мусять зробити самі учні, синтезуючи набуті раніше знання. Підтверджуємо його експериментом (рис. 3).

Як підсумок вивченого матеріалу робимо порівняння явищ електризації через тертя і через вплив. З'ясовуємо, що спільне для обох видів електризації (одночасна поява електричних зарядів обох знаків, розподіл різнойменних зарядів на двох тілах або на кінцях одного тіла і в зв'язку з цим виникнення напруги; потреба витрачати певну кількість енергії на відокремлення зарядів, яка перетворюється в електричну енергію, зв'язану з виниклими електричними зарядами).

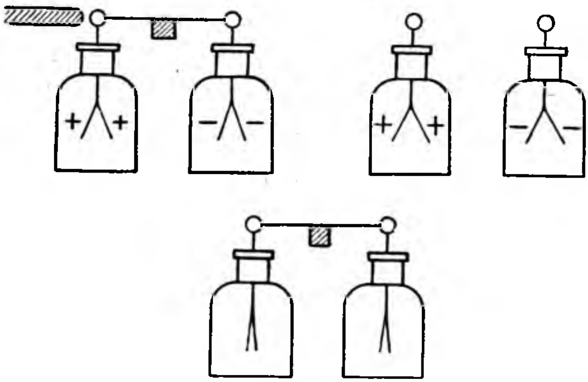


Рис. 3.

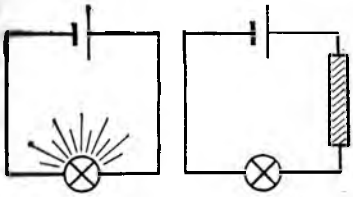
Вивчаючи іскру та її властивості (щоб пояснити електричну природу блискавки), ми знов повертаємось до того, що кульки машини знаходяться у відмінних електричних станах, що і буде умовою розряду, руху зарядів через повітряний проміжок. Для підтвердження цього треба показати дослід, що кульки електростатичної машини мають різнойменний заряд (по притяганню султанів або дослідженням невідомого заряду за допомогою електроскопа).

Вивчення іскри, як це зроблено в підручнику, може служити переходом до означення струму, як спрямованого руху електричних зарядів. Тут на самому початку потрібно з'ясувати основну властивість рухомих зарядів — струму, що докорінно відрізняє їх від статичних зарядів — перетворення електричної енергії в інші види енергії. В зв'язку з цим на першому ж уроці ми розглядаємо і дії струму, вони нам дають метод дослідження наявності струму в провіднику.

З'ясувавши відміну між короткочасним розрядом від електростатичної машини і тривалим (стаціонарним) струмом, який учні спостерігають в побуті, ми знов повертаємось до вже відомого: з'ясовуємо умови виникнення і існування струму в провіднику.

Показуємо будь-яке коло і встановлюємо, що в колі є струм, коли коло «замкнуте», тобто складається з провідників. Індикатором служать дії струму (наприклад, теплові — горіння лампочки). Вмикання ізолятора в коло робить неможливим переміщення зарядів не тільки в цій частині, але і у всьому колі: індикатор струму в колі не виявляє (рис. 4).

Повторюємо, що учні знають вже про провідники. Чи завжди в провіднику можуть переміщуватись заряди? Що потрібно для



а *б*

Рис. 4.

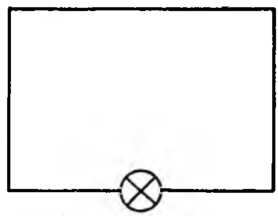


Рис. 5.

цього? Учні дадуть відповідь, що провідник мусить з'єднувати тіла, між якими є напруга (відмінність електричних станів). Отже, мати замкнене коло ще не досить, щоб існував струм.

Складаємо для підтвердження цього коло без джерела струму (рис. 5). Учні констатують, що струму нема, бо, очевидно, нема напруги. Порівнюючи обидва кола (рис. 4*а* і 5), вони відразу вказують на відсутність джерела струму в другому колі. Співставляючи попереднє твердження, що струму в колі нема, бо нема напруги, і друге твердження, що струму нема, бо нема батареї, учні роблять умовивід: Напругу в колі створює батарея. Ставимо питання: Яка ж роль батареї? (Вона є місце, де утворюється напруга, остання ж викликає рух електричних зарядів в колі — струм).

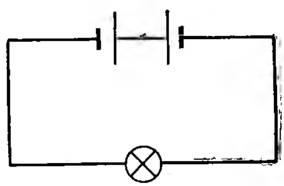


Рис. 6.

На затискачах батареї є напруга, це значить, що кінці батареї знаходяться в різних електричних станах. Щоб підсилити цей висновок, ми показуємо такий дослід. Складаємо коло так, щоб кінці провідників від клем лампочки були приєднані до однакових полюсів батареї (рис. 6). Ясно, що струму в такому, хоч і замкненому колі не буде. Ці «кінці» батареї мають однаковий електричний стан. Відмічаємо їх для видимості якимсь укажчиком (наприклад, клаптиком червоного паперу). Приєднання лампочки до двох інших кінців також не дає струму, хоч коло продовжує бути замкнуте. Ці «кінці» також мають однаковий електричний стан, їх також позначаємо якимсь укажчиком (рис. 7). Нарешті, вмикання лампочки між двома різно позначеними «кінцями» батареї приводить до появи струму в колі.

Висновок: «Кінці» батареї знаходяться в різному електричному стані, на них є напруга. Їх треба якось позначити і при вмиканні кількох батарей треба стежити, щоб кінці провідників від лампочки були приєднані до різно позначених «кінців» батареї. Вводимо термінологію: джерело струму (пояснюємо, що це назва переносна — безпосередньо батарея утворює напругу), полюси джерела струму і позначення їх + і — (умовно, бо позначати різними клаптиками паперу незручно).

Таким чином, ми логічно приходимо до потреби глибшого розгляду джерел струму — гальванічних елементів. Цьому присвячується другий урок 2-ї теми.

Оскільки програма пропонує гальванічні елементи розглядати без вивчення їх будови, то можна було б вдовольнитись вище ви-

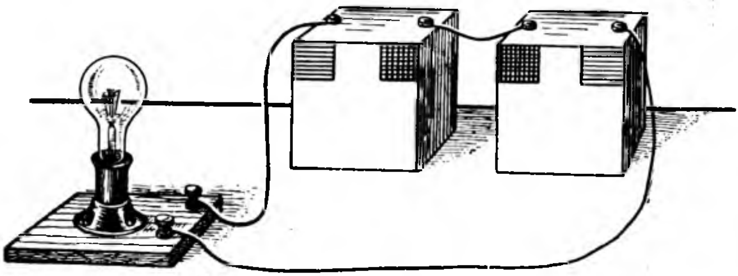


Рис. 7.

кладеним, зупинившись на виясненні ролі джерел струму як джерела напруги. Проте ми вважаємо, що можна дати учням елементарне уявлення про процеси, що в них відбуваються.

З попередніх дослідів учні вже знають, що полюси джерела струму знаходяться в різному електричному стані. Отже, вони або наелектризовані до різної міри, або до однакової міри, але різнойменним зарядом. Повідомляємо, що будемо приймати друге припущення. Пригадуємо, в чому полягає суть електризації: у відокремленні і розподілі на двох тілах електричних зарядів різних знаків, зарядів, які існують в кожному тілі. Повторюємо коротко про електризацію тертям і через вплив. Далі розказуємо, що в гальванічних елементах ми маємо справу з новим видом електризації — з «хімічною» електризацією, що відбувається в результаті хімічної реакції. В результаті розчинення цинку в кислоті цинковий електрод електризується негативно, а мідний — позитивно (це, звичайно, дуже примітивне пояснення, але кращого на цьому етапі ми дати не можемо). Ця електризація і породжує напругу.

Коли гальванічний елемент увімкнений в коло, то виділяється тепло, електрична енергія перетворюється в теплову. Де ж взялася електрична енергія? При відокремленні зарядів в гальванічному елементі, очевидно, витрачалась якась енергія, яка і перетворилась в енергію розподілених електричних зарядів. Оскільки відокремлення електричних зарядів відбулося внаслідок хімічної реакції, то можна сказати, що хімічна енергія перетворилась в енергію електричну. Даємо означення джерела струму взагалі (прилад, де різні види енергії перетворюються в електричну енергію) і хімічного джерела струму зокрема.

Таким чином, ми маємо два ще поки не зв'язані поняття — напруга джерела струму і енергія, вироблена джерелом струму. Проте деякий зв'язок намічається вже тут: ми підкреслюємо, що джерело струму це прилад, де виникає напруга, і одночасно це прилад, де утворюється електрична енергія за рахунок якогось іншого її виду.

Вказуємо, що різні гальванічні елементи і акумулятори відрізняються по величині напруги. Вважаємо, що вже тут можна дати і одиницю напруги — вольт — як величину напруги, яка приблизно відповідає напрузі на полюсах елемента Вольта.

До кінця вивчення другої теми повторюємо встановлені висновки, щоб краще закріпити їх.

Під час лабораторної роботи «Складання електричних кіл», в міру потреби, звертаємо увагу учнів, що струм в складеному учнем колі відсутній; якщо коло десь розімкнене, учні шукають причину розмикання кола, усувають її і пояснюють, чому при даному конкретному пошкодженні струму не було.

В процесі виконання роботи перед учнями можна поставити ще одне завдання. Лампочку приєднують до одного сухого елемента (акумулятора), а потім до двох-трьох. Спостерігають, що в першому випадку нитка лампи і не розжарювалась або дуже слабо розжарювалась, при 2—3 елементах розжарювалась більше. В результаті підсумкової бесіди учні аналізують це явище і приходять до висновку: В першому випадку мало електричної енергії перетворювалось в теплову, очевидно, тому, що один елемент мало виробляє електричної енергії, а два елементи, сполучені разом, дають її значно більше, тому більше може перетворюватись в теплову. З цього спостереження учні можуть, хоч і не цілком строго, відчути адитивність енергії, про адитивність напруги поки що ми твердимо догматично (два елементи сполучені послідовно дають більшу напругу, ніж один елемент, окремо взятий). В дальшому ми підтвердимо це положення безпосереднім вимірюванням.

В третій темі («Сила струму, опір і напруга») ми вже глибше розкриваємо поняття напруги і даємо її означення. Порядок вивчення програмних питань ми прийняли трохи відмінним від програмного. Ми поставили вивчення напруги після вивчення сили струму, електричної енергії і до вивчення опору. Поняття опору ми вводимо в зв'язку з вивченням закону Ома, який розглядаємо після напруги. Питання про опір ми маємо на меті висвітлити в іншому місці.

Як уже показано, учні одержали перше поняття про напругу. Тепер потрібно розкрити енергетичний зміст напруги. Починаємо з досліду. Складаємо коло за схемою рис. 8. Струм в колі добираємо такий, що спіраль R сильно нагрівається, але не розжарюється. Паперові укажчики, прикріплені до неї, димлять. Міняючи силу струму, показуємо розжарення спіралі: кількість виділюваної теплової енергії при проходженні струму збільшується з збільшенням сили струму. Теплова енергія утворюється в провіднику за рахунок електричної енергії. Отже, про величину електричної енергії можна дізнатись по кількості виділеного тепла. Чим більше теплової енергії виділяється, тим, за законом збереження енергії, більше електричної енергії витрачається на цій дільниці кола. Кількість виділеного тепла залежить від сили струму, зростаючи із збільшенням її, отже, і величина електричної енергії залежить від сили струму. Вона більша, коли більша сила струму.

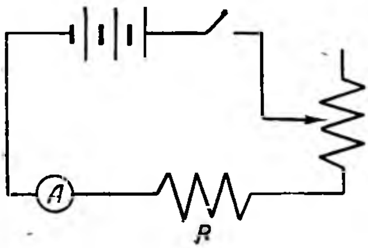


Рис. 8.

Занурюючи розжарену спіраль в калориметр з водою на коротший час (наприклад, 1 хв.) і на довший час (3—5 хв.), показуємо учням, що в другому випадку термометр фіксує значно вищу температуру, тобто в другому випадку виділилось значно більше тепла. Аналогічно міркуючи, як вище зазначено, приходимо до висновку, що величина електричної енергії, яка на даній дільниці кола перетворюється в теплову, залежить від часу пропускання струму через провідник. Вона зростає при збільшенні часу. Пригадуючи, що $q = It$, приходимо до висновку, що величина електричної енергії, яка на даній дільниці кола перетворюється в теплоту, залежить від кількості електрики, що пройшла через поперечний переріз провідника за весь час досліду. Логічно цей висновок цілком зрозумілий. Електрична енергія зв'язана з електричними зарядами, більша кількість електрики пройшла через переріз провідника — більше електричних зарядів пройшло, більша кількість електричної енергії виділилась.

Далі складаємо коло за схемою рис. 9, що має кілька ланок з різними опорами (ми брали п'ятидесятисантиметрові відрізки нікелінового дроту, тонкого залізного і мідного дроту). Учні спостерігають розжарення першого провідника (нікелін), дим з паперових укажчиків, але відсутність розжарення другого провідника (залізо) і відсутність диму з паперових індикаторів на третьому провіднику (мідь). Роблять висновок, що кількість тепла на різних дільницях кола різна, очевидно величина електричної енергії, що перетворюється в цих дільницях кола в теплову, також різна. Встановлюємо, що провідники сполучені послідовно, і значить, кількість електрики, що проходить через поперечний переріз кожного з них однакова (однакові I і t, отже, однаковий і добуток $q = It$).

Очевидно, кількість електричної енергії, що перетворюється на різних дільницях кола, залежить не тільки від кількості електрики, бо вона однакова для всіх трьох дільниць, але ще від якихось обставин. Щоб дослідити в чому тут справа, робимо інший ряд дослідів.

Для другого дослідження використовуємо електромотор. Вмикаємо його на 2 банки акумуляторів. Встановлюємо, що граничне навантаження, яке міг піднімати мотор з малою швидкістю, складає певну кількість грамів (в нашому випадку 100 $Г$). За висотою піднятти вантажу і його вагою можна оцінити виконану механічну роботу. Далі вмикаємо мотор на 4—6 банок акумуляторів. Граничне навантаження, що з малою швидкістю піднімає мотор, більше (в нашому випадку 350 $Г$). Механічна робота в другому випадку більша.

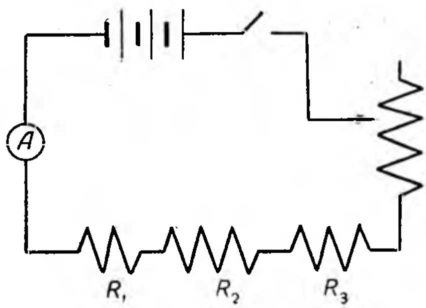


Рис. 9.

В першій, вступній годині до курсу електрики ми розбирали питання про електричну енергію, її властивість перетворюватись в інші види енергії, про одиниці електричної енергії. Тому тут цілком правомірно поставити питання: В якому випадку вантаж має більшу механічну енергію? (Очевидно, що в другому, бо там була виконана більша робота). За який рахунок була одержана механічна енергія? (За рахунок перетворення електричної енергії). В якому випадку було більше перетворено електричної енергії? (В другому). В чому причина того, що в другому випадку ми мали більше електричної енергії? Пригадуємо наслідки лабораторної роботи № 4: ми з'єднали більше акумуляторів. Кілька послідовно з'єднаних акумуляторів давали більше електричної енергії, ніж один, бо кожний з них виробляє певну кількість електричної енергії і кілька акумуляторів, природно, мусять дати більше енергії. Але кожний з акумуляторів має на полюсах напругу. Чим більше джерел струму послідовно з'єднуємо, тим більша буде напруга між крайніми полюсами. В другому випадку ми маємо більшу напругу, ніж в першому випадку, і більше електричної енергії перетвориться в механічну енергію. Отже, електрична енергія, що перетворюється на дільниці кола в інші види, залежить, очевидно, від напруги. Чим більша напруга, тим більша величина електричної енергії, виділюваної на даній дільниці в різних інших видах. Підходимо до загального висновку: Величина електричної енергії залежить від напруги (зростаючи з збільшенням напруги) і від кількості електрики, що пройшла через поперечний переріз кола.

Нагадавши, що про величину енергії судимо по величині виконаної роботи, а робота в свою чергу еквівалентна певній кількості тепла, вказуємо, що можна говорити: електричний струм виконує роботу (механічну — піднімає вантаж, приводить в рух станки або викликає нагрівання провідників). Тому можна сказати, що робота електричного струму залежить від напруги і кількості електрики, що пройшла через переріз провідника. Записуємо формулу: $A = qU$ і $A = IUt$.

Повертаємось до попереднього досліду з трьома ланками послідовно сполучених провідників. На кожній дільниці кола виділяється тепло за рахунок електричної енергії. Електрична енергія зв'язана з напругою. Отже, очевидно, напруга є не тільки на полюсах джерела струму, але, коли тече струм, і на *кожній дільниці кола.* На кожній дільниці кола виділяється різна кількість тепла, отже, витрачається різна кількість електричної енергії. Оскільки $q = It$ однакова для всіх дільниць кола, а електрична енергія залежить тільки від q і U, то напрошується висновок: *Напруга на різних дільницях кола різна.* На якій дільниці досліджуваного кола напруга більша? Чому? З чого про це судимо? (З кількості перетвореної в теплоту електричної енергії).

Повторюємо дослід з аналогічним колом, але з іншим розподілом опорів, з розжаренням інших ланок. Знов з'ясовуємо (для закріплення), на якій з дільниць напруга більша. Учні мусять обгрунтувати, з яких ознак вони про це судять. Звертаємо їх увагу, що кількість електрики, що проходить через переріз кожної з цих ланок, однакова. Підсумовуємо: При проходженні певної однакової кількості електрики через різні дільниці кола на них виділяється різна кількість енергії, бо напруга на цих дільницях різна, а електрична енергія, що перетворюється в теплоту, залежить від напруги. В даному електричному колі ми можемо порівнювати напруги за порівнянням величини перетвореної в теплоту електричної енергії, бо кількість електрики (від якої також залежить виділювана енергія), що пройшла в даному колі для всіх дільниць, однакова. Вмикаємо одночасно коло № 1 і коло № 2 (рис. 10). Амперметр показує різну силу струму, отже, через переріз обох кіл за однаковий час проходить уже не однакова кількість електрики. Чи можемо ми тепер порівнювати напруги на першій, наприклад, дільниці кола № 1 і на першій дільниці кола № 2 за величиною перетвореної в цих дільницях кола енергії? (Ні, не можемо, бо невідомо чому на першій дільниці другого кола виділяється більше енергії, чи тому, що напруга більша, ніж на першій дільниці кола № 1, чи тому, що через її переріз проходить більша кількість електрики, ніж в колі № 1).

Тому порівнювати напруги на дільницях різних кіл за величиною виділеної енергії можна лише при умові проходження по них однакової кількості електрики. Умовились за таку завжди однакову кількість електрики брати одиницю кількості електрики — 1 кулон. Тоді кількість енергії, виділеної на даній дільниці кола при проходженні 1 кулона електрики, і буде показувати, яка ж у нас напруга на цій дільниці кола. Більше енергії виділятиметься при проходженні одного кулона електрики — більша напруга; менше енергії виділятиметься при проходженні одного кулона — менша напруга.

З'ясовуємо розуміння питання на числових прикладах типу: на одній дільниці кола при проходженні через її переріз 1 кулона електрики виділилось 3 джоулі енергії, а на другій дільниці — 8 джоулів. На якій дільниці напруга більша? Чому? Після цього даємо означення напруги за підручником.

Тут же проводимо закріплення і шляхом розв'язування задач (усно) типу: Через поперечний переріз даної дільниці проходить 1 кулон електрики і при цьому на ній виділяється 2 джоулі енергії, а для другої дільниці відповідно 3 кулони і 9 (12 і т. д.) джоулів.

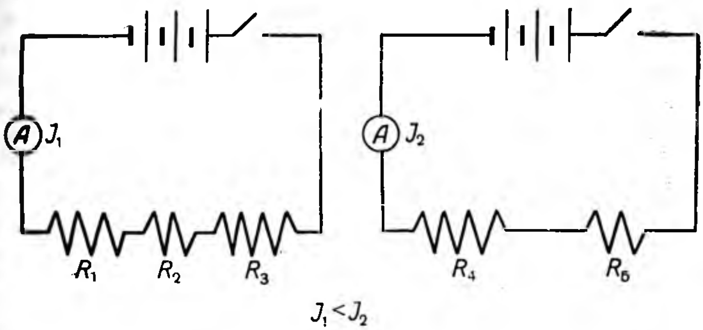


Рис. 10.

На якій з дільниць напруга більша? Чому? При цьому вимагаємо, щоб учень обгрунтував свою відповідь на підставі означення.

Далі вводимо означення вольта, приводимо приклади напруг, пояснюємо, як треба розуміти, що значить «напруга на даній дільниці кола становить стільки-то (наприклад, 220) вольтів» (при проходженні 1 кулона електрики через цю дільницю на ній виділяється 220 джоулів енергії) і т. п.

Після цього підводимо учнів до думки, що незручно вимірювати напругу за кількістю тепла, що виділяється на даній дільниці кола (треба мати: калориметр, термометр, годинник, амперметр; частина тепла буде розсіюватись; не знаємо, яке співвідношення між джоулем і калорією і т. д.), отже, потрібно мати зручний прилад. Такий прилад є, це — вольтметр. Показуємо його, пояснюємо, як вмикати вольтметр в коло.

Таким чином, ми дали спрощене означення напруги і з'ясували такі сторони напруги: напруга характеризує енергетичні процеси в колі, напруга утворюється джерелом струму, напруга є умовою проходження струму в колі, напруга існує (при проходженні струму) на кожній дільниці кола.

Поширюємо далі поняття напруги. Доводимо шляхом вимірювання твердження, що напруги при послідовному з'єднанні джерел струму додаються. Крім того, утворюємо в учнів первісні уміння користуватись вольтметром. Для цього проводимо додаткову лабораторну роботу. Завдання її: дослідити напруги на різних дільницях кола і порівняти суми напруг на всіх дільницях кола з напругою на затискачах джерела струму. Робота здійснюється за схемами (рис. 11 і рис. 12), з них ясний хід і завдання роботи.

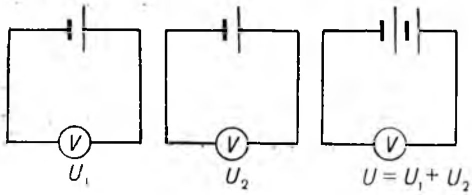


Рис. 11.

Висновок з першої частини роботи: Напруги на затискачах джерел струму при їх послідовному сполученні додаються. Висновок з другої частини роботи: Напруга є на кожній дільниці кола і сума напруг на всіх дільницях кола (послідовно сполученого) дорівнює напрузі на затискачах джерела струму. Інакше: Напруга утворюється в джерелі струму (внаслідок різнойменної електризації його електродів), але при протіканні струму, при вмиканні джерела в коло, напруга розподіляється по всіх дільницях кола.

На весь цей матеріал ми відводимо 3 години (енергія електричного струму — 1 год., напруга — 1 год., вольтметр, лабораторна

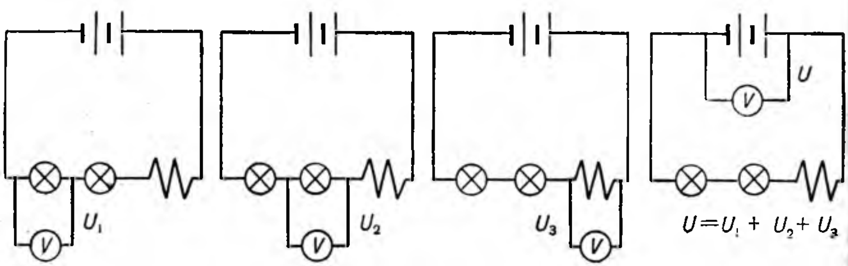


Рис. 12.

робота — 1 год.). Наступним етапом поглиблення знань про напругу є встановлення зв'язків напруги з іншими електричними величинами: потужністю електричного струму, опором, силою струму (закон Ома) і т. д.

Вдалим переходом до закону Ома в формі $U = IR$ буде з'ясування питання, чому на різних дільницях кола ми одержували різні напруги? Від чого це залежить? За браком місця ми тут не будемо розбирати питання введення закону Ома, це може бути предметом окремої статті.

В дальшому ході навчання ми повторюємо і закріплюємо поняття напруги і всі ті відомості, що учні про неї одержали. Система вправ може бути така.

1) задачі на обчислення напруги по кількості виділеної енергії і кількості електрики, що пройшла через поперечний переріз провідника (наприклад, типу задачі № 678 з задачника Золотова) [2];

2) пояснення, як розуміти, що напруга на даній дільниці кола складає n вольтів;

3) визначення напруги джерела струму по напрузі на всіх дільницях кола або навпаки (типу задачі № 684 з задачника Золотова);

4) обчислення напруги по силі струму і опору дільниці кола;

5) обчислення напруги по потужності і силі струму;

6) вмикання вольтметра в коло і вимірювання напруги (під час закріплення опитаних уроків і під час опитування на багатьох наступних уроках), викреслювання і читання схем з вольтметром.

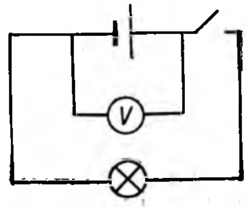


Рис. 13.

Оскільки останнім видом вправ учителі майже не користуються, то приведемо кілька прикладів;

а) складіть коло по схемі рис. 13;

б) нарисуйте схему кола, в якому послідовно увімкнені дзвоник і лампочка. Вольтметр, що є в колі, мусить вимірювати напругу на лампочці;

в) коло складене по схемі (рис. 14). Поясніть, які прилади увімкнені в коло, як увімкнені, на якій дільниці кола вимірюється напруга? і т. п.

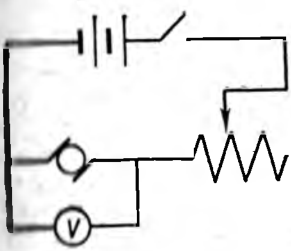


Рис. 14.

Після вивчення теми учні чітко мусять розуміти такі положення. Джерела струму є прилади, де різні види енергії перетворюються в електричну енергію. Цей процес відбувається в результаті електризації — відокремлення різнойменних зарядів, що є в усіх тілах, і зосередженні їх на двох електродах. Це приводить до того, що на полюсах з'являється напруга, тобто *кожний кулон електрики в цьому колі набуває здатності виконувати певну роботу*. При вмиканні джерела струму в коло, кожен кулон електрики, проходячи колом, виконує роботу, різну на різних дільницях кола. Кожний кулон, проходячи колом, виконує більшу роботу на тій дільниці кола, де опір більший, тобто там, де йому доводиться перемагати при своєму русі більше перешкод від зустрічей з часточками металу. Отже, і напруга більша на дільницях кола з більшим опором. Якщо напруги нема, то електричні заряди не мають здатності виконувати роботу (хоч вони і є в тілі), на мають здатності «перемагати опір», отже, вони і не прийдуть в рух. Нема напруги в провіднику — нема і струму. Такі основні підсумки теми про напругу.

До викладеного треба зробити ще деякі зауваження. По-перше, дослід з електромотором дещо натягнений. При збільшенні кількості акумуляторів в колі зростає не тільки напруга на затискачах мотора, але і сила струму. Тому доводиться не вмикати при цьому досліді амперметр в коло. Але оскільки робота мотора залежить як від сили струму, так і від *напруги*, а нам потрібно підкреслити саме *другу залежність*, то ми вважали можливим використати цей не дуже вдалий дослід, щоб, з одного боку, унаочнити розглядувані закономірності, а, з другого боку, уникнути використання аналогій, що досить трудно сприймаються учнями. Отже, ми віддали перевагу міркуванням про потребу хоч якого-небудь унаочнення перед міркуванням про точність і строгість обгрунтувань в цьому випадку.

Друге зауваження стосується означення напруги, даному в підручнику. Ми були зв'язані цим означенням, бо учні користувались підручником. Але ми вважали б за краще інше означення: «Напруга показує, яку роботу може виконувати кожний кулон електрики при проходженні його по даній дільниці кола». Так було би ближче до означення, яке пізніше учні одержать в старших класах, тобто була би збережена, до певної міри, наступність в викладанні матеріалу.

Оскільки здатність виконувати роботу ми називаємо енергією, а енергію кожний кулон електрики дістає від джерела струму, то слушно зауважує І. І. Соколов, що можна сказати і так: «Напруга на даній дільниці кола показує, яка величина енергії джерела струму витрачається на даній дільниці кола при проходженні по ній кожного кулона електрики».

Нарешті, в методиці існує думка, що прилади, які ще не вивчені, не можна використовувати для демонстрацій. Ми широко користуємось в дослідах реостатом і ЛАТР'ом і не вважаємо це за хибу. Ми називаємо прилади, дуже коротко кажемо для чого вони потрібні і вказуємо, що принцип дії їх учні вивчать пізніше. Досвід роботи показав, що такий прийом пішов на користь, учні в кінці навчання прекрасно впізнавали реостат, знали, для чого він потрібен, і вміли пояснити його дію, причому краще, ніж в тих класах, де ми реостат не використовували, або використовували з маскуванням його.

* * *

Ми показали в своїй роботі, що виклад поняття напруги в стабільному підручнику для VII класу занадто схематичний, основні положення даються без основи на експеримент.

Методи аналогій, зокрема гідродинамічної аналогії, не можуть допомогти ввести нове поняття і можуть бути вжиті як ілюстрація на дальших етапах опанування учнями цього поняття.

Виходячи з цього, ми запропонували один з можливих варіантів методичної розробки теми про напругу. Вивчення цього питання ми розподілили на кілька етапів: 1. Введення терміну в електростатиці в зв'язку з розкриттям питання про умови руху зарядів в провіднику і встановленням необхідності для цього відмінності електричних станів на кінцях провідника. 2. З'ясування питання, де (в результаті яких процесів) виникає напруга, в зв'язку з розглядом ролі джерела струму. 3. Розкриття фізичного змісту поняття напруги та її означення як енергетичної характеристики процесів, що відбуваються на дільниці кола, в зв'язку з вивченням електричної енергії (або роботи електричного струму). 4. Розкриття зв'язків, в які входить напруга, зокрема її залежність від опору дільниці кола, в зв'язку з вивченням закону Ома. 5. Загальна систематизація знань про напругу після розгляду поняття про опір і інші електричні величини, в зв'язку з повторенням розділу про електричне коло і закони струму (чвертьове і річне повторення).

Багатократне повертання до аналізу тих самих положень, але в різних нових зв'язках, дасть можливість учням як краще усвідомити, так і міцніше закріпити виучуване поняття.

ЛІТЕРАТУРА

1. О. В. Пьоришкін, Г. І. Фалєєв, В. В. Краукліс, Фізика, ч. 2, Київ, 1954.
2. В. А. Золотов, Сборник вопросов и задач пс физике для VI и VII классов, Москва, 1955.
3. І. І. Соколов, Методика викладання фізики в середній школі, Київ, 1952.
4. М. С. Білий, Методика викладання фізики в семирічній школі, Київ, 1954.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

К. О. ЧАЙКІВСЬКА

ПРО ОЗНАЧЕННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

В системі фізичних понять важливе місце займають поняття особливого роду — фізичні величини. Як і всі поняття, фізичні величини мусять бути чітко і правильно означені. Там, де нема точних означень, нема і точного знання. Це положення випливає з марксистського вчення про співвідношення між мовою і мисленням. Мова є матеріальною оболонкою мислення, останнє виникає і існує тільки на основі мовного матеріалу.

Нечіткість словесного оформлення поняття спричиняється до неправомірного використовування його, до довільного розширення або, навпаки, звужування об'єму поняття.

В процесі розвитку науки наші знання про природу розширюються і поглиблюються. Поняття поповнюються змістом. Отже, означення даного поняття, яке склалось раніше, повинно в свою чергу змінюватись, розширюватись і поглиблюватись (наприклад: деякі ньютонівські означення основних фізичних величин — сили, маси тощо). Означення, які ми даємо фізичним поняттям, в тому числі і фізичним величинам, є категорія історична; не може бути раз назавжди даного і встановленого означення, воно мусить змінюватись разом з розвитком науки.

З історії науки відомо, що використання старих, неповних і неточних означень понять дозволило деяким буржуазним вченим стати на шлях ідеалістичного тлумачення деяких нових явищ природи і породило ідеалістичну термінологію, як наприклад: «анігіляція матерії», «перетворення маси (і навіть матерії) в енергію» і ін. Матеріалістичне науково-правильне розкриття явищ природи вимагає не тільки науково-точної термінології, але також і більш чіткого означення маси, енергії та інших величин, яке відповідало б сучасному рівню наших знань про ці величини.

Способи означення фізичних величин, які досі зустрічаються в нашій підручній літературі, в деяких випадках, як це ми покажемо далі, відбивають ідеалістичні впливи буржуазної науки, що неприпустимо в радянській науці, яка розвивається на єдино-правильній науковій базі марксистсько-ленінської філософії.

Упорядкування питання про означення фізичних величин важливо також і з методичної точки зору. Різноманітність у формулюваннях означень фізичних величин, яку учні і студенти знаходять в різних підручниках, дуже утруднює процес сприймання і засвоєння цих величин. Студент часто не вловлює загального принципу, як мусять будуватись означення, і інший спосіб формулювання сприймає як цілком нове, принципово відмінне означення.

Крім того, іноді означення впливає на саму побудову викладання певного розділу курсу. При цьому прийнятий порядок викладання обумовлений історичними традиціями, а не відповідністю реальним співвідношенням явищ природи. Наприклад: історично склалось означення роботи, як добутку сили на шлях, і енергії, як здатності тіла виконувати роботу. Так будується і курс фізики на всіх його ступенях: спочатку розглядається робота сили, потім енергія, між тим, саме енергія є однією з основних властивостей матерії, однією з кількісних характеристик різних форм руху матерії.

Робота ж (як і тепло) є формою перетворення або передачі енергії від одного матеріального об'єкта до другого. Цілком ясно, що енергія, як фундаментальна величина, повинна мати означення незалежне від означення роботи. Навпаки, остання мусить означатись через енергію, в дусі означення, яке дав Ф. Енгельс [1]. Методика і порядок викладання питання про роботу і енергію мусить правильно відбивати співвідношення цих величин.

Потреба уточнення означень і відповідної термінології ясна з факту існування при Академії наук СРСР Комітету технічної термінології. Комісія цього комітету опублікувала, наприклад, проект термінології по теоретичній електротехніці [2]. Не меншу роботу треба проробити по перегляду і уточненню означень і фізичної термінології.

* * *

Спеціально питання про означення фізичних величин в дореволюційній фізичній літературі розглядав видатний методист О. Хвольсон. В I томі свого «Курсу фізики» Хвольсон розглядає питання про фізичні величини і їх означення. Суть поглядів Хвольсона зводиться до такого: всі фізичні величини слід ділити на 2 групи — початкові, які не потребують означення, і величини, які потрібно означати.

До першої групи величин Хвольсон відносить: 1) протяжність (лінійна, поверхнева, об'ємна); 2) час; 3) тиск (очевидно, в розумінні м'язевого зусилля, тобто *сили*, бо він вказує одиницю — 1 *кГ*) і 4) швидкість рівномірного прямолінійного руху. Він пише про ці величини: «Величини першого роду відповідають поняттям початковим, вихідним; вони означень не потребують, бо їх значення a priori ясно кожному. Властивості цих величин означаються тим уявленням, яке всіма зв'язується з їх назвою і тому вказівки на ці властивості кожен повинен шукати в *собі самому*». (Підкреслення автора) [3].

Величини другого роду, «які ми запроваджуємо в науку» (Вираз автора), вимагають можливо точнішого і повнішого означення.

У означенні повинно відбиватися все, що може служити відмітною ознакою означуваної величини; воно може бути зроблено тільки шляхом вказівки на залежність означуваної величини від чого-небудь вже відомого, тобто раніше точно визначеного.

Ці свої вимоги до означення Хвольсон реалізує в той спосіб, що вказує на пропорціональність означуваної величини іншим, раніше означеним. Наприклад: кутова швидкість — це величина особливого роду, яка «пропорціональна куту φ, на який система повертається в даний проміжок часу t і обернено пропорціональна часу t потрібному для повороту системи на даний кут φ» [3].

Однак Хвольсон не витримує послідовно прийнятого ним способу означення. У нього можна, наприклад, зустріти і такі означення: «Потужність — це величина, вимірювана тією роботою, яку тварина чи машина, при додержанні певних умов, здатні виконувати в кожну з великого ряду послідовних одиниць часу» [3].

Частину величин означає через похідну (прискорення є похідна швидкості по часу), а деякі не означає зовсім. Таким чином, Хвольсон не дотримується єдиного способу означення фізичних величин: у нього зустрічається і вказівка на пропорціональність, і на вимірюваність, і на чисельну рівність і т. д.

Крім того, невірне і основне твердження Хвольсона — його поділ фізичних величин на дві групи: неозначуваних, відомих людині (до досвіду), властивості яких людина «мусить шукати в самій собі», і означуваних. В цьому відношенні Хвольсон робить крок назад, порівнюючи хоч би з Ньютоном, який дає означення простору часу і інших основних величин. Регрес Хвольсона пояснюється його ідеалістичним світоглядом. У всіх своїх філософських висловлюваннях (наприклад, в книгах «Фізика наших днів» і особливо яскраво в «Характеристиці розвитку фізики за останні 50 років») Хвольсон дотримується кантіанських поглядів. Апріоризм Канта ліг в основу і вище наведених слів про «неозначувані величини», розуміння яких людина носить «в самій собі», «до досвіду» і, отже, які є чисто суб'єктивними категоріями. Таким чином, простір, час, сила, швидкість втрачають свою об'єктивну значимість, і кожна людина може їх тлумачити по-своєму. Для нас робота Хвольсона має тільки історичний інтерес, як одна з перших спроб в російській методичній літературі систематизувати питання про означення фізичних величин.

В радянській методичній літературі питання про означення фізичних величин майже не розглядалося. Ні в одному сучасному підручнику фізики (крім Третякова) не розглядається питання, як це в свій час зробив Хвольсон, про те, як і чому саме так слід означувати фізичні величини.

Спробу більш широкої постановки питання зробив І. І. Соколов в своїй «Методиці викладання фізики в середній школі». Цьому присвячений § 16 [4]. Навівши висловлення Хвольсона про означення фізичних величин і не давши критики його ідеалістичних поглядів, Соколов переходить до вказівки про існуючі способи означення фізичних величин і їх аналізу. Таких способів Соколов нараховує три.

1-й спосіб визначення полягає в побудові речення, де присудком є слово «є». Наприклад: «Швидкість є довжина шляху, що його тіло проходить за одиницю часу». Соколов підкреслює порочність такого способу означення: воно ототожнює різні фізичні величини (швидкість і шлях), кожна з яких є величиною особливого роду, і які тому не можна зводити одну до одної. В основному такі означення зникли з наших підручників, проте інколи зустрічаються, наприклад: «Величина струму є кількість електричних зарядів (електрики), що протекли через поперечний переріз провідника на одиницю часу» [5].

Навпаки, В. А. Земський [6] вважає цей спосіб найкращим для середньої школи, як найбільш доступний, і не вважає, що присудок «є» вказує на тотожність величин означуваної і тієї, що через неї означається. Ми не погоджуємось з думкою Земського. Справа не в тому, що кінець речення («швидкість є шлях за одиницю часу») усуває думку про тотожність величин, а в психології сприймання означення. Присудок «є» сприяє тому, що учні мимоволі уявляють собі при цих словах саме шлях. Він може бути більшим або меншим, він звичайно вимірюється (або розраховується) за 1 сек., але все ж в уяві учнів повстає, повторюємо, саме шлях, а не особлива, специфічна якість руху. Земський звертає увагу на те, що таке означення швидкості учні мають уже в IV класі, та справа в тому, що там, розв'язуючи задачі, вони шукають не швидкість, а знов-таки шлях, що його проходить конкретне тіло за 1 годину. Тому ми вважаємо, що до такого способу означення вдаватись не слід.

2-й спосіб визначення, як пише Соколов, «вказує тільки на той шлях вимірювання, з допомогою якого може бути складене поняття про нову величину на відміну від інших відомих величин без зазначення суті означуваної величини» [4]. Такий спосіб означення витримує на всьому протязі свого підручника для середньої школи І. І. Соколов. Наприклад: «Напруженість поля в даній точці є величина, вимірювана силою, з якою поле діє на одиницю позитивного заряду, вміщеного в дану точку поля» [7]. Подібні означення ми зустрічаємо і в інших підручниках, наприклад, в курсі Фріша і Тіморєвої [8], в проекті термінології по теоретичній електротехніці [2] і т. д.

Соколов вважає єдиним недоліком такого способу означення те, що означення через зазначення способу вимірювання вимагає додаткового роз'яснення, що шляхом ділення, множення і т. д. фізичних величин ми дізнаємось про кількість одиниць вимірюваної величини, бо в дійсності ж кожна з величин вимірюється своєю власною одиницею: швидкість — швидкістю, ємність — одиницями ємності і т. д.

Однак, на наш погляд, потреба в такому додатковому роз'ясненні не є основним недоліком такого способу означення. Він має значно істотніший недолік, про що ми скажемо пізніше.

3-й спосіб означення фізичних величин, відмічений І. І. Соколовим, полягає у означенні через відношення. Наприклад, у Третьякова «Відношення $\frac{Q}{V}$ називають електроємністю» [10]. За таким способом були побудовані означення в першому виданні стабільного підручника з фізики Пьоришкіна (див., наприклад, 3-ю частину) [17].

Недолік третього способу І. І. Соколов бачить в математизації означення, в тому, що математично відношення є частка від ділення двох однорідних величин, тимчасом як у фізиці ми маємо справу з відношенням різнорідних величин. Не розуміючи специфіки фізичних відношень, учні нібито в основному сприймають саме математичне значення його, а не фізичний зміст відношення.

Третьяков тому в «Курсі фізики» відводить цілий параграф «Вступу» (§ 4) питанню про те: «Що таке фізична величина і як треба розуміти математичні дії над фізичними величинами», де детально зупиняється на тому, що «ділення і множення різнорідних фізичних величин... треба розглядати не як арифметичну дію, а як знаходження нової, особливої фізичної величини», яка «по самій своїй суті відрізняється від тих величин, які ми ділимо або множимо»[10].

Там же автор обгрунтовує, що значить вираз «чисельно рівні» величини. Він показує, що величини різні по своїй суті не можуть бути рівними, навіть коли вони мають однакові числові значення. Про такі величини можна тільки говорити, що вони чисельно рівні. Так обгрунтовує Третьяков прийнятий ним в деяких випадках IV спосіб означення, про який не згадує Соколов, але який зустрічається в наших підручниках і який треба вважати за відмінний від інших способів.

4-й спосіб полягає в зазначенні чисельної рівності даної величини добуткам чи відношенням (часткам від ділення) більш простих величин. Так Третьяков визначає напруженість поля («Напруженість поля чисельно рівна силі, що з нею поле діє на одиницю додатної електрики» [10]) і деякі інші величини. Подібним чином в деяких випадках дають означення Фріш і Тіморєва в своєму курсі фізики (наприклад, означення вектора густини струму [8]) Максимов в курсі електротехніки (означення ємності [5]) і т. д.

В проекті термінології по теоретичній електротехніці в означеннях величин дається вказівка на рівність даної величини відношенню, похідній, інтегралу і т. д. від інших величин. На жаль, тут уже випущене слово «чисельно», а тимчасом Третьяков має рацію, коли підкреслює, що мова може йти тільки про чисельну рівність різнорідних величин.

Нарешті, зустрічається ще означення 5 способу з зазначенням пропорціональності даної величини іншим фізичним величинам. Цими означеннями широко користувався Хвольсон, ми знаходимо подібний спосіб означення також в проекті термінології по теоретичній електротехніці [2], в підручнику Фріша і Тіморєвої (наприклад: «Під швидкістю рівномірного руху розуміють фізичну величину, прямо пропорціональну пройденому шляху і обернено пропорціональну часу, за який цей шлях пройдений» [9]).

Таким чином, як бачимо, користуються п'ятьма різноманітними способами означення фізичних величин. До того майже ні в одному підручнику не витриманий єдиний спосіб означення. Наприклад, Фріш і Тіморєва користуються 2, 4, 5 способами і т. д.

Подібна різноманітність, навіть в межах одного підручника, приводить до висновку, що означення фізичних величин ще досить недосконале, і це питання потребує розробки.

* * *

Яким же мусить бути означення фізичних величин? Якому з п'яти способів слід віддати перевагу?

З логіки відомо, що означення полягає в установленні змісту поняття. Означити поняття, значить вказати, які істотні ознаки містяться в його змісті. Означення не пояснює значення терміну, не є підстановкою одного слова, замість другого, воно встановляє значення терміну.

Логічно вірне означення має форму речення, де підметом є означуване поняття, а присудком — перелік істотних ознак означуваного. В логіці найбільш досконалим є спосіб означення, що називається означенням через найближчий рід і через видоутворюючу відмінність. До цього способу означення відноситься вказівка В. І. Леніна про те, що означити, це значить «підвести дане поняття під друге, більш широке» [11].

Тільки мізерна частина означень фізичних величин належить до такого типу (наприклад, означення доцентрового прискорення як специфічного виду прискорення взагалі, означення миттьової швидкості і ін.).

Можливий і інший правильний логічний спосіб означення — так зване генетичне означення. Але в такий спосіб фізичні величини взагалі не означаються.

Отже, формально-логічні означення, як правило, до означення фізичних величин не застосовні. Кожна фізична величина є величина особливого роду, що не належить до якого-небудь широкого класу (роду) об'єктів, відрізняючись між собою лише видоутворюючою відмінністю. Тому для кожної фізичної величини доводиться шукати і *особливого означення*. Проте, звичайно, всі означення слід будувати за якимсь певним типом. Найголовніше не слід забувати, що означення дає *найістотнішу ознаку* величини, встановлює її зміст.

Що ж є істотним в кожній фізичній величині? Одні відповідають — її залежність від інших фізичних величин, раніше означених (звідси означення через пропорціональність даної величини іншим). Інші підкреслюють кількісні зв'язки між величинами— звідси означення через чисельну рівність величини комбінації інших. Для тих, хто дає означення через вимірювання даної величини іншими, очевидно, найістотнішим є можливість вимірювання величини, процес вимірювання.

Кожна фізична величина відображає реально існуючу властивість того чи іншого об'єкта чи явища. Безумовно вірно, що ця властивість об'єкта, властивість тієї чи іншої частини матерії не існує ізольовано, вона знаходиться в певному зв'язку з іншими його властивостями. Розкриття взаємозв'язку і взаємообумовленості властивостей об'єкта, а отже, встановлення зв'язків між фізичними величинами, які характеризують ці властивості, безперечно є одним з головних завдань науки.

Оскільки фізичні величини відображають властивості об'єктів і їх руху (в широкому розумінні цього слова) подвійно — і з якісного, і з кількісного боку, то для нас, ясно, має велике значення вивчення і кількісного зв'язку між фізичними величинами. Однак встановленням кількісних зв'язків означуваної величини з іншими ще не вичерпуються її істотні ознаки.

Кожна фізична величина характеризує якусь певну, особливу властивість предмета або сторону явища, не таку, яку характеризує інша фізична величина. Показати — що ж характеризує дана величина — це і значить по суті розкрити фізичний зміст даної величини.

Тому з нашої точки зору необхідно в означенні в першу чергу вказувати, що ж саме, яку властивість предмета або сторону явища характеризує дана величина, а потім уже відмічати кількісні зв'язки її з іншими фізичними величинами.

В цьому відношенні заслуговує на увагу спроба авторів «Проекту термінології теоретичної електротехніки», які означення більшості термінів намагаються побудувати (що проте не завжди їм вдається) з вказівки, по-перше, фізичного змісту терміну і, по-друге, визначення її кількісної міри [12].

В більшості підручників фізичний зміст величин не наголошується, а його слід було б підкреслювати особливо старанно. Деякі автори намагаються систематично розкривати фізичний зміст величин, але дають його у відриві від означення. Як приклад наведемо формування поняття прискорення в «Курсі фізики» Третьякова [10]. Спочатку він дає означення: «Постійне відношення $\frac{V_t - V_0}{t}$ називається прискоренням рівномірно-прискореного руху» (стор. 42), потім іде роз'яснення кількісної міри прискорення: «Прискорення чисельно рівне щосекундному приросту швидкості» (стор. 44) і, нарешті, розкриття фізичного змісту прискорення:

«Прискорення є характеристикою нової властивості руху: бистроти зміни швидкості» (стор. 45).

Методика введення нового поняття вимагає поступовості, але це не значить, що в кінці теми, глави, розділу не можна дати повного, достатньо вичерпного означення поняття, хоч би, наприклад, такого: «Прискорення є особлива фізична векторна величина, що характеризує бистроту зміни швидкості руху і чисельно рівна відношенню приросту швидкості, що відбулося потягом деякого проміжку часу, до величини цього проміжку часу».

Досить привабливим здається дати в означенні вказівку на взаємозв'язок величин, вказуючи на їх пропорціональність (5-й спосіб). Однак тут виникають певні труднощі. Взяти хоч би цитоване означення швидкості рівномірного руху з підручника Фріша і Тіморєвої. Вони пишуть: «Швидкість рівномірного руху прямо пропорціональна шляху і обернено пропорціональна часу». По суті ж швидкість даного конкретного рівномірного руху є величина істотно постійна і сама є коефіцієнтом пропорціональності змінного шляху і змінного часу, зміна яких і складає зміст явища механічного руху. Пропорціональна (як і обернено пропорціональна) залежність вказує на зміну, на процес і тому не може бути застосована до постійної величини, наприклад, швидкості рівномірного руху, якщо ми не бажаємо перекрутити фізичний зміст останньої. Аналогічно не можна так означати густину (як це робить Хвольсон), опір і інші подібні величини. Густина даної речовини, опір даного провідника при певних умовах (сталій температурі) є істотно постійними характеристиками речовини, провідника тощо. Отже, означення через вказівку на функціональну залежність можна робити не завжди, щоб не перекручувати фізичного змісту фізичної величини.

В більшості випадків фізичні величини за своїм змістом і кількісною мірою є границями відношень нескінченно малих приростів двох змінних величин $\left(v = \frac{ds}{dt}, a = \frac{dv}{dt}, I = \frac{dq}{dt}\right.$ і т. д.$\left.\right)$ і тому найбільш правильно було б зупинитися на означеннях фізичних величин в середній школі через відношення.

Фактично поняття про похідну виникло саме з вивчення такого роду явищ як нерівномірний механічний рух і його характеристик — швидкості, прискорення тощо. Для розв'язування задач руху довелося знаходити математичний апарат, який би точніше відбивав фізичну суть явищ нерівномірного руху. Тому чисельне значення похідної відображає кількісну міру, а суть похідної — фізичний зміст даної величини. Для швидкості *рівномірного* руху, для сили постійного струму і інших подібних величин, як цілком зрозуміло, похідну можна замінити відношенням.

Тому, на наш погляд, бажано при вивченні фізики в середній школі давати означення через відношення. Такий спосіб означення буде найбільш близьким до реального змісту фізичної величини і до строго наукового способу означення. Крім того, цей спосіб забезпечить наступність у викладанні фізики при переході до вищої школи: від відношення природно переходити до границь цих відношень, коли маємо справу уже з змінними величинами.

Земський в цитованій вище статті [6] приводить такі заперечення проти цього способу означення: а) означення стають трафаретними, і учні починають плутатись, яка пара величин мусить бути взята для означення тієї або іншої величини; б) учні знають тільки два роди відношень (геометричне і арифметичне), а відношення двох чисел різного найменування учням невідомі. Тому не можна давати означень, оперуючи невідомими поняттями.

Ми ж вважаємо, що трафаретність (або краще — уніфікація) будови означення приносить не шкоду, а користь. Учні звикають, що означення завжди будуються за певним принципом, важно його зрозуміти і тоді відпадає потреба кожне окреме означення завчати, як щось зовсім нове. Коли ж добре роз'яснено фізичну суть кожної величини, то ніяких утруднень, яку пару величин брати для означення, виникнути не може. Наприклад, коли учень знає, що напруженість поля є його силова характеристика, то він ніяк не візьме для означення цієї величини відношення роботи, або, скажемо, потенціалу до заряду.

По-друге, коли учні не мають поняття про відношення різнорідних величин, то це не причина, щоб відкинути використання таких відношень. Саме в курсі фізики і потрібно дати учням поняття про них (див. стор. 61), бо в курсі математики це не може бути зроблене, а у вищій школі на цьому не зупиняються, бо вважається, що учні користуються відношеннями різнорідних величин вже з самого початку вивчення фізики (наприклад, обчислення питомої ваги, тиску і т. д.). Коли учні вже в школі не одержать розуміння про відношення різнорідних величин як спосіб утворення нових фізичних величин, то знов-таки не буде ніякої наступності, послідовності викладу фізики при переході з середньої школи у вищу.

В повідомленні про обговорення макета нині діючого стабільного підручника, вміщеному в журналі «Фізика в школі» [13], вказано, що більшість рецензентів висловилась проти означень через відношення, вважаючи цей спосіб нібито порочним. Вони вважають кращим спосіб означення через вимірюваність величин. На жаль, в повідомленні не наведено аргументації їх пропозицій.

Все ж ми відстоюємо якраз означення через відношення і категорично заперечуємо проти означення через вимірюваність (2-й спосіб по нашій класифікації), саме його вважаючи недосконалим.

Цей другий спосіб обмежений і вузький, порівнюючи з іншими можливими варіантами означень. Адже сам І. І. Соколов підкреслює, що ми, при такому способі, не зазначаємо, не розкриваємо суті означуваної величини. Цей надто вузький спосіб, піднесений «в абсолют», — а так його будуть сприймати учні, незнайомі з іншими варіантами означень,— буде штовхати до згубних висновків, що найголовніше в фізичній величині — це її вимірюваність, спосіб утворення одиниць, процес вимірювання (бо ж у означенні ми підкреслюємо головні ознаки поняття, його зміст). Це яскраво ідеалістична концепція, яка процвітає в буржуазній науці, починаючи від Маха і кінчаючи сучасними операціоналістами.

Щоб відтінити цю думку, дозволимо собі привести дві цитати американського методиста Менна, послідовника реакційної педагогіки Дьюї, що в своїй методиці фізики пропагує маячні ідеї расизму, расової дискримінації, неповноцінності дітей трудящих класів. Менн підводить під свою методику певну методологію, яка відповідає інтересам пануючих класів США. Тому свою методику Менн починає з пояснення, що слід розуміти під фізичною реальністю, а звідси переходить до питання, як давати означення фізичних величин. Він пише: «Об'єктивними реальностями в фізиці є кількісні залежності між явищами, *визначувані вимірюванням*... Для того щоб означення мали яку-небудь цінність, вони мусять вказувати нам спосіб вимірювання». (Підкреслення наше [14]).

В другому місці, аналізуючи поняття енергії, він пише, що принцип збереження енергії зовсім не твердить, що сума всієї енергії у всесвіті постійна, ми цього знати не можемо. «В такій формі цей принцип звучніший, але не корисніший». Принцип твердить лише, що існує постійне відношення між одиницями, якими вимірюємо тепло, механічну роботу, електричну роботу і т. п. Всі одиниці можемо звести до механічних — «цим самим вчення про енергію дає загальну термінологію і загальну систему одиниць для всіх відділів фізики». Вчення про енергію об'єднує фізичні означення, бо «означення мало корисне для фізики, якщо воно не вказує способу вимірювання означуваного кількісного об'єкта» [14].

Так ідеаліст Менн перекручує зміст основного об'єктивного закону природи — закону збереження і перетворення енергії. Вихолощуючи фізичний зміст його, він вбачає в цьому законі лише співвідношення між історично довільно встановленими одиницями. Цінність закону у Менна зведена до можливості вимірювання величин «з усіх відділів фізики» єдиними одиницями. Об'єктивним для Менна є не те, що, існуючи незалежно від волі і свідомості суб'єкта, діє на органи його чуття і викликає відчуття, а те, що суб'єкт може виміряти. При цьому саме вимірювання визначає кількісні співвідношення. Не вимірювання відкриває кількісні залежності, які об'єктивно існують і характеризують явища природи, а саме вимірювання, проведені суб'єктом, визначають собою реальність явища, кількісні залежності світу. Але це і є яскраво виражений ідеалізм.

В питанні про означення фізичних величин Менн—прагматик-інструменталіст — тісно змикається з операціоналістами. Операціоналізм, одна з багатьох різновидностей суб'єктивного ідеалізму, має своїм ідейним джерелом махізм.

Вже Мах вимагав, щоб в означенні не відбивалось «ніякої теорії», а тільки вказувався спосіб вимірювання. В такому плані він давав означення різних фізичних величин, наприклад, маси. Мах вважає своєю заслугою, що він вигнав з означення фізичний зміст маси («кількість речовини», «міра інерції» тощо) і інших величин.

Операціоналізм далі розвинув думку Маха. Під виглядом боротьби за точність знання операціоналісти розв'язують питання про реальність фізичних об'єктів в тому ж ідеалістичному плані — що не дано у відчуттях, у фізичних вимірюваннях, те не об'єктивне, те «метафізика». Поняття тільки тоді має цінність, має реальний зміст, твердять вони, коли йому співставлена, хоча б мислено, деяка операція вимірювання.

Операціоналісти розглядають фізичну величину не як образ об'єктивного матеріального світу, що діалектично поєднує в собі і якісну і кількісну сторону, але ототожнюють величину з самою операцією, процесом вимірювання. Тому вони договорюються до прямих заяв, що об'єкт, його властивості утворюються в процесі вимірювання, в процесі взаємодії з приладом. Таким чином, у операціоналістів об'єктивна значимість фізичної величини губиться, вона замінена суб'єктивним, залежним від людини процесом вимірювання. Ідеалізм операціоналістського підходу до означення фізичних величин, тобто вимога співставляти всякій фізичній величині хоч би мислено процес вимірювання, ясний і не потребує дальшого розкриття.

В. І. Ленін в своєму геніальному творі «Матеріалізм і емпіріокритицизм» дав нищівну критику махізму і інших різновидностей суб'єктивного ідеалізму, і його критика повністю відноситься і до сучасних інструменталістів, операціоналістів і інших лакеїв імперіалістичної реакції.

Фізична величина відображає, характеризує і якісну, і кількісну сторону або властивість об'єктивно існуючого предмета чи явища. Кількісна і якісна сторони взаємозв'язані і взаємообумовлені, бо кількісні зміни ведуть до корінних якісних змін і навпаки. Отже, вивчення кількісної сторони явищ дуже важливе для фізики, а воно не може бути здійснене без вимірювань. Однак надавати вимірюванням надмірну значимість, якусь виключність і, як наслідок, класти її в основу означень фізичних величин (саме вказівку на спосіб її вимірювання) є невірним. Це буде, як висловився В. І. Ленін, роздування однієї з рис пізнання в абсолют, що неминуче веде до ідеалізму.

Крім того, вимірювання будь-якої фізичної величини може здійснюватись різними способами. Наприклад, масу можна вимірювати через прискорення і через вагу, опір — відношенням напруги до сили струму і заміщенням і т. п.

Таким чином, ми вважаємо некорисними означення фізичних величин, які б обмежувались тільки вказівкою на вимірюваність даної величини, тобто той спосіб, який був прийнятий в підручнику фізики проф. І. І. Соколова і який знов у трохи зміненому виді появився в другому виданні стабільного підручника О. В. Пьоришкіна, де скрізь використовуються вирази типу «вимірюється відношенням» (див., наприклад, ч. 3) [18].

Ми пропонуємо в означенні фізичних величин вказувати, яка властивість вивчуваного об'єкта характеризується даною фізичною величиною, і вказувати на чисельну рівність даної величини відношенню величин, якими вони означаються найбільш повно. Фундаментальні, основні величини, такі як простір, час, маса, енергія, потребують особливих означень, які найбільш повно розкривали б фізичний зміст цих понять.

Ми не ставимо тут питання про методику формування понять про фізичні величини. Зазначимо тільки, що на початку VIII класу необхідно у вступі,розглянути питання про дії над фізичними величинами, хоч би в плані підручника Третьякова («Вступ», § 4). Учні повинні усвідомити, що знаходження відношень є не просто математична операція, а знаходження нової фізичної величини. Потім при запровадженні кожної фізичної величини слід, після аналізу конкретних прикладів і дослідних даних, вказувати, що ж характерного в вивчуваному явищі, інакше кажучи, яка величина може служити характеристикою його. Після цього вивчити основні зв'язки величин, які приводять до відшукання нової величини, і тільки в кінці теми давати повне означення вивченої фізичної величини.

На першому етапі вивчення фізики в VI—VII класах і означення через відношення, і означення через вимірювання залишаються для учнів пустим звуком, трудно запам'ятовуються і не завжди викликають правильне уявлення про фізичну величину.

Учням VI—VII класів безумовно важко усвідомити специфіку фізичних відношень різнорідних величин. Але не менш трудно усвідомити і вираз типу «вимірюється» («Потужність вимірюється величиною роботи, яку виконує машина за одну секунду» [15]). Учні питають: Чому ми так говоримо, коли потужність вимірюється $\frac{кГм}{сек}$, *k. c.*? Інакше кажучи, вони плутають одиниці і означення величини. На питання: Чим вимірюється сила струму, вони незмінно відповідають — амперами, навіть можна почути — амперметром, але ніколи не скажуть «кількістю електрики, що протікає через поперечний переріз провідника за 1 секунду». Знов-таки, слово «вимірюється» викликає уявлення про одиниці або навіть про прилад, але не про означення фізичної величини.

В статті «До питання про підручник фізики» [16], автор Бакуменко, посилаючись на проф. Бачинського, говорить, що коли не можна дати точного означення, то краще не давати ніякого. З цим погодитись не можна. Популяризація знання не значить вульгаризація його. Не маючи можливості дати точне означення, все ж необхідно давати деяку подібність означення, не перекручуючи, звичайно, його фізичної суті. Обмежувати ж початковий курс фізики тільки описовою стороною, без елементів теорії ми не можемо ні на якому етапі вивчення фізики.

На нашу думку, найбільш придатним формулюванням означень у VI—VII класах буде формулювання з зворотом «показує». Наприклад, «сила струму показує, яка кількість електрики протікає через поперечний переріз провідника за 1 секунду». Або ще краще «...показує, яка кількість кулонів електрики протікає через кожний поперечний переріз провідника за 1 секунду». При такому звороті ми і не ототожнюємо різнорідних величин, не маємо тут справи і з відношенням, не вживаємо і виразу «вимірюється». Нарешті, звідси легше здійснити перехід до одиниць. Будь-яка сила струму показує, яка кількість кулонів протекла за 1 секунду; 1 ампер показує, що за секунду протікає тільки один кулон електрики. Вимірювання ж сили струму виконується спеціальним приладом — амперметром (хоч за означенням слід було би міряти кількість електрики і час), бо користуватися електролітичною ванною, терезами і секундоміром дуже громіздко і незручно.

Проти означень типу «сила струму показує, яка кількість *кулонів* протікає...», або «напруга показує, яка кількість *джоулів* енергії виділяється на дільниці кола при проходженні одного кулона електрики» можна зауважити: по-перше, що не обов'язково кількість електрики вимірюється кулонами, а енергія — джоулями, є і інші одиниці цих величин, тобто, що ми звужуємо означення. По-друге, що в означення ми вводимо одиниці, тобто знов в неявному вигляді вводимо вимірюваність величини. Зауваження ці справедливі. Але на першому етапі вивчення фізики доводиться бути якнайбільш конкретним. В другому місці ми доводимо, що такі означення справді сприймаються і заучуються учнями значно легше. Їм зрозуміліший вираз «1 секунда», «1 кулон», ніж вирази «одиниця часу», «одиниця кількості електрики» і т. п. До того, учні VII класу, крім практичних одиниць, не знають ніяких інших. Тому вважаємо можливим користуватись такими означеннями, приносячи до деякої міри наукову строгість в жертву міркуванням більшої конкретності і простоти означень.

Резюме

Оскільки кожна фізична величина характеризує об'єктивні властивості предметів або сторони явищ з якісного і кількісного боку, то означення фізичної величини мусить будуватись: 1) з вказівки про те, що саме характеризує ця величина (тобто з розкриття фізичної суті величини) і 2) з вказівки на чисельну рівність означуваної величини відношенню інших фізичних величин.

Такий спосіб означення можна застосовувати, починаючи з VIII класу середньої школи, коли достатній розвиток учнів дає їм можливість сприймати специфіку фізичних відношень (тобто відношень різнорідних величин, в результаті чого знаходиться нова фізична величина, суттєво відмінна від тих, що ввійшли у відношення).

Спосіб означення через вказівку на вимірюваність означуваної величини іншими незадовільний, бо він відбиває ідеалістичну (операціоналістську) тенденцію вбачати головний зміст, суттєву ознаку, навіть критерій реальності кожної фізичної величини в процесі її вимірювання, в можливості її вимірювання. Тому цього способу краще уникати в наших підручниках.

На першому етапі вивчення фізики, в VI—VII класах середньої школи, де через вікові особливості учнів неможливо дати цілком точне означення, особливу увагу потрібно приділяти розкриттю фізичного змісту величин; спрощене формулювання означення можна будувати в формі, «що показує» дана фізична величина.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ф. Энгельс, Диалектика природы, М., 1946.
2. Электричество, I, 69—78, 1953.
3. О. Д. Хвольсон, Курс физики, т. I, 1923.
4. І. І. Соколов, Методика викладання фізики в середній школі, К., 1952.
5. Д. Г. Максимов, Курс электротехники, М., 1952.
6. В. А. Земский, Определение физических величин в учебниках средней школы, Физика в школе, 3, 32—33, 1955.
7. І. І. Соколов, Курс фізики, ч. 3, К., 1953.
8. С. Е. Фриш и А. В. Тиморева, Курс общей физики, т. 2, М., 1952.
9. С. Е. Фриш и А. В. Тиморева, Курс общей физики, т. I, М., 1951.
10. Н. П. Третьяков, Курс физики, М., 1952.
11. В. И. Ленин, Соч., т. 14.
12. Электричество, I, 65, 1953.
13. Физика в школе, 4, 91—95, 1953.
14. Менн, Как учить физике в целях общего образования, 1925.
15. О. В. Пьоришкін, Г. І. Фалєєв, В. В. Крауклiс, Фізика, ч. I, Київ — Львів, 1949.
16. Физика в школе, 6, 91—99, 1937.
17. А. В. Перышкин, Курс физики, ч. 3, М., 1954.
18. О. В. Пьоришкін, Курс фізики, ч. 3, К., 1955.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

В. М. НОСОЛЮК,
кандидат педагогічних наук

ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ІНДУКТИВНОСТЕЙ

В практиці радіолюбителів середньої школи або студентів фізико-математичного факультету часто приходиться визначати індуктивності контурних котушок. При відсутності вимірних приладів індуктивності розраховуються за відомими формулами, які дають цілком задовільні результати.

Серед них практичними є такі формули:

а) формула для розрахунку індуктивності одношарової циліндричної котушки (рис. 1):

$$L = \frac{D^2N^2}{100l + 44D}. \qquad (1)$$

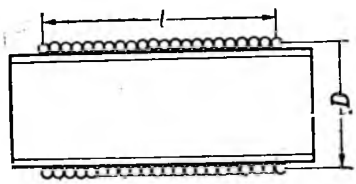


Рис. 1.

Вид цієї формули зберігається і при розрахунках котушок для ультракороткохвильового діапазону, що складаються з 2—5 витків товстого мідного дроту, але коефіцієнти набувають іншого значення, а саме:

$$L = \frac{D^2N^2}{100l + 46D} \text{ при } l > \frac{D}{2} \text{ і } L = \frac{D^2N^2}{112l + 40D} \text{ при } l < \frac{D}{2}.$$

Якщо котушка складається лише з одного круглого витка мідного дроту ($\mu = 1$), то її індуктивність з достатнім наближенням визначається так:

$$L = 6{,}28 \cdot 10^{-3} D \left(2{,}3 \lg \frac{8D}{d} - 2\right).$$

Тут D — діаметр витка, d — товщина мідного дроту, з якого зігнуто виток;

б) формула для розрахунку індуктивності короткої циліндричної багатошарової котушки (рис. 2):

$$L = \frac{0{,}08D^2N^2}{3D + 9b + 10c}. \qquad (2)$$

В ній $D = D_к + c$ — середній діаметр намотки, $D_к$ — діаметр каркаса, b — аксіальна довжина, а c—радіальна товщина намотки.

У всіх цих формулах лінійні розміри беруться в сантиметрах, а індуктивність одержується в мікрогенрі.

За формулою (2) розраховують індуктивність котушки з намоткою «внавал» або «універсал», забезпечуючи точність $\pm 1\%$. Точніші формули обрахунку індуктивностей можна знайти в радіотехнічних довідниках.

Однак в своїй практичній роботі радіолюбитель середньої кваліфікації частіше зустрічається з оберненою задачею, а саме — за відомою індуктивністю треба розрахувати число витків котушки. Ця задача трудніша, ніж задача по розрахунку індуктивності L за приведеними вище формулами.

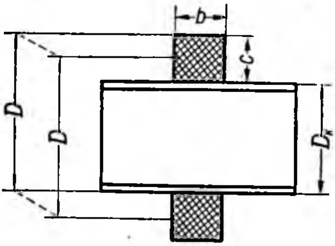


Рис. 2.

Вона на перший погляд є неозначеною, бо, як видно з формули (2), включає, крім шуканого N, ще деякі невідомі величини (D, b, c). Проте вона легко розв'язується, якщо накласти відповідні попередні умови, наприклад, задатись величиною аксіальної довжини b намотки, радіальної товщини c намотки та діаметром $D_к$ каркаса котушки. При таких умовах задача просто розв'язується графічним методом. Серія робочих графіків, які забезпечують достатню точність шуканих величин N або L, приведена в кінці статті.

Виходячи із власних потреб і можливостей, радіолюбитель може легко побудувати робочі графіки самостійно. Розраховуючи подібні графіки, слід прийняти до уваги, що індуктивність котушки практично не міняється від зміни товщини τ намотувального провідника, інакше кажучи, при незмінних лінійних розмірах $D_к$ та b і числа витків N індуктивність котушки майже не залежить від зміни радіальної товщини намотки. Ця властивість пояснюється з формули (2), яку запишемо в такому вигляді:

$$L = \frac{x}{y}, \text{ де } x = 0{,}08\,(D_к + c)^2 N^2, \; y = 3D_к + 9b + 13\,c.$$

Цілком ясно, що x та y є функціями одного і того ж параметра τ — товщини намотувального провідника, що випливає із очевидного співвідношення:

$$N\tau^2 = bc. \tag{3}$$

Тут τ включає і товщину ізоляції провідників. Незалежність індуктивності котушки від радіальної товщини c намотки або в кінцевому підсумку від τ повинна відповідати такій умові:

$$\frac{x}{y} = \frac{x + dx}{y + dy}, \quad \text{тобто} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}.$$

Нехтуючи членом $\left(\frac{N}{b}\tau^2\right)^2$, як дуже малою величиною, матимемо:

$$dx = \frac{0{,}32D_к N^3}{b}\tau d\tau,\ dy = \frac{26N}{b}\tau d\tau.$$

Відношення dx до dy зазначимо через α:

$$\alpha = \frac{0{,}08D_к N^2}{6{,}5}. \tag{4}$$

Розрахунки показують, що α величини одного порядку з L і, що дуже важливо для нас, в першому наближенні не залежить від параметра τ. Розходження між α та L змінюється із зміною кількості витків та лінійних розмірів котушки, проте їх відношення $k = \frac{L}{\alpha}$ в широких межах для певного значення b та $D_к$ залишається практично сталим і близьким до одиниці. Значення k, обрахованого за формулою

$$k = \frac{6{,}5\,(D_к + c)^2}{D_к\,(3D_к + 9b + 13c)}, \tag{5}$$

яка випливає із (2) та (4), приведені на графіках в додатках.

Цю властивість коефіцієнта k можна використати для спрощених розрахунків індуктивностей котушок. З формули (2) і (5) встановлюємо, що

$$L = 0{,}01231kD_к N^2. \tag{6}$$

Взявши із графіків значення k, легко визначити за формулою (6) індуктивність даної котушки або кількість витків за наперед заданою індуктивністю. Формула (6) забезпечує точність до $\pm$ 1%.

Користуючись формулою (6), можна вести наближені розрахунки котушок ще простіше. Для цієї мети треба мати значення індуктивності L_0 та кількість витків N_0, хоча б для однієї котушки-еталона з кожної серії (для певних величин D_k та b). Очевидно, що таким «еталоном» краще всього брати котушку, для якої коефіцієнт k_0 має певне проміжне близьке до середнього значення. Дані таких «еталонів» подаються в табл. 1 з розрахунку, що радіолюбитель буде користуватись котушками, індуктивності яких лежать в межах 60—2000 *мкгн*.

Для «еталонних» котушок також справджується рівняння (6):

$$L_0 = 0{,}01231k_0 D_к N_0^2.$$

Тому

$$\frac{L}{L_0} = \frac{kN^2}{k_0 N_0^2}.$$

Звідки

$$N = \sqrt{\frac{k_0}{k}}\,N_0 \times \sqrt{\frac{L}{L_0}}.$$

Таблиця 1

$D_к$ (в *см*)	b (в *см*)	N_0	L_0 (в *мкгн*)	k_0
1,0	0,2	250	996	1,294
	0,3	270	1036	1,154
	0,4	270	932	1,037
	0,5	270	837	0,932
	0,6	270	756	0,842
1,2	0,3	270	1293	1,200
	0,4	270	1177	1,092
	0,5	250	914	0,992
	0,6	250	836	0,906
1,7	0,3	120	403	1,337
	0,4	120	371,3	1,232
	0,5	120	342,5	1,136
	0,6	200	879	1,050
2,0	0,3	120	498,5	1,407
	0,4	120	468	1,308
	0,5	150	672	1,212
	0,6	120	400,5	1,130

Але тому, що $\sqrt{\frac{k_0}{k}} \approx 1$, то

$$N \approx N_0 \sqrt{\frac{L}{L_0}}. \tag{7}$$

Формула (7) при використанні «еталонних» котушок, приведених в табл. 1, забезпечує точність обрахунків котушок, використовуваних в практиці радіолюбителя, з точністю $\pm 3\%$.

Приклад. Обрахувати кількість витків, які треба намотати на каркас діаметром $D_к = 1{,}7$ *см* при аксіальній довжині намотки $b = 0{,}4$ *см*, щоб одержати котушку з індуктивністю $L = 2286$ *мкгн*.

З табл. 1 для котушки даної серії знаходимо дані «еталона»: $N_0 = 120$, $L_0 = 371{,}3$ *мкгн*. Далі за формулою (7) обраховуємо

$$N \approx 120\sqrt{\frac{2286}{371{,}3}} = 297{,}5.$$

За формулою (6) при $k = 1{,}213$ знаходимо:

$$N = \sqrt{\frac{2286}{0{,}01231 \cdot 1{,}213 \cdot 1{,}7}} = 300.$$

Розходження в даному випадку менше від 1%.

Доцільно відмітити, що при використанні намотувального провода діаметром, відмінним від 0,2 *мм*, розраховані за приведеними графіками індуктивності та кількості витків можуть відрізнятись від дійсної величини на 1—2%. Тому при виготовленні котушок слід завжди кількість витків намотувати більше від розрахованих на 1—2%. Підгонку індуктивності виготовленої котушки до заданої величини виконуємо або за допомогою вимірювального приладу, або розрахунками. В останньому випадку обраховуємо індуктивність виготовленої котушки за формулою (2), для чого точно виміряємо всі її лінійні розміри штангенциркулем. А далі за формулою (7) визначаємо кількість витків, які потрібно відмотати, щоб індуктивність котушки відповідала потрібній величині.

Якщо в котушку буде вводитись феромагнітний сердечник, при розрахунках її індуктивності потрібно враховувати, що індуктивність котушки з феромагнітним сердечником збільшується в 1,2—1,5 раза. Екранування котушок зменшує їх індуктивність в 1,2—1,3 раза.

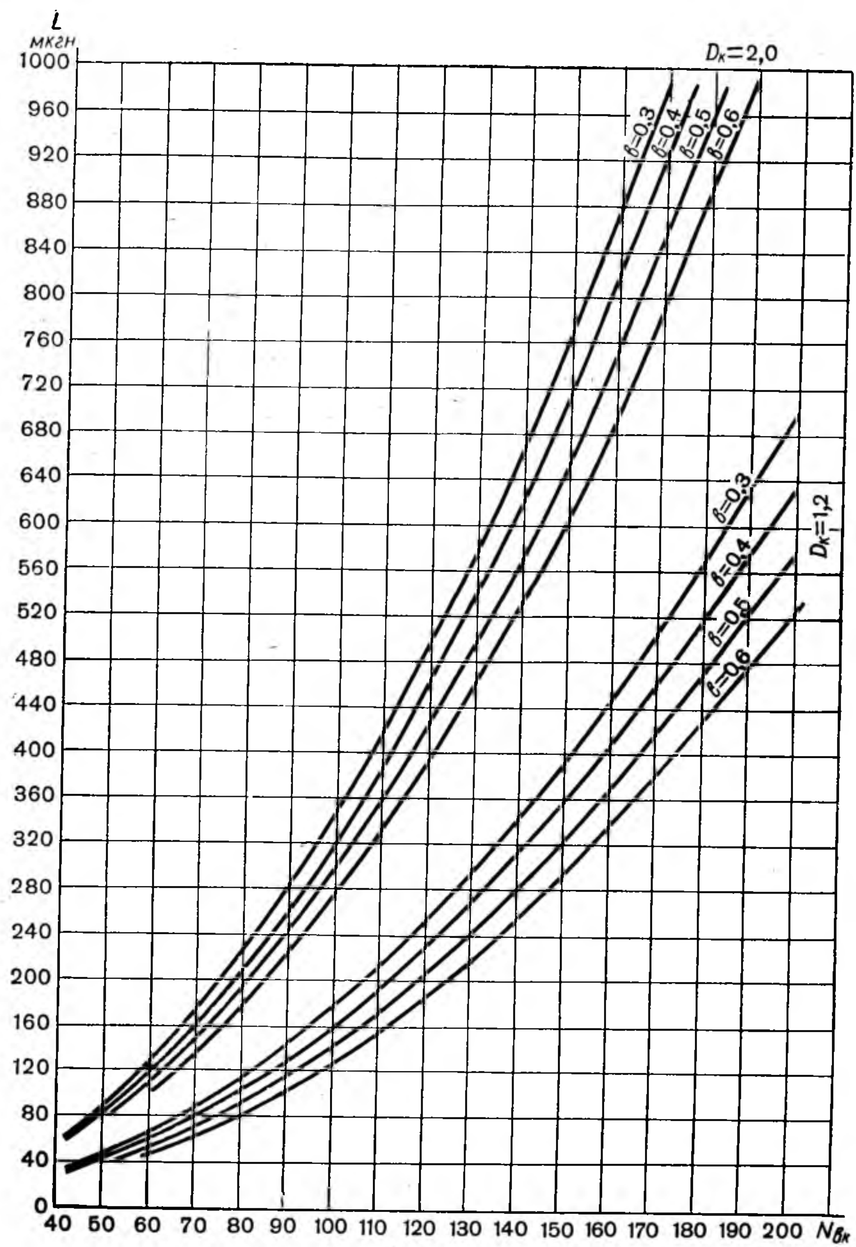

L
мкгн
1000
960
920
880
840
800
760
720
680
640
600
560
520
480
440
400
360
320
280
240
200
160
120
80
40
0
40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 $N_{вк}$
$D_к=2,0$
$в=0,3$
$в=0,4$
$в=0,5$
$в=0,6$
$D_к=1,2$
$в=0,3$
$в=0,4$
$в=0,5$
$в=0,6$

Рис. 3.

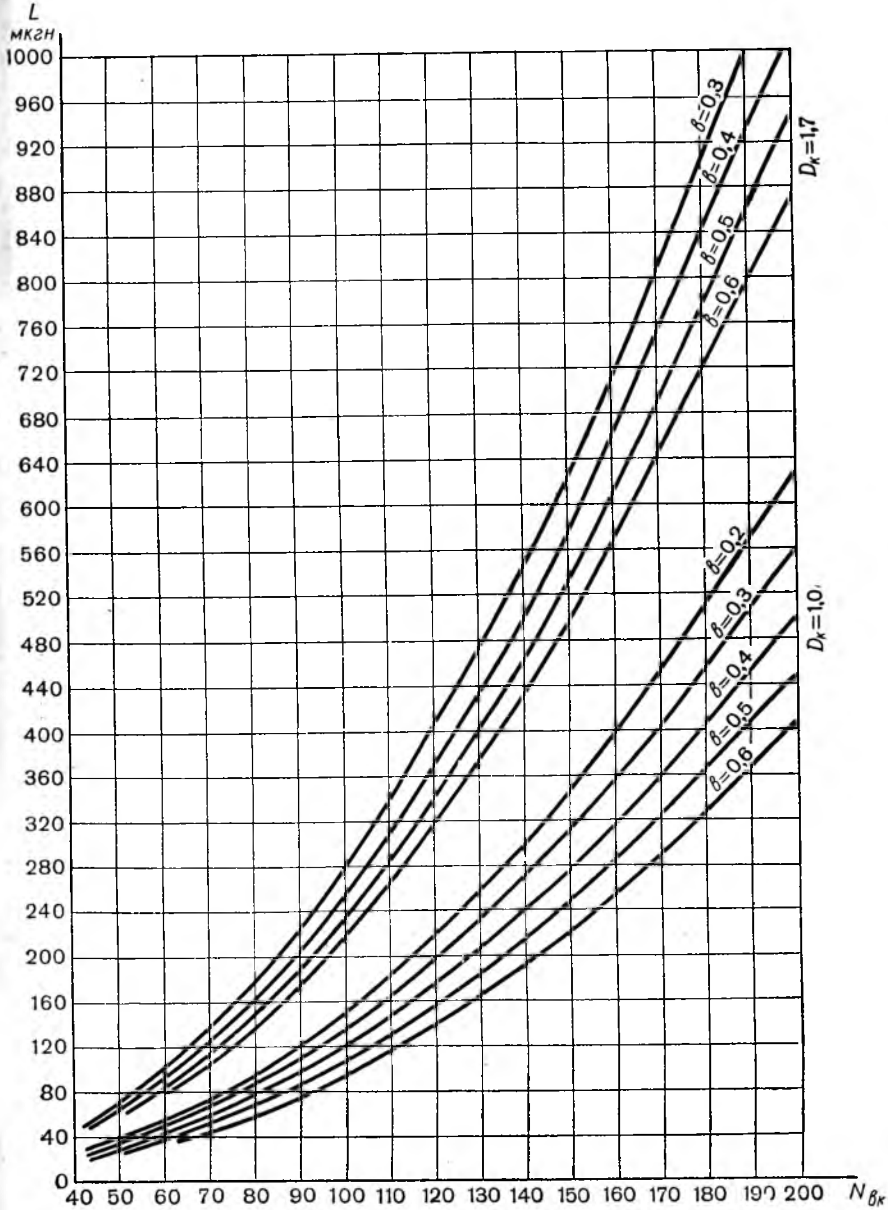

L мкгн
1000
960
920
880
840
800
760
720
680
640
600
560
520
480
440
400
360
320
280
240
200
160
120
80
40
0
40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200
$N_{вк}$
в=0,3
в=0,4
в=0,5
в=0,6
$D_к=1,7$
в=0,2
в=0,3
в=0,4
в=0,5
в=0,6
$D_к=1,0$

Рис. 4.

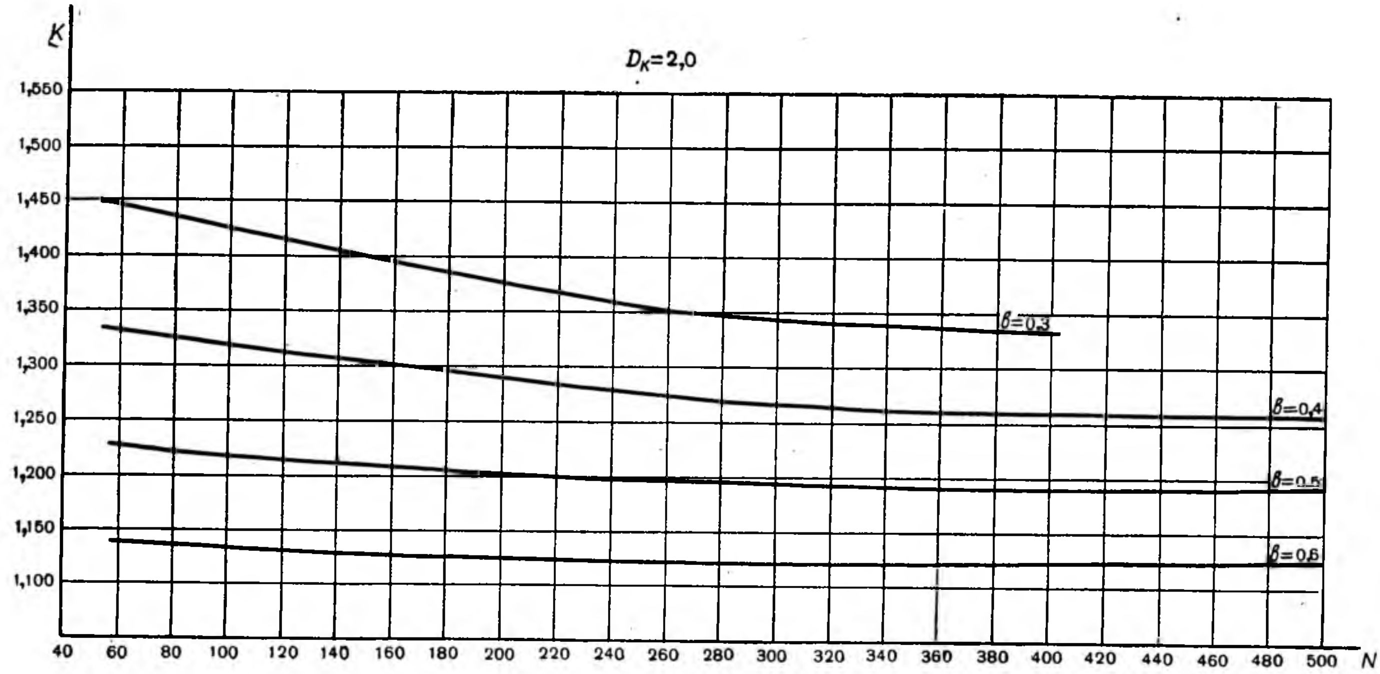

$D_K=2,0$
K
1,550
1,500
1,450
1,400
1,350
1,300
1,250
1,200
1,150
1,100
$\beta=0,3$
$\beta=0,4$
$\beta=0,5$
$\beta=0,6$
40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 380 400 420 440 460 480 500
N

Рис. 5.

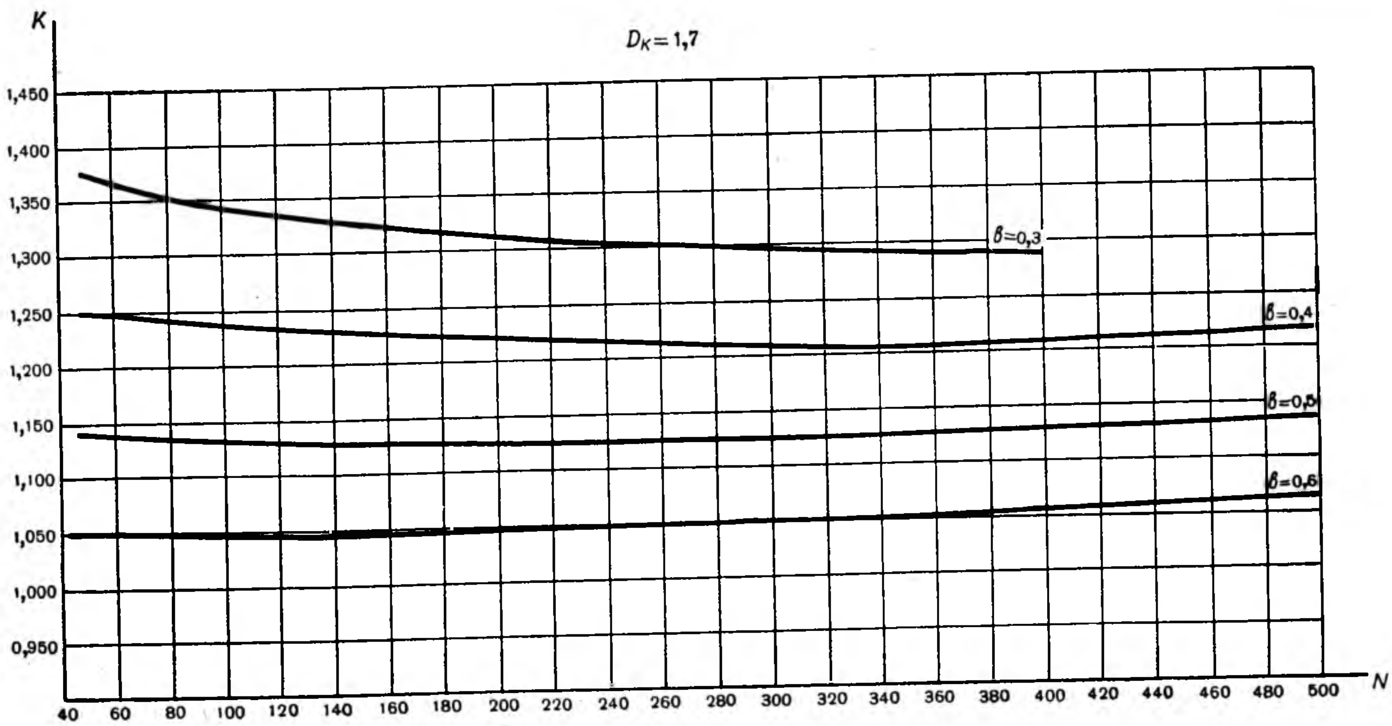

$D_K=1,7$
K
1,450
1,400
1,350
1,300
1,250
1,200
1,150
1,100
1,050
1,000
0,950
$\beta=0,3$
$\beta=0,4$
$\beta=0,5$
$\beta=0,6$
40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320 340 360 380 400 420 440 460 480 500
N

Рис. 6.

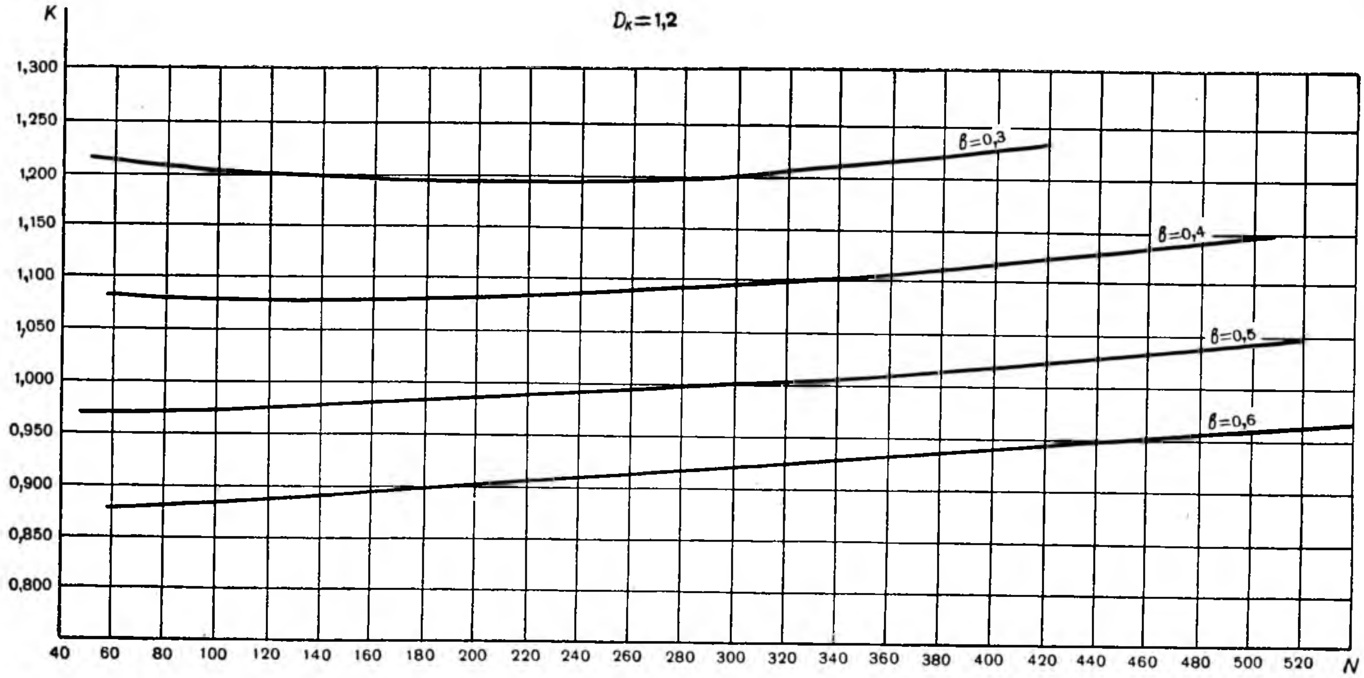


Рис. 7.

6 385

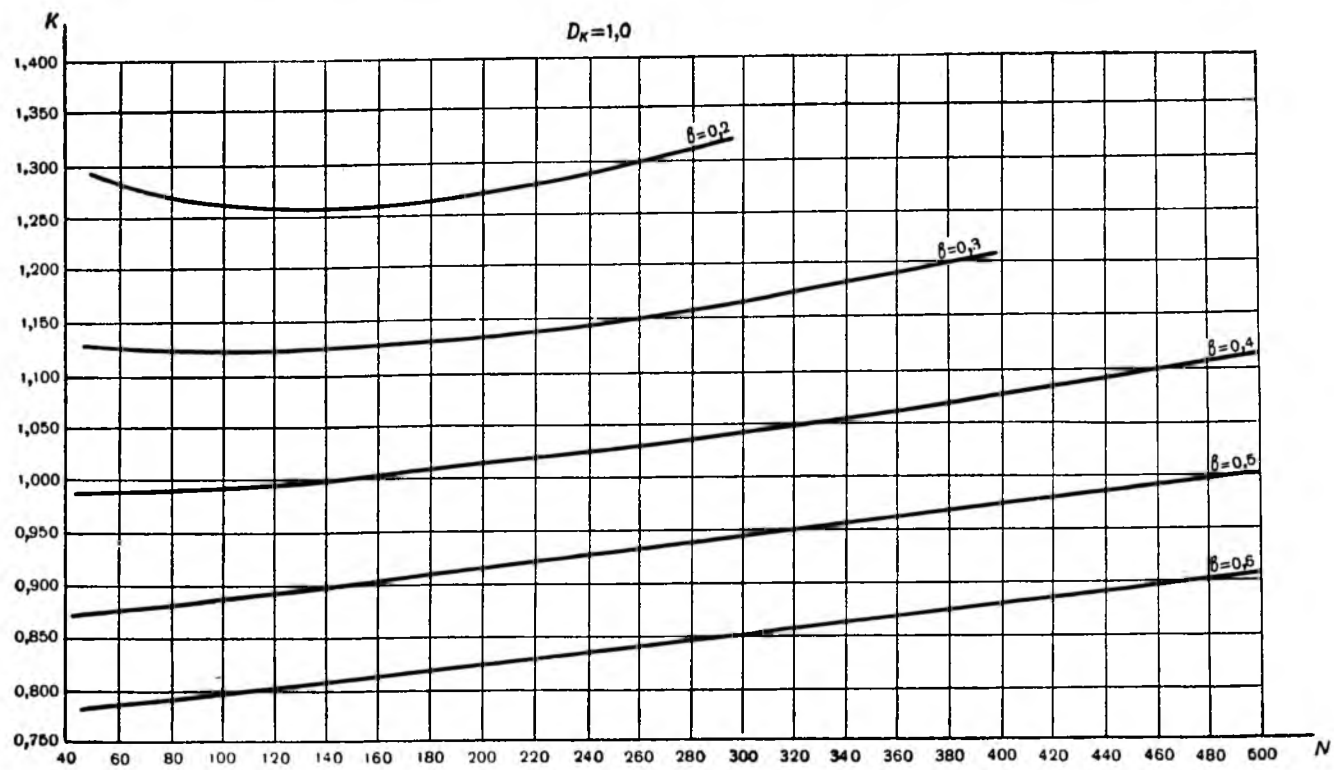


Рис. 8.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

Є. М. СКУБЛЕВСЬКИЙ, професор і *Г. Ф. КАЛУГІН*

ЗМІНА МІЦНОСТІ У СТАЛІ У-5 І МІДІ, ПОКРИТИХ ЦИНКОМ І НІКЕЛЕМ

Твердо установлено і науково обгрунтовано, що міцність і твердість металів нерозривно зв'язана з *структурою* об'єкта і станом його поверхневого шару. *Поверхня реального кристала не є дзеркальною. Вона засіяна западинами, гірками, тріщинами і мікротріщинами.* На границях останніх зосереджується напруга, яка поглиблює і розширює ці тріщини; це веде до скорішого руйнування досліджуваного зразка. Вплив поверхневих дефектів на міцність матеріалу вивчався вперше академіком А. Ф. Йоффе і його учнями [1]. Кристал кам'яної солі, занурений у воду, різко змінює величину своєї міцності тому, що вода розчиняє і змиває поверхневі тріщини. Ми змінювали величину міцності мідної дротинки, занурюючи останню у ртуть. Ртуть, як відомо, розчиняє деякі метали, змиває поверхневі тріщини і тим самим зміцнює ці метали. Старанна поліровка металевих деталей також зменшує число тріщин і підвищує міцність. Покриваючи один метал іншим, більш міцним або менш міцним, можна змінювати величину міцності першого металу. Стальний дріт, покритий тонким шаром цинку, міді або олова, стає менш міцним.

На деяких заводах як покривний матеріал застосовується переважно цинк і олово. Покриття може здійснюватись такими способами: гальванічним способом, зануренням металу в розплавлений інший метал, методом катодного розпилювання* та возгонкою.

В табл. 1 наведені результати наших спостережень над неоцинкованим стальним дротом, здобуті за допомогою сконструйованої нами машини.

В табл. 2 наведені результати вимірювання такого ж зразка щодо хімічного складу і розмірів, підданого гальванічному оцинкуванню.

Зіставлення даних, приведених в табл. 1 і 2, дозволяє зробити висновок, що при інших рівних умовах, гальванічне оцинкування

[1] Цей спосіб покривання одного металу іншим на заводах не застосовується.

Таблиця 1

C	Хімічний склад						Діаметр (в *мм*)	Початкова довжина (в *мм*)	T	Розривна сила (в *кГ*)	Гранична міцність (в *кГ/мм²*)
	Si	Mn	S	P	Cr	Ni					
0,47	0,30	0,63	0,39	0,022	—	—	1,22	100	24° C	182	155,22
0,47	0,30	0,63	0,39	0,022	—	—	1,22	100	24° C	181	155,394
0,47	0,30	0,63	0,39	0,022	—	—	1,22	100	24° C	180	154,537
0,47	0,30	0,63	0,39	0,022	—	—	1,22	100	24° C	182	155,82
0,47	0,30	0,63	0,39	0,022	—	—	1,22	100	24° C	183	159,335
0,47	0,30	0,63	0,39	0,022	—	—	1,22	100	24° C	181	154,985
									Середня . . .		155,48

знижує границю міцності на 6,7 *кГ/мм²* або 4,33%. Цинк, покриваючи стальний дріт, змінює площу його поперечного перерізу. Остання обставина повинна була б утворити сприятливі умови для збільшення розривної сили. А між тим міцність дроту зменшується.

Таблиця 2

Діаметр (в *мм*)	Початкова довжина (в *мм*)	T	Товщина покриття (в *мм*)	Розривна сила (в *кГ*)	Гранична міцність (в *кГ/см²*)
1,24	100	24° C	0,02	180	149,13
1,24	100	24° C	0,02	180,5	149,54
1,24	100	24° C	0,02	179,5	148,32
1,24	100	24° C	0,02	180	149,13
1,24	100	24° C	0,02	180,5	149,54
1,24	100	24° C	0,02	178,5	147,88
1,24	100	24° C	0,02	180	149,13
				Середня . . .	148,76

Табл. 3 і 4 дають можливість спостерігати зміну границі міцності, внаслідок гарячого оцинкування одного і того ж зразка діаметром 1,6 *мм*.

Середнє зниження границі міцності при гарячому оцинкуванні є 18,8 *кГ/мм²*. Втрата міцності складає 10,76%, тобто гаряче оцинкування в значно більшій мірі, ніж гальванічне, знижує границю міцності. Нижче приводяться дані, які дають можливість зрівняти вплив лудження на міцність для різних діаметрів дроту. Ці дані менш точні, тому що випробуванням піддавались різні зразки дротів, взятих з складу готової продукції.

Для чистого дроту діаметром 0,25 *мм* середня границя міцності 215,35 *кГ/мм²*. Після лудження границя міцності знизилась до 206 *кГ/мм²*. Середня втрата міцності при лудженні даного дроту 4,32%. Для дроту діаметром 0,30 *мм* при гарячому лудженні гра-

Таблиця 3

Хімічний склад							Діаметр (в *мм*)	Початкова довжина (в *мм*)	*T*	Розривна сила (в *кГ*)	Гранична міцність (в *кГ/мм*²)
C	Si	Mn	S	P	Cr	Ni					
0,57	0,30	0,47	0,030	0,020	0,04	0,05	1,6	100	25,7	335	166,6
0,57	0,30	0,47	0,030	0,020	0,04	0,05	1,6	100	25,7	336	167,16
0,57	0,30	0,47	0,030	0.020	0,04	0,05	1,6	100	25,7	334,5	166,42
0,57	0,30	0,47	0,030	0·020	0,04	0,05	1,6	100	25,7	332	165,17
0,57	0,30	0,47	0,030	0,020	0,04	0,05	1,6	100	25,7	325	161,69
									Середня . . .		165,4

ниця міцності знижується в середньому з 220,8 *кГ/мм*² до 199 *кГ/мм*², а втрата міцності на 9,5%. Дріт Д 0,40 *мм* при гарячому лудженні змінює границю міцності з 208 *кГ/мм*² до 196 *кГ/мм*²; втрата міцності складає 6,2%. Для дроту Д 0,50 *мм* границя міцності змінюється з 200,7 *кГ/мм*² до 186,5 *кГ/мм*²; зміна границі міцності складає 7,1%.

Таблиця 4

Хімічний склад (див. табл. 3)	Діаметр (в *мм*)	Початкова довжина (в *мм*)	*T*	Товщина покриття (в *мм*)	Розривна сила (в *кГ*)	Гранична міцність (в *кГ/мм*²)
	1,61	100	25,7	0,01	298	146,8
	1,61	100	25,7	0,01	296	145,31
	1,61	100	25,7	0,01	298	146,8
	1,61	100	25,7	0,01	298	146,8
	1,61	100	25,7	0,01	299	147,29
	1,61	100	25,7	0,01	297	146,3
					Середня . . .	146,63

Піддаючи випробуванню дріт одного і того ж матеріалу і структури, але різних діаметрів, ми повинні були б дістати певну закономірність, а саме: чим менший діаметр дроту, тим менша втрата міцності при гарячому або холодному оцинкуванні. Це пояснюється тим, що маса досліджуваного дроту зменшується пропорціонально квадрату радіуса поперечного перерізу (довжина одна і та ж), а бокова поверхня знаходиться в лінійній залежності від цього радіуса.

В тонких дротах роль вільної поверхневої енергії стає більш помітною і більш ефективною. Ознаки цієї закономірності ми спостерігаємо в дротах діаметром 1,60 *мм*; 0,5 *мм* і 0,25 *мм*, де втрата міцності виражена відповідно такими числами: 10,76%; 7,1% і 4,32%. Вказані дроти не були піддані наступному волочінню.

Значне зниження міцності при гарячому покритті може діятись почасти за рахунок зміни внутрішньої структури металу. Дрібнокристалічна структура в цьому випадку перетворюється в крупнокристалічну, більш міцна — в менш міцну, під впливом температурного фактора. Крім цього, в «долі» міцності вказаних дротів відіграє важливу роль і стан поверхневого шару металу, засіяного макро- і мікротріщинами. При гарячому покритті знімається внутрішня напруга — результат пластичних деформацій. Внутрішня ж напруга підвищує міцність зразка.

Розтягуючи вказані дроти при випробуванні, ми їх пластично деформуємо, повертаємо їм частково зняті напруги, а значить, зміцнюємо їх. Крім цього, покритий тонким шаром цинку гарячим способом дріт може бути підданий волочінню, це також дає сприятливі умови для зміцнення.

Але чим пояснити більш різке падіння міцності при гарячому покритті порівняно з холодним? Тут мають місце два фактора. Перший — менш значний, це товщина дроту. З зменшенням діаметра дроту втрата міцності повинна спадати, як ми це вже відмітили; другий, більш істотний фактор, — це ступінь спайності покриваючого матеріалу з основною підкладкою. При гарячому оцинкуванні стального дроту атоми цинку проникають в поверховий шар підкладки, утворюючи тоненький шар твердого розчину: залізо—цинк (FeZn). При холодному покритті — це явище не має місця. В першому випадку поруч з адсорбцією виникає і абсорбція. В другому — процес обмежений тільки адсорбцією.

Ми привели цифрові дані для дротів діаметром 1,6 *мм*, 0,5 *мм* і 0,25 *мм*, покритих цинком гарячим способом без наступного їх волочіння, що, звичайно, різко відбилось на величині їх міцності. Це помітно з того, що одним розтягом не можна було відновити всіх механічних властивостей зразка, якими він характеризувався до занурення в гарячу ванну.

Цинк, навіть чистий, набуває в ванні крупнозернисту, досить крихку, структуру. Піддаючи покритий цинком дріт послідовному волочінню, ми, звичайно, не помітили б таких різких змін у величині міцності (що в заводській практиці і спостерігається), тому що крупнозерниста структура цинку і FeZn перетворилася б в більш стійку дрібнозернисту. Крім цього, виниклі при волочінні внутрішні напруги значно підвищили б міцність дроту. В результаті ми мали б незначну зміну міцності, одержаної за рахунок тільки зміни питомої поверхневої енергії на границі Zn і Fe.

Роль поверхневого шару особливо різко виступає в міцності дуже тонких дротинок і ниток (кварцова, скляна нитка). Якщо поступово зменшувати діаметр дротинок або ниток, то утворені об'єми будуть змінюватись пропорціонально квадратам радіусів (довжина дротинок при цьому не змінюється), тобто:

$$V_1 : V_2 : V_3 = R_1^2 : R_2^2 : R_3^3, \qquad (1)$$

а бокові поверхні виявляються в лінійній залежності від радіусів:

$$S_1 : S_2 : S_3 = R_1 : R_2 : R_3. \qquad (2)$$

Якщо відношення об'ємів дротинок залежать від відношення квадратів радіусів, то в такій же залежності знаходяться і маси їх. Відношення ж бокових поверхень цих дротинок залежить від відношення радіусів. Тому в досліджуваних зразках малих діаметрів на перший план виступають уже поверхневі явища, — вільна поверхнева енергія даної речовини, яка помітно впливає на величину міцності. Прийнято думати [2], що різке підвищення міцності, спостережуване, наприклад, у дуже тонких кварцових нитках, залежить виключно від *зменшення внутрішніх і поверхневих тріщин*. Безсумнівно, вказаний фактор відіграє важливу, але не виключну роль.

Різке збільшення міцності ми спостерігали, коли один метал, менш міцний (мідь), покривали тонким шаром другого металу, більш міцного (нікель). Дані наших спостережень подані в табл. 5 і 6.

Таблиця 5

№ пластинок	Початкова довжина (в *мм*)	Товщина (в *мм*)	Ширина (в *мм*)	Покриття	Товщина покриття (в *мм*)	Розривне зусилля (в *кГ*)	Гранична міцність (в $кГ/мм^2$)	Зміна міцності	Температура (в °С)
1	100	0,07	7	непокр.	—	5,92	11,34	4,42	25
2	100	0,07	7	покрит.	0,001	7,97	16,26		25
3	100	0,075	8	непокр.	—	8,17	13,61	2,00	25
4	100	0,075	8	покрит.	0,001	9,57	15,61		25
5	100	0,07	7	непокр.	—	5,47	11,16	2,35	25
6	100	0,07	7	покрит.	0,001	6,62	13,51		25
7	100	0,07	8	непокр.	—	7,87	14,05	3,30	25
8	100	0,07	8	покрит.	0,001	9,72	17,35		25
9	100	0,075	8	непокр.	—	6,57	10,95	3,08	25
10	100	0,075	8	покрит.	0,001	8,42	14,03		25

Тому що міцність металу залежить від об'єму і поверхневої вільної енергії, то різке збільшення міцності можна спостерігати тільки в тому випадку, коли величина об'єму випробовуючого матеріалу зведена до допустимого мінімуму, а бокова поверхня зразка придбала максимальне значення.

Для випробування бралась електролітична мідь чистоти 99,9%. Остання плавилась у високовакуумній печі. Густина злитків перевірялась рентгенографічно, після чого зразки піддавались прокоченню для одержання тонких пластинок. Мідні стрічки відпалювались у вакуумній печі, одна частина покривалась електролітично тонким шаром нікелю, а друга половина залишалась непокритою. Після цього як покриті, так і непокриті мідні стрічки піддавались розтягуванню до розривів за допомогою машини [3]. Дані занесені в табл. 5.

Наступне прокочення покритих і непокритих стрічок давали наклеп і здрібнювали зерно як у міді, так і у нікелю. Після цієї операції товщина нікельового покриття доводилась до одного мікрона. Так приготовлені стрічки випробувались на розривання на машині. Дані випробування подані в табл. 6.

Таблиця 6

№ пластинок	Початкова довжина (в *мм*)	Товщина (в *мм*)	Ширина (в *мм*)	Покриття	Товщина покриття (в *мм*)	Розривне зусилля (в *кГ*)	Гранична міцність (в *кГ/мм*^{2})	Зміна міцності	Температура (в °C)
11	100	0,08	8	непокр.	—	11,32	17,68	4,92	25
12	100	0,08	8	покрит.	0,001	14,47	22,60		25
13	100	0,08	8	непокр.	—	10,72	16,75	6,01	25
14	100	0,08	8	покрит.	0,001	14,57	22,76		25
15	100	0,075	8	непокр.	—	10,67	17,78	6,58	25
16	100	0,075	8	покрит.	0,001	14,62	24,36		25
17	100	0,07	7,5	непокр.	—	9,57	18,40	5,39	25
18	100	0,07	7,5	покрит.	0,001	12,370	23,79		25
19	100	0,06	7,5	непокр.	—	6,120	13,60	8,55	25
20	100	0,06	7,5	покрит.	0,001	9,97	22,15		25

Аналізуючи дані табл. 5 і 6, ми помічаємо таке: у всіх випадках тонкий шар нікелю, який покриває мідну стрічку, значно збільшує міцність останньої. По-друге, чим менший стає об'ємний фактор, тим сильніше починає проявляти себе поверхневий. Так змінюється міцність у пластинок, позначених цифрами 11,12 на 4,92 *кГ/мм*^{2}, що має об'єм 0,064 *см*^{3}, в той час, як у пластинок (19, 20) об'єму 0,045 *см*^{2} зміна міцності вже досягає 8,55 *кГ/мм*^{2}. Правда, незначна кількість спостережуваних нами випадків не дає нам права встановити яку-небудь закономірність, зв'язану з об'ємною і поверхневою вільною енергією, але тенденцію до вказаного явища ми вже помічаємо. Тут потрібно вказати на можливість за допомогою покриття одного металу іншим, визначити питому вільну енергію покриваючого металу, в даному випадку металу нікелю. Для цієї мети покриваючий шар нікелю необхідно зробити настільки тонким, щоб по можливості виключити вплив на загальний енергетичний баланс об'ємну вільну енергію або у всякому випадку звести енергію до мінімуму. Досягнувши цього, ми будемо мати справу тільки з вільною поверхневою енергією нікелю (нікель — повітря), величину якої вже можна визначити, але про це іде мова в наступній роботі.

Висновки

1. Нами низкою спроб твердо встановлено, що покриття одного металу тоненьким шаром іншого вносить значні зміни (4—10%) у міцність випробовуваного зразка.

2. Міцність, як правило, різко зростає тоді, коли той метал, що їм покривають, має значно більший модуль Юнга, ніж той,

що приймає на себе це покриття і навпаки, міцність зменшується, якщо модуль покриваючого металу менший.

3. Величина зміни міцності залежить від способу покриття: гаряче, наприклад, оцинкування в значно більшій мірі, ніж гальванічне, зменшує границю міцності.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Ф. Йоффе, Физика кристаллов, 1929.
2. Н. К. Адам, Физика и химия поверхностей, Госиздат, М., 1947.
3. Е. М. Скублевський і Г. Ф. Калугін, Машина для випробовування металів на міцність. Наукові записки СДПІ, вип. 2, 1957.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

Є. М. СКУБЛЕВСЬКИЙ, професор і *Г. Ф. КАЛУГІН*

МАШИНА ДЛЯ ВИПРОБОВУВАННЯ МЕТАЛІВ НА МІЦНІСТЬ

Сучасні машини, призначені для випробовування різних матеріалів на міцність, яка визначається навантаженням в сотні і тисячі кілограмів, непристосовані для виміру малих напруг.

Для дослідження впливу тоненьких поверхневих шарів на міцність металів, де доводиться вимірювати малі зусилля, нами була сконструйована машина, яка дозволяє контролювати навантаження і розтягнення зразка двома способами: за допомогою динамометра, механічного та електричного запису. Порівнюючи дані цих двох вимірів однієї і тієї ж величини, можна встановити зміну навантаження на випробувані зразки в декілька грамів, а точність експерименту довести до десятих часток процента.

Загальний вигляд машини дає рис. 1. Головною частиною її є станина *А*, на якій змонтовано два циліндри *В* і *С*, механізм, що передає навантаження, а також обладнання механічного і електричного запису. В нижній основі циліндра *В* зроблено отвір, в якому переміщується шток *2*, що має проріз і нарізку для гайки і дискової контргайки.

До кінця штока за допомогою ізолятора *4* приєднується спеціальний затискач *5*. Щічки його мають гофровану поверхню, що забезпечує міцне закріплення зразка. Одна частина щічки є нерухома, друга легко пересувається за допомогою гвинта *6*.

Нижній циліндр *С* має аналогічну будову з верхнім, але тут пружина служить, до деякої міри, доповненням до динамометра, вона під час руху гвинта повертає шток у вихідне положення. Верхній кінець штока циліндра *С* з'єднується з затискачем *7*, до якого монтується передача механічного запису (рис. 2). Нижній кінець штока шарнірно сполучається з редуктором і мотором, який перетворює обертальний рух в поступальний і забезпечує повільну зміну навантаження на зразок *9*. В нижній частині установки прикріплена горизонтальна шкала, при допомозі якої, знаючи хід гвинта, можна визначити величину деформації досліджуваного зразка.

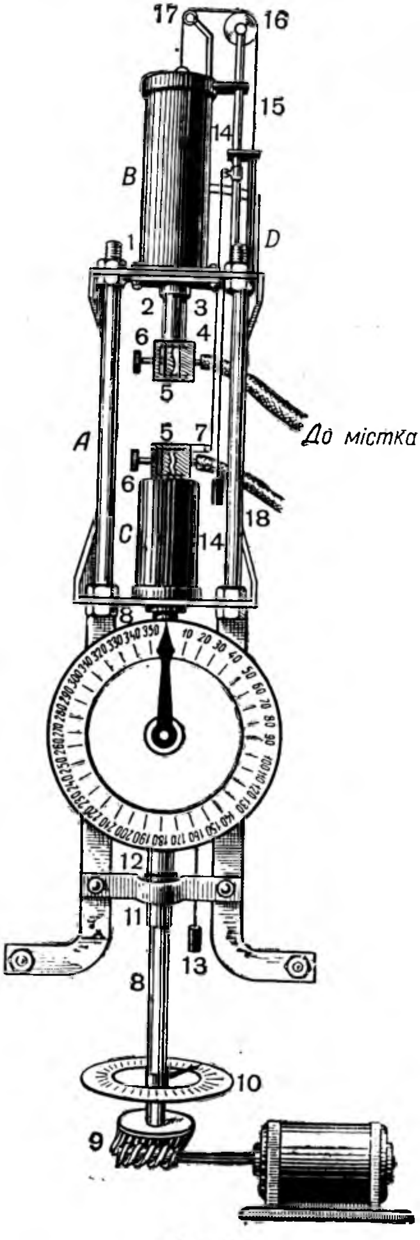


Рис. 1.

Роботу, що витрачається на розтягнення та руйнування тоненьких металевих пластинок, визначаємо за допомогою діаграм механічного і електричного запису.

Тут слід відмітити, що більш точну картину процесів, пов'язаних з розтягненням і руйнуванням зразків, дає електричний запис, оснований на фіксації зміни опору металевих пластинок у

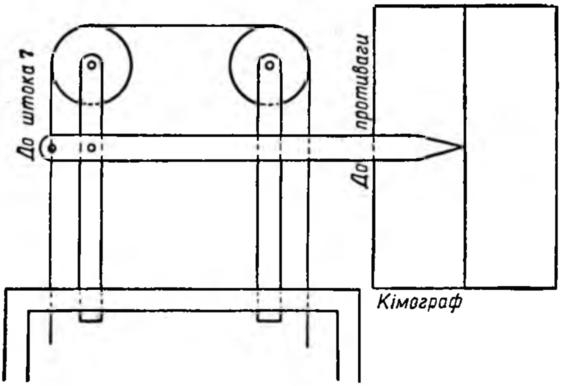


Рис. 2.

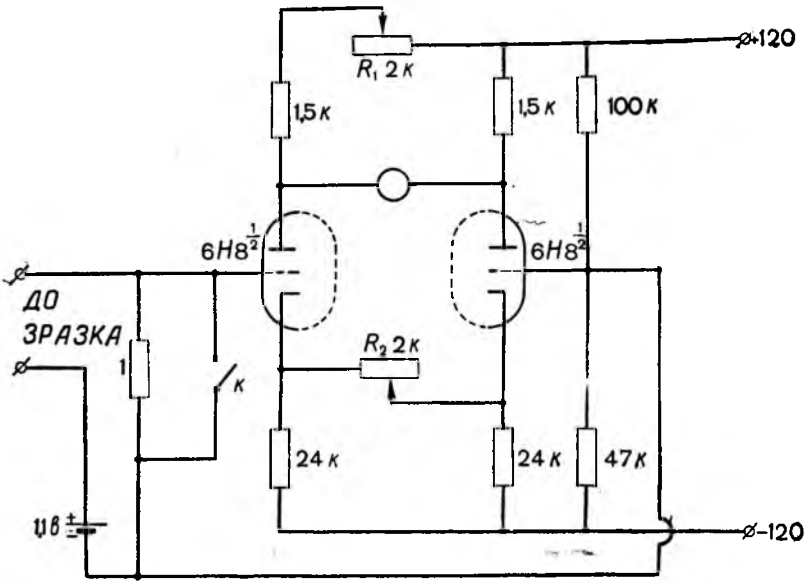


Рис. 3.

залежності від деформації. Зміна ж опору ΔR провідника підлягає приблизно такому закону:

$$\Delta R \cong \frac{R}{E} \Delta P, \tag{A}$$

де ΔP — зміна навантаження, R — початковий опір, а E — модуль пружності. Формула (А) дає змогу знайти P, коли R і E відомі, а також E, коли R і ΔP відомі.

В багатьох випадках фізики твердої речовини дуже важливо знати величину E і її залежність від ступеня пластичної деформації; рівняння перше задовольняє цим вимогам.

Електричний запис здійснюється за допомогою містка (рис. 3) і оптичного кімографа [1].

Місток рівноплечий. Опір двох плеч однаковий і незмінний, а опір третього плеча міняється і завжди зрівнюється з опором пластинки датчика.

ЛІТЕРАТУРА

1. Є. М. Скублевський, ЖТФ, 23, VII, 1937.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

П. П. КІРИЧОК

ПРОСТОРОВА ФОРМА ЕВТЕКТИЧНИХ КОЛОНІЙ БІЛОГО ЧАВУНУ

Кристалізація технічно важливих високовуглецевих залізних розплавів закінчується евтектичним розпадом рідкої фази. В залежності від швидкості охолодження і ступеня переохолодження одержуємо різні продукти розпаду — сірі, половинчаті, білі чавуни.

При евтектичному перетворенні, яке закінчується затвердінням білого чавуну, рідка фаза розпадається на аустеніт і цементит. Зовнішня форма агрегатів і їх будова, що утворилися в процесі кристалізації, буде різноманітна в залежності від ступеня переохолодження, при якому відбувався евтектичний розпад.

На основі уявлень А. Бочвара [1] про механізм і кінетику евтектичних перетворень в органічних речовинах, К. Бунін і С. Рапопорт [2], Я. Гречний [3], К. Бунін, Я. Гречний, П. Кірічок [4] розглянули деякі особливості утворення ледебуритних колоній в білому чавуні.

В даній роботі розглядається просторова форма евтектичних колоній пластинчатої форми білого чавуну.

Евтектичний розпад металічних розплавів

Відомо, що при повільному охолодженні евтектичного металічного розплаву до евтектичної температури появляються кристали обох фаз.

Кристали першої фази *A* в процесі росту будуть обмежені областю, збагаченою речовиною другої фази. Навколо кристала *B* другої фази утвориться область, збагачена речовиною першої фази. Якщо процес охолодження йде повільно, то дифузія вирівнює концентрацію розплаву навколо кристалів *A* та *B*, і розплав залишається в середньому евтектичним. Кристали *A* і *B* ростуть до великих розмірів, і структура буде мати вид грубого конгломерату кристалів *A* і *B*. Евтектичної структури при повільному охолодженні ми не одержуємо.

При більш швидкому охолодженні розплав більше переохолоджується і зароджується більше число кристалів обох фаз, розміри яких будуть менші в порівнянні з попередніми кристалами.

Дифузія при швидкому охолодженні не встигає вирівняти концентрацію розплаву навколо тих кристалів, які зародились, ми одержуємо евтектичну структуру. Група кристалів, які виросли на базі первинного кристала *A*, чи послідовно один за другим, називається евтектичною колонією. «Утворення евтектики проходить

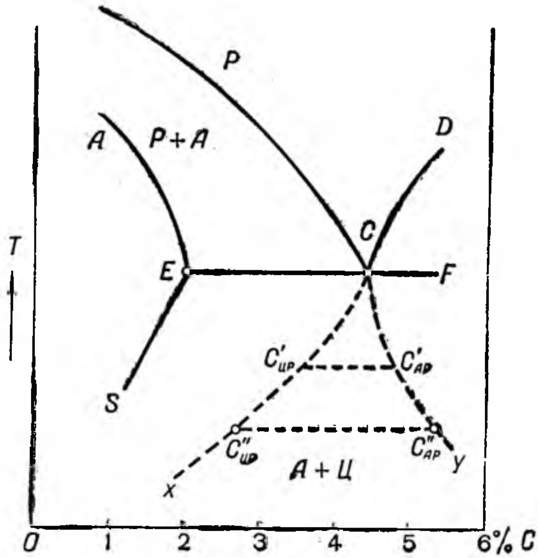


Рис. 1.

шляхом дифузійних процесів розділення однорідного евтектичного розплаву на суміш кристалів двох типів» [1].

При великому переохолодженні евтектичного розплаву, коли середня енергія теплових коливань атомів чи іонів в гратці недостатня для їх переходу із нерівноважного положення в рівноважне, гратка первинного кристала першої фази деформується. Внаслідок деформації гратки кристала виникають напруги першого роду, які розколюють кристали. Друга фаза займає проміжки в міжосьовому просторі першої фази, тобто друга фаза вимушено кристалізується в міжосьових проміжках першої. Тому, що кристали другої фази ростуть в міжосьових проміжках першої фази, то вони не можуть утворити великих кристалічних одиниць.

Отже, колонія евтектики є зерно першої фази з дрібним включенням другої. «Перша фаза має неперервний зв'язок між своїми дільницями і являє собою нібито суцільну масу, в яку вкраплені окремі кристали другої фази, тобто перша фаза є тією фазою, по зерну якої будується евтектична колонія» [5].

Ясно, що лінійна швидкість кристалізації першої фази більша лінійної швидкості кристалізації другої фази. Отже, евтектична колонія при великих переохолодженнях утворюється як наслідок росту розщепленого кристала одної фази з вимушеною кристалізацією другої фази в проміжках першої фази.

При великих переохолодженнях характер структури, що одержуємо в процесі евтектичного твердження, стає точковий — ледебурит.

Колонії ледебуриту утворюються при значному переохолодженні чавуну, яке обмежує дифузію вуглецю в рідкій фазі

Рис. 2.

Рис. 3.

і збільшується при цьому ймовірність утворення в ній нових зародків аустеніту і цементиту внаслідок зменшення роботи утворення зародків критичного розміру. Тому рідина, яка дотикається з цементитом і виділяє його, зможе мати «рівноважну» концентрацію $C''_{цр}$ (рис. 1). Тоді втрачає здатність кристалізуватися цементит.

В той же час рідина дуже «пересичена» залізом, і в ній на поверхні цементиту почне кристалізуватися аустеніт. Подібна картина утвориться на фронті кристалізації аустеніту. Все це приведе до взаємного проростання однієї фази другою і утвориться евтектична колонія ледебуриту. При прискореному охолодженні білого чавуну колонії мають пластинчату форму (рис. 2). В умовах дальшого прискорення переохолодження структура білого чавуну має вид (рис. 3, 4, 5, 6, 7) і колонії мають перисту форму.

При великих скоростях охолодження первинною формою цементиту є пластинка. Викривлені пластинки цементиту утворилися внаслідок розщеплення первинної пластинки, в процесі її росту.

Зерна ледебуриту мають пластинчату, листоподібну і перисту форму (див. рис. 5, 6, 7).

Рис. 4.

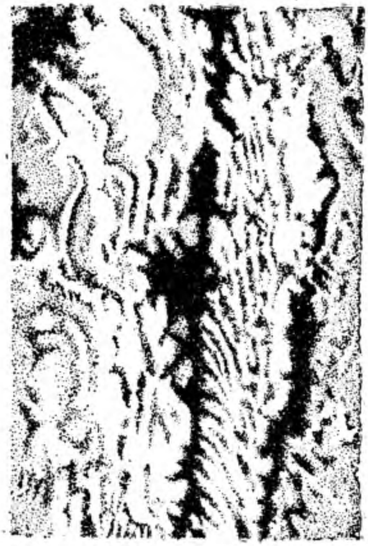


Рис. 5.

Рис. 6.

Рис. 7.

Методика експерименту

Будова і форма евтектичних колоній вивчалась на зразках білого чавуну з 4,37% С. Зразки виготовлені сплавленням в тамановій печі армко залізо з графітом.

Розглядаючи зразок білого чавуну на метал-мікроскопі, ми досліджуємо форму і розміщення колонії. Зображення колонії проектуємо на матове скло і зарисовуємо її. Зшліфовуємо шар товщиною 0,1 *мм* і після полірування протравляємо зразок 5-процентним розчином HNO_3. Знову розглядаємо на мікроскопі зразок і зображення колонії зарисовуємо таким же методом, як раніше.

Мікроскопічне дослідження евтектичних колоній, з застосуванням послідовного знімання шарів шляхом зшліфування, дало можливість прослідити за зміною розмірів і будови евтектичних колоній білого чавуну.

Наслідки дослідження:

На фіг. 1 показана пластинчата колонія, яка відповідає початковій площині шліфа (рис. 8).

Довжина колонії —0,9 *мм*.
Ширина колонії —0,25—0,20 *мм*.
Пластинка цементу має ширину —0,025 *мм*.

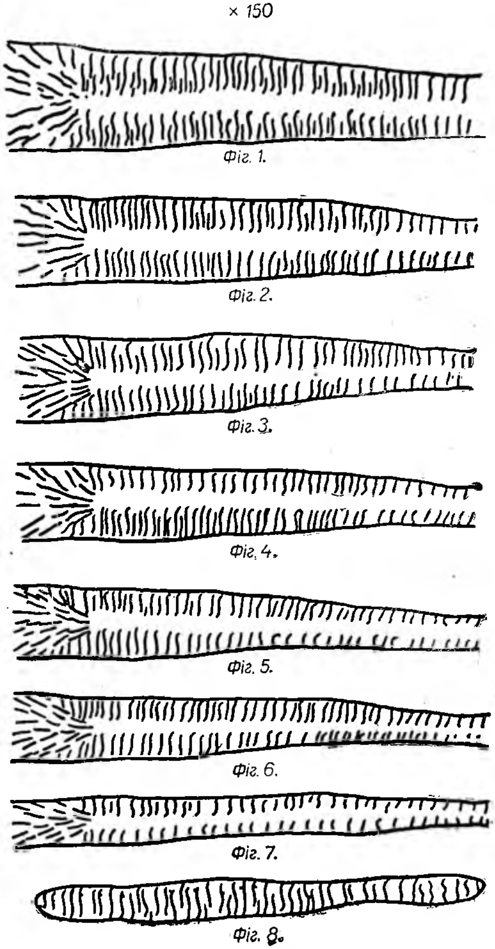


Рис. 8.

Фіг. 2 зображає колонію після зшліфування першого шару товщиною в 0,1 *мм*, ширина колонії — 0,20—0,1 *мм*.

Ширина пластинки цементиту — 0,020 *мм*.

Фіг. 3 відповідає колонії після знімання другого шару. Зменшилась ширина пластинки цементиту і колонії. Змінився розмір віялоподібного розгалуження.

На фіг. 4 зображена колонія після зшліфування третього шару.

Ширина пластинки цементиту зменшилась. Змінилась ширина віялоподібного розгалуження.

Фіг. 5 показує колонію після знімання четвертого шару, ширина колонії — 0,12—0,07 *мм*.

Пластинка цементиту має ширину 0,01 *мм*.

Ширина віялоподібного розгалуження зменшується.

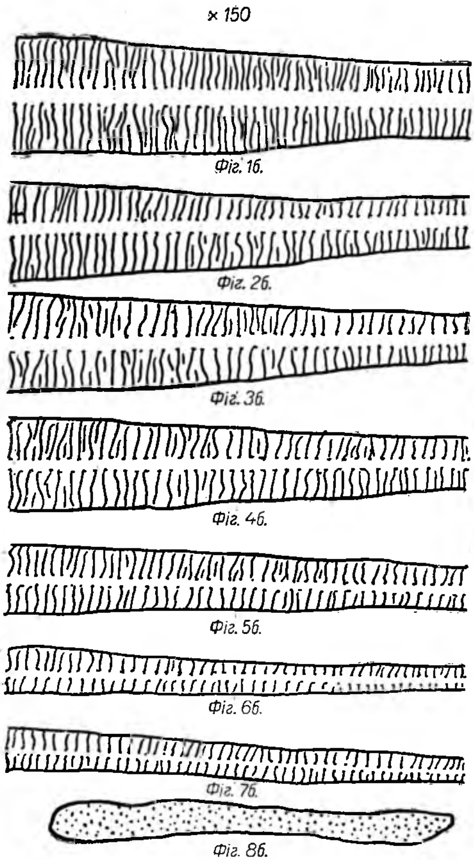


Рис. 9.

На фіг. 6 зображена колонія після зшліфування п'ятого шару, різко змінилась ширина колонії та віялоподібного розгалуження.

Фіг. 7 відповідає колонії, яка зарисована після знімання шостого шару.

Ширина колонії — 0,08 — 0,05 *мм*.

На фіг. 8 зображена площина шліфа після знімання сьомого шару. На цій фігурі відсутня досліджуюча колонія, а з'явилася нова колонія. Колонія *Б* (рис. 9). На фіг. 1, *б* зарисована колонія, що відповідає початковій площині шліфа.

Довжина колоній . . . . 0,95 *мм*.
Ширина колоній . . . . 0,15—0,08 *мм*.
Пластинка цементиту має ширину . . 0,025 *мм*.

Аустеніт проростає перпендикулярно до пластинки цементиту.

Фіг. 2, *б* показує колонію після знімання першого шару товщиною 0,1 *мм*.

Ширина колонії . . . . 0,13—0,07 *мм*.
Ширина пластинки цементиту . . 0,020 *мм*.

На фіг. 3, *б* зображена колонія після знімання другого шару. Колонія має ширину в таких границях: 0,12—0,015 *мм*.

Змінився розмір пластинки цементиту.

На фіг. 4, *б* показана колонія після зшліфування третього шару товщиною 0,1 *мм*.

Ширина колонії . . . . 0,1—0,06 *мм*.
Ширина пластинки цементиту . . 0,015 *мм*.

Фіг 5, *б* відповідає колонії після знімання четвертого шару.

Колонія має ширину порядку . . 0,09—0,06 *мм*.
Ширина пластинки цементиту . . 0,01 *мм*.

На фіг. 6, *б* показана колонія після знімання п'ятого шару. Ширина колонії — 0,08 — 0,05 *мм*.

Пластинка цементиту змінила свою ширину.

Фіг. 7, *б* зображає колонію після зшліфування шостого шару.

Ширина колонії . . . . . 0,07—0,5 *мм*.
Пластинка цементиту має ширину . . 0,005 *мм*.

На фіг. 8, *б* зарисована площина шліфа після знімання сьомого шару. На цій фігурі відсутня досліджуюча колонія, а з'явилася нова. Характер зміни розмірів колоній пластинчатої форми для інших зразків аналогічний прослідкованому вище.

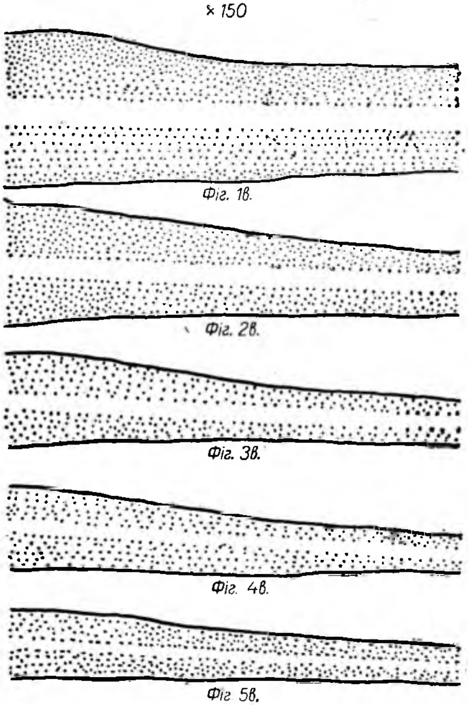


Рис. 10.

На рис. 10, 11 показані колонії різних форм, які вивчалися одночасно з колоніями типу *А* і *Б*, методом послідовного знімання шарів шліфа.

Фіг. 1, *в*, *г* відповідає початковій площині шліфа (рис. 10, 11).

Розміри колонії:

Точкова колонія (*в*) має ширину . . . 0,45—0,20 *мм*.
Пластинчата колонія (*г*) має ширину . 0,35—0,3 *мм*.
Пластинка цементиту має ширину:
для колонії (*в*) . . . . 0,04 *мм*.
» » (*г*) . . . . 0,06 *мм*.

Аустеніт в колонії (*г*) проріс перпендикулярно до первинної пластинки цементиту, а в колонії (*в*) паралельно.

На фіг. 2, *г*, *в* зображена колонія після знімання першого шару товщиною 0,1 *мм*.

Колонія (*в*) має ширину . . . . . 0,40—0,20 *мм.*
» (*г*) » » . . . . . 0,19—0,09 *мм.*

Ширина пластинки цементиту в колонії (*в*) змінилась, а для (*г*) не змінилась.

Фіг. 3 зображує колонії після зшліфування другого шару.

Колонія (*в*) має ширину . . . . . 0,38—0,19 *мм.*
» (*г*) » » . . . . . 0,1—0,085 *мм.*

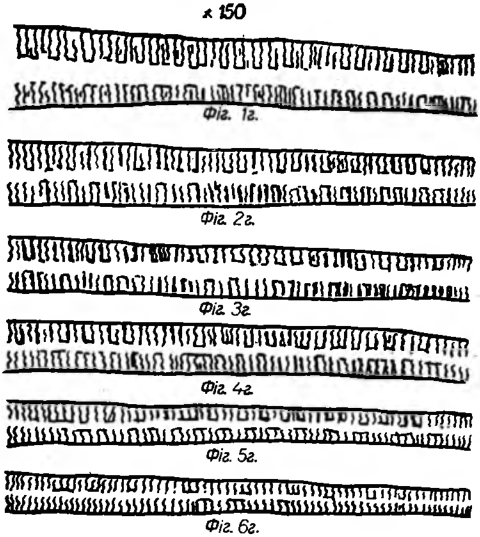


Рис. 11.

Ширина пластинки первинного цементиту для колонії (*в*) зменшується.

Фіг. 4 показує колонії після знімання третього шару.

Розміри колонії (*г*) і (*в*) зменшились.
Пластинка цементиту для колонії (*г*) не змінилась.

На фіг. 5 зображені колонії після зшліфування четвертого шару, різко зменшились розміри обох колоній.

Фіг. 6 відповідає колоніям після знімання п'ятого шару. Колонія (*г*) зникає; колонія (*в*) зникає після знімання четвертого шару.

Обговорення результату

Розглядаючи серію рисунків, ми бачимо, що при поступовому зніманні шарів, розміри колоній і ширина пластинки цементиту, навколо якої утворилася колонія пластинчатої форми з віялоподібним розгалуженням, змінюється.

При зніманні 6—7 шарів, товщиною 0,1 *мм*, колонія зникає. Пластинка цементиту зникає раніше, ніж колонія.

З рисунків даної серії видно, що до пластинки первинного цементиту перпендикулярно проростає в формі голок евтектичний аустеніт і цементит у вигляді витягнутих пластинок.

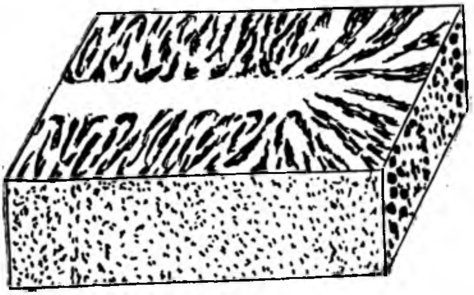


Рис. 12.

Отже, схему просторової будови евтектичної колонії можна давати так (рис. 12, 13, 14).

На основі мікроскопічних досліджень евтектичних колоній шляхом послідовного зшліфування встановлено, що структурною основою ледебуриту є пластинка цементиту, яка проростає евтектичним аустенітом.

Евтектичний аустеніт має переважно форму голок і росте перпендикулярно до пластинки первинного цементиту, утворюючи «сотову» структуру. На рис. 12, 13, 14 видно зерна ледебуриту (точкового чи голочного), в залежності від напряму зрізу площини шліфа. На основі сучасних уявлень про евтектоїдний розпад твердих розчинів [6] утворення «сотового» ледебуриту можна пояснити так. При охолодженні в рідині зароджується первинна пластинка цементиту.

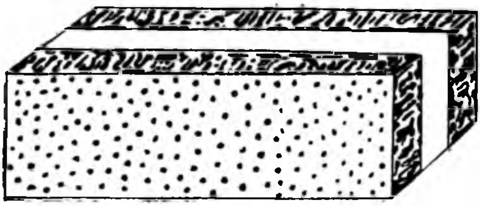


Рис. 13.

Внаслідок росту пластинки цементиту рідина обідняється вуглецем, що характеризується лінією CX (див. рис. 1). Якщо лінія $C''C''$ відповідає досягнутому переохолодженню, то концентрація рідини, яка дотикається з цементитом, стане близько до $C''_{цр}$, пластинка цементиту перестає рости. Рідина сильно «пересичена» залізом і на поверхні цементитної пластинки зароджується аустеніт.

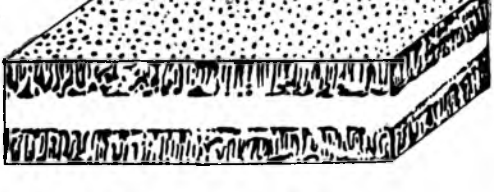


Рис. 14.

Поява зародка аустеніта і наступна його кристалізація збагачує рідину навколо зародків аустеніту вуглецем, що в свою чергу забезпечує кристалізацію цементиту. Поява сусідніх дисків аустеніту буде можлива лише на деяких віддалях від початкового зародка.

Отже, в деякій точці дотикаючого шару рідини з первинним кристалом цементиту утворюється зародок аустеніту.

Перший шар рідини, який дотикається з зародком аустеніту, обідняється залізом і збагачується вуглецем.

В деякій області починає кристалізуватися цементит. Як тільки цементит почав кристалізуватися в першій дільниці шару, рідина сусіднього шару обідняється вуглецем і в сусідній дільниці виникає зародок аустеніту. Дільниця розплаву, яка дотикається з зародком аустеніту, збагачується вуглецем: тут кристалізується цементит і т. д.

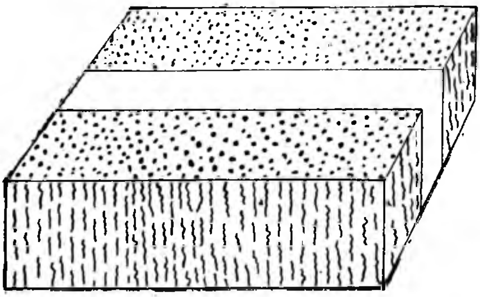


Рис. 15.

Віялоподібне розгалуження пояснюється тим, що пластинка первинного цементиту на кінці має сфероподібну форму. Аустеніт росте по нормалі до поверхні первинної пластинки, утворюючи віялоподібне розгалуження.

Отже, навколо кожного первинного зародка аустеніту, який утворився на поверхні пластинки цементиту, буде рости ціла група певним чином орієнтованих дисків аустеніту до того часу, поки ці групи не покриють всієї поверхні цементитної пластинки. Утворення цих аустенітних груп є причиною своєрідного узору ледебуриту, який спостерігається на мікрознімках.

Утворення аустенітних дисків і одночасна кристалізація аустеніту та цементиту обумовлює у фронту кристалізації нерівномірний розподіл концентрації вуглецю з певною періодичністю. Диски аустеніту в процесі росту приймають форму циліндриків, які перпендикулярні до первинної пластинки цементиту. Одночасно з аустенітом росте і цементит, який є провідною фазою.

Вивчаючи другу серію рисунків, ми встановили, що ширина колоній і первинної пластинки цементиту зменшується в процесі зшліфування зразка.

При зніманні 6—7-ми шарів зникає пластинка цементиту, а потім і колонія. Аустеніт росте перпендикулярно до пластинки цементиту. Схематично просторову будову евтектичних колоній можна зобразити так: (див. рис. 13, 14).

Аналогічну схему просторової будови колонії одержали для пластинчатих колоній, але з іншими розмірами.

Розглядаючи 4-ту серію рисунків (див. рис. 10), де зображено паралельно розміщені колонії різної форми, ми бачимо, що при послідовному зніманні шарів, розміри колоній (*в*) змінюються.

Ширина колонії *В* змінюється нерівномірно. Розміри точок на периферії колонії (*в*) більші, ніж коло пластинки цементиту.

Пластинка цементиту не змінює своїх розмірів. Колонія (*в*) зникає раніше, ніж колонія (*г*). Схему просторової будови колонії (*в*) можна уявити так, як показано на рис. 15.

На схемі кристали аустеніту розміщені паралельно пластинці цементиту.

Така схема просторової будови колонії не відповідає загальній теорії кристалізації.

Невідповідність схеми просторової будови колонії теорії можна пояснити тим, що колонія (*в*) одержала такий вигляд внаслідок перерізу пластинчатої колонії під деяким кутом до площини шліфа.

Висновки

1. Пластинчаті колонії ледебуриту, які виникають при прискореному переохолодженні розплаву, мають спочатку «сотову» структуру (див. рис. 13, 14).

Основою пластинчатої колонії ледебуриту є первинна пластинка цементиту, пронизана паралельними нитками аустеніту.

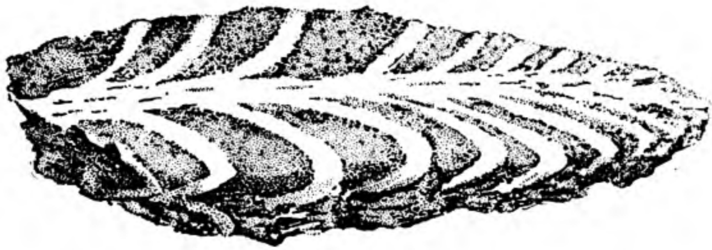


Рис. 16.

Така просторова форма колонії обумовлена одночасною кристалізацією аустеніту і цементиту. Безперервна кристалізація аустеніту і цементиту забезпечується дифузійним переміщенням вуглецю в рідкій фазі вздовж фронту кристалізації, що зберігає рідину в контакті з аустенітом в стані «пересищення» залізом, а в контакті з цементитом — в стані «пересищення» вуглецем.

Отже, евтектична колонія білого чавуну є монокристал цементиту пластинчатої форми, що проріс аустенітом.

2. Колонії перистої форми утворюються внаслідок спотворення правильної «сотової» структури при різкому збільшенні переохолодження. Просторова форма перистої колонії має вид (рис. 16).

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Бочвар, Исследование механизма и кинетики кристаллизации сплавов евтектического типа, ОНТИ, 1935.
2. К. Бунин и С. Рапопорт, Металлург, 1938, 11.
3. Я. Гречный, Металлург, 1939, 10—11.
4. К. Бунин, Я. Гречный, П. Киричок, Труды ЦНИИ, Мин. Судпром., 1947, 2.
5. Кащенко, Металлург, 1932, 7.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

П. П. КІРИЧОК

ТЕРМОЕЛЕКТРОРУШІЙНА СИЛА МАЛОЛЕГІРОВАНИХ ЗАЛІЗНИХ СПЛАВІВ

При утворенні твердих розчинів характер міжатомних зв'язків змінюється. Міжатомні зв'язки в металах обумовлюються валентними електронами, а в перехідних металах також d-електронами, тому для вивчення зв'язків між атомами в металах вибирають такі фізичні характеристики твердого розчину, які визначаються поведінкою валентних і d-електронів. Такими характеристиками є опір, т. е. р. с., коерцитивна сила, намагнічування і т. д.

Для вивчення фізичних властивостей фериту ми взяли ряд твердих розчинів на основі заліза в їх неперервній області. Другими компонентами взяли Si, Cr, Mn, Ni, Co. Сплави виготовлені у високочастотній індукційній печі. Вихідними матеріалами були армко залізо і Mn, Cr, Ni, Si, Co.

Хімічний склад і маркіровка сплавів приведені в табл. 1 і 2.

Злитки, з яких виготовляли зразки, проходили таку термообробку: при температурі 100—150° С поміщали їх в піч і з швидкістю 300—350° С за годину нагрівали до 1100° С. При цій температурі злитки витримували 8 год., після чого охолоджували одночасно із піччю з швидкістю 100—150° за год. Після дифузійного відпалювання злитки проковувалися в прутки ($8 \times 8 \times 200$ *мм*).

Для вирівнювання структури гарячокованих зразків, вони після ковки відпалювалися вище A_3 на 50°С. Зразки нагрівалися з швидкістю 200° С за годину до температури $A_3 + 50°$ і при цій температурі витримувалися 30 хв. Потім температура печі рівномірно знижувалася до 400—500° С з швидкістю 100° С за годину. Після цього піч виключалась і зразки з піччю охолоджувалися до кімнатної температури. Досліджували т. е. р. с. в залежності від концентрації легірованих елементів на зразках, які пройшли таку термообробку. Величина т. е. р. с. визначалася по відношенню до мідного електрода за допомогою гальванометра М 21 $\left(\text{чутливість гальванометра по напрузі } 1{,}41 \cdot 10^{-5} \frac{\text{вольт}}{\text{мм}}\right)$. Т. е. р. с. вимірювали при $\Delta t = 84°С$.

Наслідки вимірювань зображались графічно (рис. 1). Із кривої залежності т. е. р. с. від концентрації легірованих елементів видно, що т. е. р. с. сплаву Fe—Cr зростає до 6% Cr, а потім починає зменшуватися. Т. е. р. с. сплаву залізо — марганець досягає максимального значення при 1% Mn, а потім при збільшенні Mn рівномірно зменшується і при 12% змінює знак.

Таблиця 1

Хімічний склад вихідних матеріалів (вагов. %)

Сплав	Метал	Fe	Si	Cr	Mn	Co	Ni	C	Al	P	S	Cu
								не більш				
Fe—Ni	Армко залізо	99,15	0,03	—	0,04	—	0,12	0,037	—	0,92	0,026	0,077
	Нікель	0,10	—	—	—	—	99,86	0,01	—	0,008	—	—
Fe—Mn	Армко залізо	99,65	0,03	—	0,04	—	0,12	0,037	—	0,02	0,026	0,077
	Марганець	0,1	—	—	99,85	—	—	0,01	0,01	0,01	0,02	—
Fe—Si	Армко залізо	99,65	0,03	—	0,04	—	0,12	0,037	—	0,02	0,026	0,077
	Кремній	—	99,86	—	—	—	—	0,01	—	—	0,01	—
Fe—Cr	Армко залізо	99,65	0,03	—	0,04	—	0,12	0,037	—	0,02	0,026	0,077
	Хром	0,073	—	99,93	—	—	—	0,008	—	0,003	—	—
Fe—Co	Армко залізо	99,65	0,03	—	—	0,03	—	0,04	—	0,02	0,02	—
	Кобальт	—	—	—	—	99,9	—	0,009	—	0,007	0,007	—

Т. е. р. с. сплаву залізо—нікель зменшується пропорціонально концентрації Ni і при 2,7% змінює знак. В сплаві Fe—Si т. е. р. с. при 0,7% Si змінює знак. Зміна т. е. р. с. маловуглецевих залізних сплавів в залежності від концентрації легірованих елементів обумовлена зміною роботи виходу електрона.

Робота виходу електрона визначається силами зв'язку, структурою поверхні [1] та ступенем розчинності легірованих елементів в залізі.

Характер зміни т. е. р. с. сплаву Fe—Cr можна з'ясувати так: Cr має однакову кристалічну гратку з α-Fe і мало спотворює її, слабо зміцнює ферит, структура сплаву відносно крупнозерниста, а тому робота виходу зменшується — т. е. р. с. сплаву Fe—Cr зростає.

Елементи Ni, Si, Mn, Co зміцнюють ферит більш інтенсивно, значно спотворюють кристалічну гратку, структура сплавів Fe—Ni, Fl—Mn стає дрібнокристалічною. Робота виходу зростає, а т. е. р. с. зменшується, при відповідній концентрації змінює знак.

На величину т. е. р. с. сплаву Fe—Si, можливо, в значній мірі впливає характер провідності і в меншій мірі структура сплаву.

Для твердих розчинів Fe—Si, Fe—Mn, Fe—Ni, Fe—Co, твердість яких збільшується із зростанням концентрації легірованих елементів, т. е. р. с. зменшується.

Таблиця 2

Маркіровки і вміст легірованих елементів в сплавах

Сплав	Маркіровка	Кількість елемента у вагових %
Fe—Ni	1— 1 1— 2 1— 4 1— 6 1— 8 1—10 1—12	1,12 2,01 4,03 5,95 8,00 10,21 12,21
Fe—Mn	2— 1 2— 2 2— 4 2— 6 2— 8 2—10 2—12	1,14 2,07 3,95 6,00 8,39 10,54 12,20
Fe—Si	3—1 3—2 3—4 3—6	1,05 2,10 3,96 6,01
Fe—Cr	5—1 5—2 5—4 5—6	1,01 2,00 4,2 5,97
Fe—Co	6—1 6—4 6—6 6—8	1,14 4,2 6,03 7,94

При утворенні твердих розчинів змінюється електронна концентрація. Зміцнення твердих розчинів обумовлено напрямленим відхилом атомів від положення рівноваги. Зміна т. е. р. с. із збільшенням процентного складу легірованого елемента вказує на зміну числа електронів провідності. При зменшенні числа електронів провідності ймовірний перехід зв'язку від типу металічного для чистого заліза до напрямлених зв'язків для сплавів. Перехід від одного типу зв'язку до другого обумовлений перерозподілом електронів по енергетичних рівнях із зміною концентрації електронів твердого розчину, що впливає на зміну т. е. р. с.

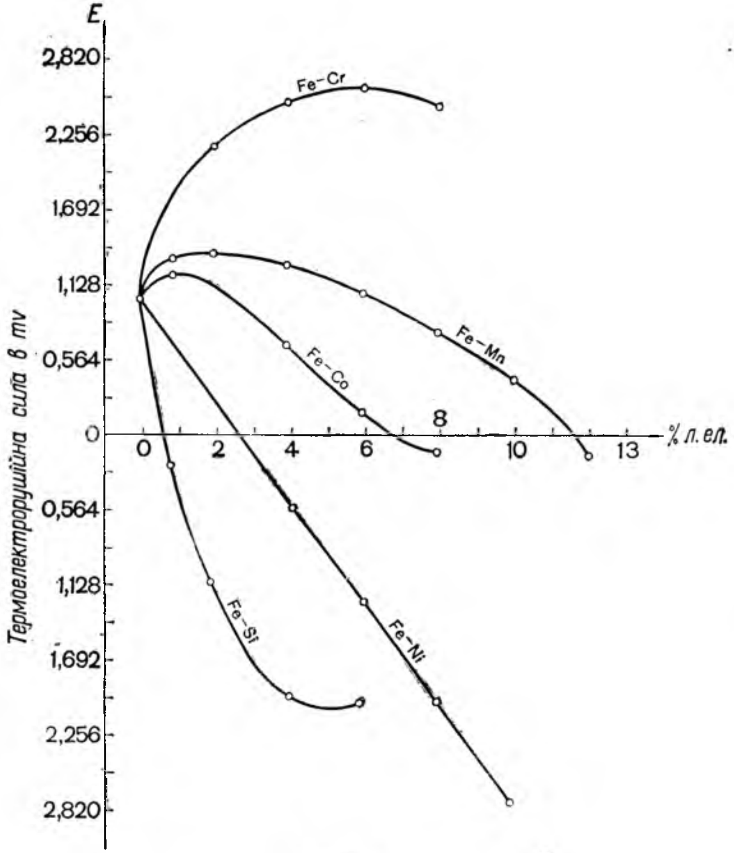


Рис. 1.

Висновки

1. Фізичні властивості металу визначаються електронами провідності [2], а тому зміна т. е. р. с. сплаву обумовлена зміною енергетичного спектра колективізованих електронів [3] і спотворенням кристалічної гратки (напруги III) α-Fe та структурою сплаву.

2. Т. е. р. с. може бути характеристикою зміцнення сплавів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ф. Зейтц, Современная теория твердого тела, 1949.
2. О. В. Вонсовкий, УФН, VIII, XI, вип. 3, 294.
3. Я. И. Френкель, Введение в теорию металлов, 1950

М. В. ВЕНЕДІКТОВ,
кандидат фізико-математичних наук

РОЗПОДІЛ ВОЛОГИ ТА ТЕМПЕРАТУРИ ВСЕРЕДИНІ КВАРЦОВОГО ПІСКУ В ПРОЦЕСІ СУШІННЯ В М'ЯКОМУ РЕЖИМІ

Повідомлення 1

Явища тепло- та масообміну всередині капілярно-пористого тіла в процесі сушіння в м'якому режимі можуть бути вивчені, якщо є можливість в кожний момент часу визначити розподіл вологи та температури всередині тіла, а також неперервно слідкувати за зміною цих розподілів.

Методика визначення температури всередині тіла достатньо розроблена: вона полягає в тому, що всередині зразка поміщуються кінці термопар, другі кінці їх виводяться назовні та занурюються в дюаровський посуд. Термопари за допомогою перемикача по черзі підключаються до чутливого гальванометра. Якщо відома температура в ряді точок зразка, а також відстань цих точок до поверхні, можна на графіку, сполучивши ці точки плавною кривою, зобразити розподіл температури для кожного моменту часу. Така методика використовувалася рядом авторів [1].

Визначення розподілу вологи всередині тіла пов'язане з рядом значних труднощів. Звичайно зразок, що висушують, розрізують за допомогою того чи іншого пристрою на шари визначеної товщини, вологість яких визначають методом висушування. Професор А. В. Ликов при вивченні законів руху вологи в капілярно-пористому тілі за капілярно-пористе тіло брав стопу письмового паперу, яка досить легко поділяється на окремі шари [2]. Егнер, вивчаючи рух вологи в дереві, розрізав зразок за допомогою спеціального ножа [3]. Кігльск і Куган шари кварцового піску розділяли рядом пропарафінованих сіток [4].

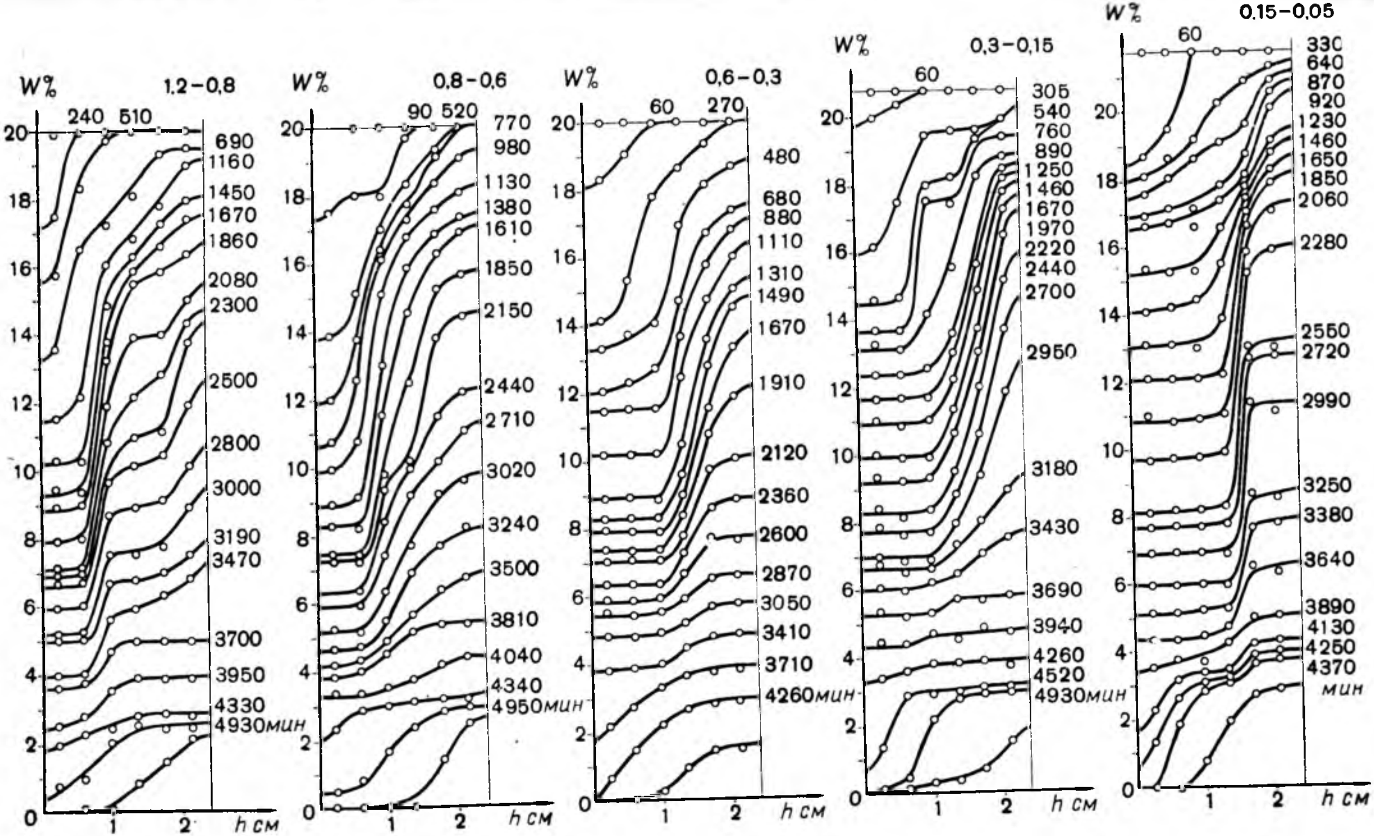
З нашої точки зору всі перелічені вище методи характеризуються спільними серйозними недоліками: по-перше, кожний аналіз поля вологостей веде до фактичного зниження всього зразка (для вивчення динаміки явища автори пропонують одночасно сушити декілька, по можливості однакових, зразків, що значно ускладнює дослід); по-друге, такі способи розрізання зразка на шари не запобігають перерозподілу вологи.

Ми запропонували методику визначення поля вологості для одного зразка на протязі всього процесу сушіння [5]. Цей метод заснований на визначенні залежності діелектричної проникливості кварцового піску від концентрації в ньому вологи. Точність запропонованої методики дорівнює 0,5% вологості, що достатньо близько до точності методів розрізування зразка на шари з наступним висушуванням їх. В випадку, коли в кожному місці тіла температура різна, ця методика повинна бути дещо ускладнена, через те що діелектрична проникливість вологого кварцового піску залежить від температури. Однак, як ми довели в нашій роботі [6], в випадку сушіння кварцового піску, в м'якому режимі можна з значною точністю застосовувати попередню методику.

В роботі визначалось поле вологостей та температур всередині кварцового піску п'яти фракцій (1,2—0,8; 0,8—0,6; 0,6—0,3; 0,3—0,15; 0,15—0,05 *мм*). Сушіння кварцового піску відбувалось в спеціальній сушильній установці. Параметри сушіння були такими: температура повітря — 28°C та підтримувалась з точністю $\pm$ 0,5°C, вологість повітря досягала 80% і підтримувалась з точністю $\pm$ 8%, потоку повітря при всіх описаних нами дослідах не було.

Вологий пісок шаром в 2,5 *см* насипався в плексигласовий циліндр. Всередині зразка були вмонтовані шість датчиків вологості та шість кінців мідно-константанових термопар. Датчики температури та вологості розташовувались всередині зразка на рівних відстанях від поверхні, з якої відбувалось випаровування. Датчики за допомогою ртутних контактів по черзі підключались чи до вологоміру [5], чи до чутливого дзеркального гальванометра. Плексигласовий циліндр було підвішено до плеча терезів, за допомогою яких визначалась зміна ваги зразка. Така методика дозволяла одночасно з встановленням поля вологи та температури визначати також криву сушіння, швидкості сушіння. Загальна вага зразка дозволяла також контролювати точність запропонованої нами методики визначення поля вологостей: дійсно, вагова вологість повинна співпадати з інтегральною вологістю, яка може бути обчислена як площа під кривою розподілу вологи.

На рис. 1 та 2 представлені криві розподілу вологи та температури всередині кварцового піску різних фракцій (криві розподілу температури представлені лише для фракції піску 0,8—0,6 *мм*). На вертикальних осях відкладено значення абсолютної вологості в процентах та температура в градусах, на горизонтальних осях відкладена відстань точок від поверхні тіла в сантиметрах, з якої відбувається випаровування. Вагову вологість в кожному випадку можна визначити з точністю $\pm$ 0,5% як площу під кривою розподілу. По вертикальних осях легко знаходиться вологість на поверхні, при якій мають місце критичні точки кривої швидкості сушіння.



W%
1,2–0,8
240 510
690
1160
1450
1670
1860
2080
2300
2500
2800
3000
3190
3470
3700
3950
4330
4930мин
h см
0,8–0,6
90 520
770
980
1130
1380
1610
1850
2150
2440
2710
3020
3240
3500
3810
4040
4340
4950мин
0,6–0,3
60 270
480
680
880
1110
1310
1490
1670
1910
2120
2360
2600
2870
3050
3410
3710
4260мин
0,3–0,15
60
305
540
760
890
1250
1460
1670
1970
2220
2440
2700
2950
3180
3430
3690
3940
4260
4520
4930мин
0.15–0.05
60
330
640
870
920
1230
1460
1650
1850
2060
2280
2550
2720
2990
3250
3380
3640
3890
4130
4250
4370
мин

Рис. 1.

Криві розподілу вологи дозволяють нам зробити декілька висновків. Все капілярно-пористе тіло до другої критичної точки кривої швидкості сушіння можна розбити на дві «зони», першу — поверхневу, в якій вологість по глибині однакова чи майже однакова; і другу — глибинну, градієнт вологості в якій значний. Вирівнювання вологості в цих «зонах» наступає лише після другої

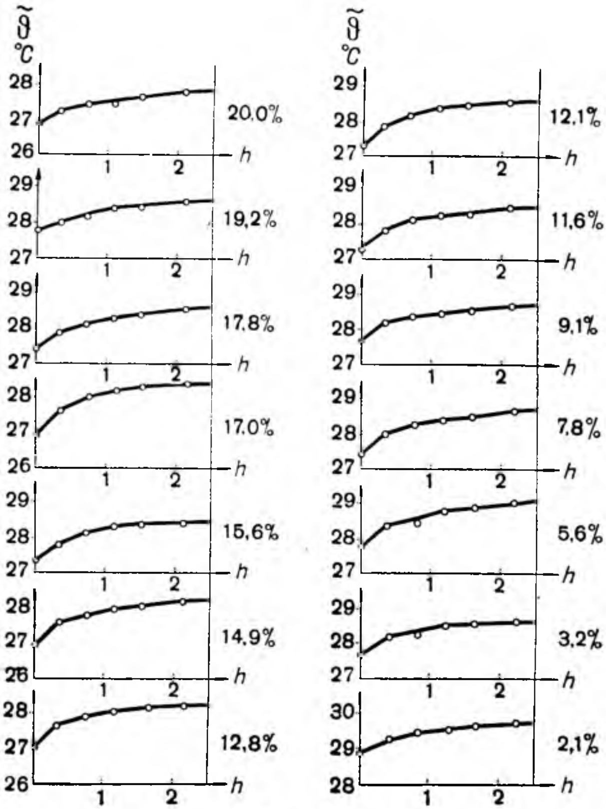


Рис. 2.

критичної точки кривої швидкості сушіння. До другої критичної точки кривої швидкості сушіння протікає майже без градієнта вологості на поверхні, якщо цей градієнт і існує, то його величина лежить за межами чутливості запропонованої нами методики визначення поля вологості.

Співвідношення між цими «зонами» для різних фракцій кварцового піску різне: для малих фракцій переважає перша «зона»; для великих фракцій — друга «зона». Залежність між «глибиною» першої «зони» та величиною оберненою «середньому радіусу фракції» (яка пропорційна радіусу кривизни меніска в порі при критичних станах), виявилась лінійною. Це нагадує нам підняття рідини в одиничному капілярі, яке характеризується формулою Жюрена.

Незначний градієнт вологості в поверхневому шарі, співвідношення поміж «глибиною» поверхневої зони і величиною «$\frac{1}{r}$», що нагадує нам підняття рідини в одиничному капілярі, дозволяє нам розглядати першу зону, як сукупність деяких своєрідних капілярів, верхній кінець яких відкрито назовні, а нижній — занурено в рідину («нижня зона»). Внаслідок однакових граничних умов рух рідини в стопі таких капілярів можна ототожнювати з рухом рідини, який було докладно вивчено в роботі А. П. Порхаєва [7].

Розподіл температури всередині кварцового піску фракції 0,8—0,6 *мм* дещо відрізняється від тих, що наводяться в літературі. В випадку сушіння вологого кварцового піску при жорсткому режимі температура на поверхні більша за температуру всередині тіла. Це пояснюється наявністю на поверхні значної кількості сухих місць. Внаслідок малої теплопровідності сухого кварцового піску рух тепла всередині тіла гальмується.

В нашому випадку (сушіння в м'якому режимі) картина дещо інша. Температура на поверхні на 1—3° менша за температуру в глибині тіла; це пояснюється тим, що при сушінні в м'якому режимі рух тепла до поверхні значний. Сухих місць на поверхні немає, поверхня тіла охолоджується за рахунок випаровування вологи.

З наведених кривих розподілу температури видно, що в випадку сушіння в м'якому режимі всередині тіла існує значний температурний градієнт, цей градієнт змінюється в процесі сушіння. Найбільшого значення він досягає в поверхневому шарі (2—3 *мм*). На початку сушіння він незначний, починаючи з 18% вологи температурний градієнт досягає свого максимального значення, потім на протязі всього процесу сушіння він майже не змінюється. Зменшується до нуля він лише після другої критичної точки швидкості сушіння.

Наведені в даному повідомленні криві розподілу вологи та температури дозволили нам зробити ряд висновків про фізичну природу та особливості руху рідини всередині капілярно-пористого тіла при вологостях, що відповідають критичним значенням кривих швидкості сушіння, та запропонувати нову методику визначення коефіцієнтів потенціалопровідності та термоградієнтного коефіцієнта.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков, Теория сушки, М.—Л., 1950.
2. А. В. Лыков, А. Г. Колесников, ЖТФ, т. 11, 7—8, 1932.
3. Egner, Beitrage zur Kenntniss der Feuchting Keits bewegung in Holzen, 1933.
4. N. H. Geaglsk and Hougen, Ind. Eng. Ch., 29, 7, 805, 1937.
5. М. В. Венедіктов, Наукові записки Станіславського педагогічного інституту, вип. 1, 3, 1955.
6. М. В. Венедиктов, Исследование движения свободной влаги в типичном капиллярно-пористом теле в процессе сушки (диссертация), 1955.
7. А. П. Порхаев, Колл. ж., XI, 6, 346, 1946.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

М. В. ВЕНЕДІКТОВ,
кандидат фізико-математичних наук

ФІЗИЧНА ПРИРОДА КРИТИЧНИХ ТОЧОК КРИВОЇ ШВИДКОСТІ СУШІННЯ ТИПОВОГО КАПІЛЯРНО-ПОРИСТОГО ТІЛА

Повідомлення 2

Процес сушіння капілярно-пористого тіла за своєю природою не однорідний [1]. Найбільш чітко цю неоднорідність можна помітити на кривих, які носять назву кривих швидкості сушіння. Ці криві характеризують залежність між швидкістю зміни вологості зразка та часом, який пройшов від початку сушіння. Криві швидкості сушіння одержують з кривих сушіння методом графічного диференціювання. Криві сушіння виражають залежність між ваговою вологістю зразка і часом, що пройшов від початку сушіння. Вони можуть бути одержані таким чином: зразок, що нами вивчається, в формі пластини підвішено до одного з плечей терезів. Всі сторони його, крім однієї, вкрито шаром вологоізоляції. Сушильна установка являє з себе камеру, в якій підтримується постійною температура повітря, його вологість, швидкість потоку. Випаровування вологи відбувається лише з однієї вологонеізольованої сторони. Зміна ваги зразка визначається за допомогою терезів.

Аналізуючи криві швидкості сушіння, весь процес сушіння можна розбити на два періоди: період постійної та період спадної швидкості сушіння. На кривих швидкості сушіння досить чітко виділяються особливі точки, які обмежують періоди сушіння. Ці точки носять назву критичних. Вони здійснюються лише для цілком певних вологостей, які називаються критичними.

Відомо, що критичні вологості кривої швидкості сушіння пов'язують з особливими станами рідини в капілярно-пористому тілі. Рухомість вологи у вигляді рідини чи пари на різних періодах сушіння повинна бути різною. Вона знаходить своє відображення в зміні коефіцієнта потенціалопровідності та термоградієнтного коефіцієнта [1].

Разом з тим, як нам відомо з літературних джерел, нема експериментального дослідження, в якому визначено співвідношення між критичними точками кривих швидкості сушіння, критичними точками кривих залежності коефіцієнтів переносу в формі коефіцієнтів a_γ та δ з величинами вологості особливих станів рідини капілярно-пористого тіла. Це і зрозуміло: всі методики, що застосовувалися різними авторами для визначення поля вологості, вели до фактичного знищення зразка, і тому не дозволяли провести таке вивчення. Виконання цієї задачі стало можливим лише тому, що нам вдалося запропонувати методику визначення поля вологостей, позбавлену від вище зазначених недоліків. Ця робота являє собою

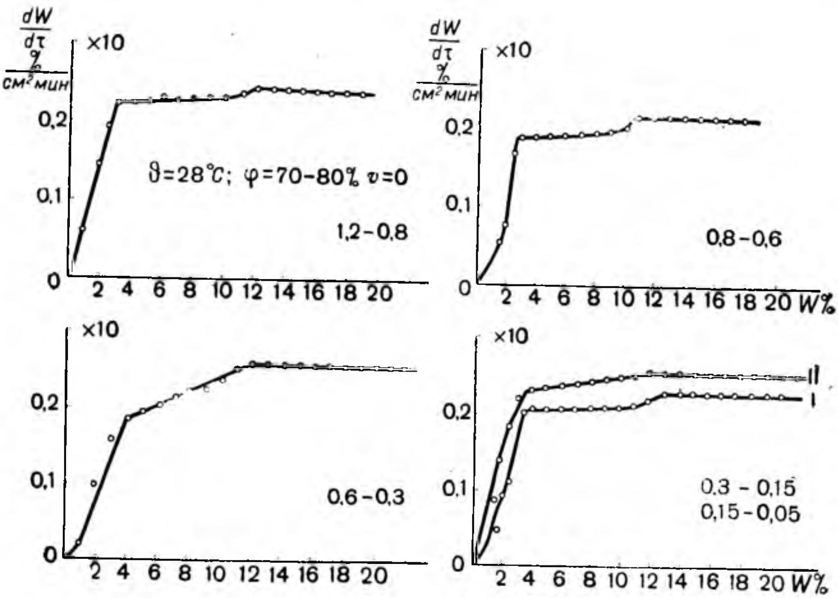


Рис. 1.

частину загального дослідження, метою її є встановити природу критичних точок кривої швидкості сушіння.

Нами була зібрана сушильна установка, опис її наведено в повідомленні 1. За допомогою цієї установки були одержані криві розподілу вологи та температури. Одночасно були одержані криві швидкості сушіння. Здебільшого в літературі приводяться криві швидкості сушіння, розраховані на вагову вологість. Власне кажучи, такі криві для аналізу руху вологи мало придатні: вагова вологість залежить від товщини зразка і тому не може характеризувати фізичної природи критичних точок. Запропонована нами методика [2] дозволила нам одержувати криві швидкості сушіння, віднесені не до вагової вологості, а до вологості на поверхні зразка. Такий добір вологості цілком зрозумілий, оскільки хід сушіння регулюється випаровуванням вологи на поверхні. На рис. 1 зображені криві швидкості сушіння для п'яти фракцій кварцового піску (1,2—0,8; 0,8—0,6; 0,6—0,3; 0,3—0,15; 0,15—0,05 *мм*), який було взято як типове капілярно-пористе тіло. Величини вологості на поверхні одержані безпосередньо з кривих розподілу вологи. Значення вологостей як вагової, так і поверхневої, при яких має місце критичне значення кривої швидкості сушіння, подано в табл. 1.

Таблиця 1

Діаметр фракції піску (в к/мм)	1,2—0,8		0,8—0,6		0,6—0,3		0,3—0,15		0,15—0,05	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
1. Вологість в % в першій критичній точці кривої швидкості сушіння	11,7	7,5	11,7	8,0	11,8	9,0	12,8	10,0	12,0	10,8
2. Вологість в % в другій критичній точці кривої швидкості сушіння	2,7	2,7	2,8	2,8	3,5	3,8	3,4	3,7	3,7	3,8

Примітка. В стовпчик I занесено вагову вологість, в стовпчик II занесено вологість на поверхні.

Вивчаючи табл. 1, можна зробити ряд висновків:

1. Інтегральна (вагова) вологість зразка, що висушувався, не завжди співпадає з поверхневою вологістю; ця розбіжність зменшується з зменшенням розміру фракції піску. Найбільше значення ця розбіжність має в першій критичній точці фракції 1,2—0,8 *мм*. Це вказує на значну нерівномірність розподілу вологи у першої критичної точки кривої швидкості сушіння. Нерівномірність розподілу вологи з зменшенням розміру фракції зменшується.

2. Вологість в другій критичній точці на поверхні тіла приблизно співпадає з ваговою вологістю. Це вказує на майже рівномірний розподіл вологи поблизу другої критичної точки.

Для того щоб розшифрувати фізичну природу критичних точок, а також механізм руху вологи в капілярно-пористому тілі, необхідно порівняти критичні вологості кривих швидкості сушіння з величинами вологості особливих станів вологи в капілярно-пористому тілі. Величина вологості, при якій мають місце особливі стани капілярної вологи, може бути визначена за способом, запропонованим Гріном та Амптом та дещо зміненим Хайнесом [3]. Ця методика полягає в такому: кварцовий пісок шарами різної товщини засипався на фільтрувальний папір, вкладений всередині бюхнеровської воронки, яка була сполучена з бюреткою-манометром. Піднімаючи рівень води в бюретці, одержують ряд значень всмоктуючого тиску при різних вологостях. Відповідне збільшення чи зменшення вологості в стані рівноваги визначається відліком по бюретці. Зрозуміло, що викладена вище методика дозволяє встановити залежність між значеннями всмоктуючого капілярного тиску та деякою середньою вологістю, яка в свою чергу не характеризує особливих станів рідини через те, що залежить від товщини шару. Критичні значення капілярного тиску слід відносити до

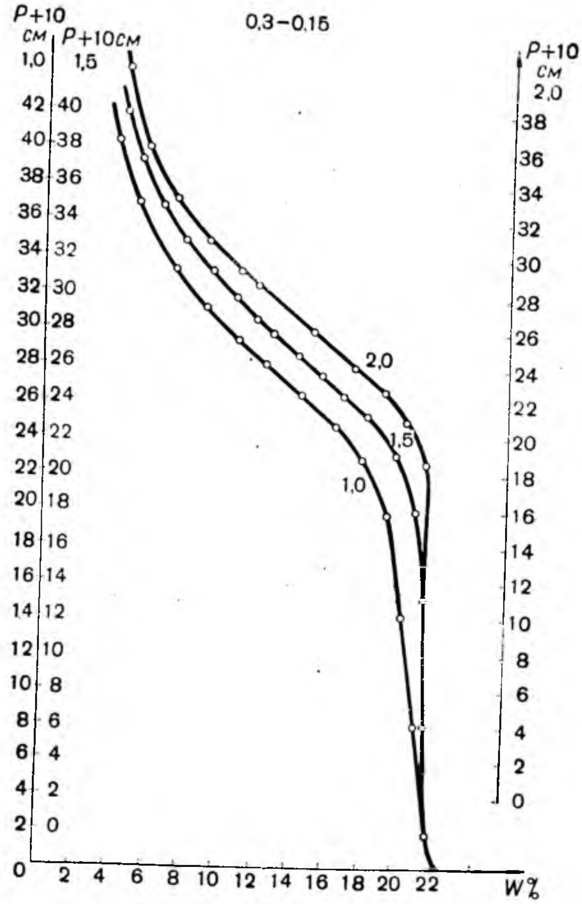


Рис. 2.

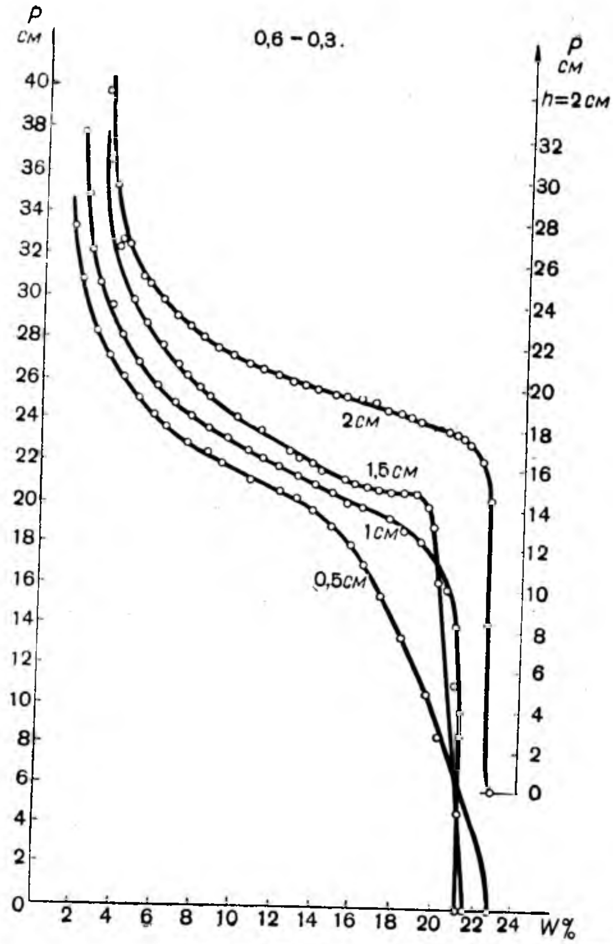
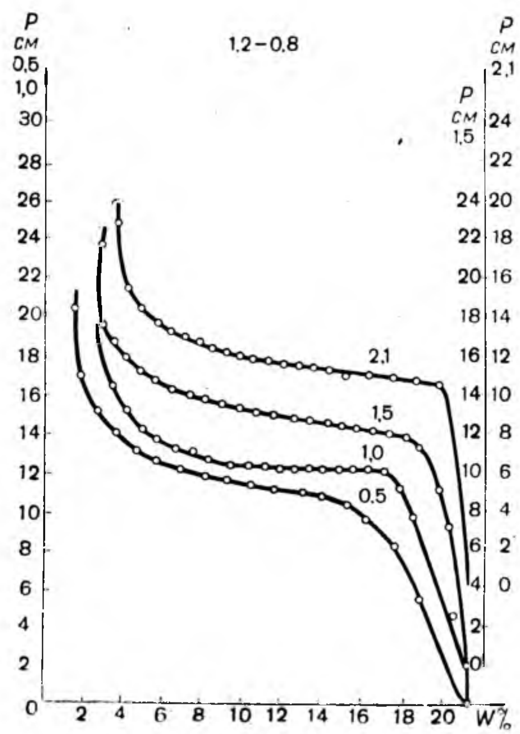


Рис. 2а



Рис, 2б.

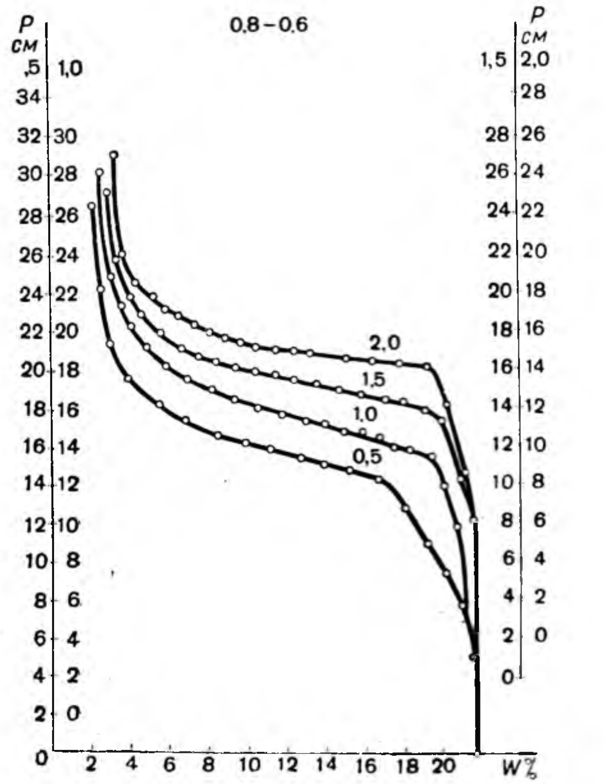


Рис. 2в.

вологості на поверхні, але для цього знову ж необхідно знати розподіл вологи всередині досліджуваного шару. Одержати цей розподіл досить важко, тому ми пішли іншим шляхом. Цей шлях дозволяє не лише визначити величину вологості особливих станів, але й дає змогу побудувати криву залежності капілярного тиску від поверхневої вологості. Ця залежність буде використана далі

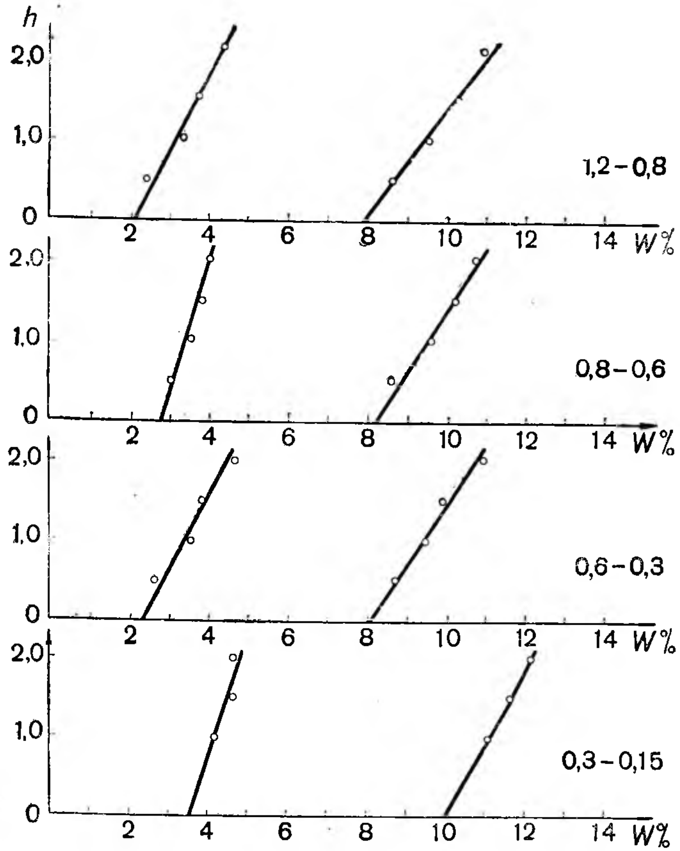


Рис. 3.

для визначення коефіцієнтів переносу ($\gamma_0 a', \delta$). Використовуючи раніше вказану методику, ми визначали криві від'ємного капілярного тиску для шарів різної товщі (2,0; 1,5; 1,0; 0,5 *см*). Провести такі вимірювання для кварцового піску фракцій 0,15—0,05 *мм* нам не вдалося. Результати вимірювання подані на рис. 2.

Порівнюючи між собою криві від'ємного капілярного тиску, одержані для зразків різної вологості, можна встановити залежність значень критичних вологостей від товщі шару (рис. 3). Ця залежність в першому наближенні може вважатись лінійною.

Методом екстраполяції можна знайти на рис. 3 критичні значення вологості для зразків «нульової товщі», тобто віднести ці значення до поверхневого шару. Таким чином, нами були одержані критичні значення вологості, при яких мають місце особливі стани вологи: «капілярний» стан, стан «затиснутого повітря», стан «затиснутої води». Значення вологості особливих станів вологи подано на табл. 2.

Таблиця 2

Діаметр фракції в *мм*	1,2—0	0,8—0,6	0,6—0,3	0,3—0,15
Вологість 2-го особливого стану (стан «затиснутого повітря») в % . .	7,8	0,2	8,1	10,0
Вологість 3-го особливого стану (стан «затиснутої води») в %	2,1	2,8	2,2	3,5

Тепер є можливість порівняти критичні значення вологостей, при яких мають місце критичні точки кривих швидкості сушіння з величинами вологості особливих капілярних станів. Порівняємо між собою дані, занесені в табл. 1 та дані, занесені в табл. 2, що відповідають значенням вологості особливого капілярного стану. Легко помітити досить добре співпадання значень вологостей в першій критичній точці з вологістю другого капілярного стану і вологостей другої критичної точки з вологостями другого капілярного стану. Значення вологостей співпадає з точністю $\pm 0,5\%$.

Виходячи з цього, ми можемо говорити, що критичні точки кривих швидкості сушіння обумовлені не різною природою вологи в тілі (вільна волога, адсорбційнозв'язана волога), а особливостями розташування вологи в капілярно-пористому тілі, «геометрією вологи». Таким чином, перша критична точка на кривій швидкості сушіння наступає в той момент, коли закінчується капілярний стан вологи і має місце стан «затиснутого повітря»; друга критична точка наступає тоді, коли закінчується стан «затиснутого повітря» і починається стан «затиснутої води».

ЛІТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков, Теория сушки, М.—Л., 1950.
2. М. В. Венедіктов, Визначення розподілу вологи в типовому капілярно-пористому тілі в процесі сушіння. Наукові записки Станіславського педінституту, фізико-математична серія, вип. I, 3, 1954.

НАУКОВІ ЗАПИСКИ СТАНІСЛАВСЬКОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ІНСТИТУТУ
Вип. 2 Фізико-математична серія 1959

М. В. ВЕНЕДІКТОВ,
кандидат фізико-математичних наук

КОЕФІЦІЄНТИ ПЕРЕНОСУ РЕЧОВИНИ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТОГО ТІЛА

Повідомлення 3

Характер руху вологи всередині капілярно-пористого тіла на різних періодах сушіння різний. Фізична природа вологи всередині капілярно-пористого тіла може бути пояснена з кривих від'ємного капілярного тиску, але механізму руху вологи ці криві розкрити не здатні. Про механізм руху вологи (рідина, пар), як показав в своїх роботах А. В. Ликов, ми можемо судити з кривих, що характеризують залежність коефіцієнтів переносу речовини від вологості. Характер цієї залежності у випадку руху вологи у вигляді рідини чи пари повинен бути різним. В процесі сушіння, на різних періодах його, розподіл вологи всередині тіла змінюється, змінюється також співвідношення поміж кількістю пари та рідини, що рухаються до поверхні. Метою цієї роботи є визначити залежність коефіцієнтів переносу речовини від вологості та за допомогою цієї залежності на основі результатів, наведених в роботах [1], [2], зробити спробу пояснити особливості протікання процесу сушіння капілярно-пористого тіла в м'якому режимі.

В наш час розроблено достатньо методів визначення коефіцієнта потенціалопровідності та термоградієнтного коефіцієнта. Всі ці методи можна розподілити на дві групи: методи, засновані на стаціонарному масообміні, та методи, засновані на нестаціонарному масообміні. Вперше коефіцієнти потенціалопровідності (вологопровідності) були визначені Стілвеллом та Мартлеем на основі методу стаціонарного потоку вологи. Я. М. Мінеович ввів деяку зміну в конструкцію приладів, це дозволило йому визначити цей коефіцієнт також для вологостей, більших, ніж гігроскопічна. В його роботі коефіцієнт визначався для часов'ярської глини в суміші з шамотом. Визначення коефіцієнта потенціалопровідності для кварцового піску за допомогою цієї методики пов'язане з рядом труднощів: установка буде досить громіздкою. Методи нестаціонарного режиму виявились також непридатними; як видно з кривих розподілу вологи, градієнт вологості в поверхневому шарі незначний, визначення його викличе значну похибку. В останній час розроблено ряд методів визначення коефіцієнтів переносу на основі стаціонарного потоку [4], а також нестаціонарного потоку тепла [5], [6]. Значною перевагою останніх з них є те, що вони дозволяють одночасно визначати також коефіцієнти теплопровідності на температуропровідності. Для проведення цих методів на досліді жодна з одержаних нами раніше кривих не може бути використаною. Тому ми вирішили розробити таку методику визначення коефіцієнтів переносу, яка була безпосередньо пов'язана з одержаними нами результатами.

Таку методику вдалось розробити. Як це випливає з попередніх повідомлень, характер розподілу вологи та тепла такий: в періоді постійної швидкості сушіння градієнт вологи в поверхневому шарі майже відсутній, в той час як градієнт температури найбільший. Це ж саме має місце і в періоді спадної швидкості сушіння (аж до вологостей, що відповідають стану затиснутої води).

Однак значний градієнт температури при відсутності градієнта вологи все ж не є доказ того, що явище вологопровідності під впливом градієнта вологи у вигляді рідини чи пари відсутнє. І в цьому випадку ми повинні говорити про явище вологопровідності, але при цьому ми повинні розуміти, що цей рух відбувається під впливом градієнта вологи, який утворюється двома «зонами» всередині капілярно-пористого тіла (про «зони» дивись в повідомленні 2).

Зникаючий градієнт вологості вказує тільки на те, що в даному випадку вологопровідність визначається не дифузією, а капілярними явищами, які зв'язані з наявністю градієнта в усьому тілі. Явище вологопровідності в капілярно-пористому тілі з значною кількістю макрокапілярів може бути пояснено на основі теорії руху в'язкої рідини, яка була запропонована Порхаєвим [7]. Основне рівняння руху рідини (якщо знехтувати малими величинами швидкості руху вологи $(\bar{v})^2$ та $\dot{\bar{v}}$, а також силою тяжіння) на підставі цієї теорії має вигляд:

$$i = -\gamma_p \frac{dl}{d\tau} = -\frac{r_x^2 \gamma_p}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

де i — потік вологи через поперечний переріз капіляра, r_x — радіус меніска всередині капіляра, σ — коефіцієнт поверхневого натягу, η — в'язкість рідини, γ_p — об'ємна вага рідини, $\frac{\partial p}{\partial x}$ — градієнт капілярного тиску, γ_0 — об'ємна вага кварцового піску.

В цю формулу може бути введений градієнт вологості вздовж капіляра, тоді для підрахунку коефіцієнта потенціалопровідності необхідно знати, як змінюється капілярний тиск в залежності від кількості вологи. Цю залежність ми можемо легко одержати з кривих капілярного тиску. Її ми можемо одержати за допомогою графічного диференціювання кривої від'ємного капілярного тиску. Легко бачити, що коефіцієнт, що стоїть перед виразом градієнта вологи, є нічим іншим, як коефіцієнтом потенціалопровідності. Отже, формула для підрахунку чисельної величини коефіцієнта «$a'\gamma_0$» має вигляд:

$$a'\gamma_0 = \frac{\gamma_p \sigma^2}{2\eta} = \frac{1}{p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial w}\right)_w. \qquad (2)$$

На підставі цієї формули були підраховані коефіцієнти потенціалопровідності для чотирьох фракцій піску: 1,2—0,8 *мм*; 0,8—0,6 *мм*; 0,6—0,3 *мм*; 0,3—0,15 *мм* для різних вологостей. Дані занесені в табл. 1.

Таблиця 1

w%	1,2—0,8 *мм*	0,8—0,6 *мм*	0,6—0,3 *мм*	0,3—0,15 *мм*
4	$11{,}2 \times 10^{-3} \frac{1}{см/хв}$	8,1	5,2	—
5	8,9	7,1	4,3	1,7
6	6,0	6,8	3,7	1,4
7	5,2	4,8	3,3	1,3
8	3,8	4,2	2,8	1,0
9	3,9	2,6	2,3	0,9
10	4,0	2,7	2,4	0,9
11	4,2	2,8	2,6	0,8
12	4,3	2,9	2,7	0,9
13	4,5	3,0	2,8	0,9
14	4,6	3,1	2,9	0,9
15	4,8	3,2	3,1	1,0
16	5,0	3,3	3,2	1,0
17	5,2	3,5	3,4	1,1
18	5,4	3,5	3,5	1,1
19	5,6	3,8	3,7	1,2
20	5,8	4,0	3,9	1,3

Як випливає з табл. 1 та кривих, що побудовані на основі цієї таблиці (див. рис. 1), характер залежності коефіцієнта потенціалопровідності від вологості такий: коефіцієнт потенціалопровідності $a'\gamma_0$ з зменшенням вологості від 20% до 7—10% (для різних фракцій кварцового піску) зменшується, при дальшому спаданні вологості до 3—4% коефіцієнт $a'\gamma_0$ повільно зростає.

Як і слід було чекати, із зменшенням розміру фракції кварцового піску коефіцієнт потенціалопровідності зменшується. Якщо за допомогою одержаних значень для коефіцієнта $a'\gamma_0$ та величини потоку вологи через поверхневий шар i_n, що можна одержати з кривих швидкості сушіння, наближено розрахувати градієнт вологи в поверхневому шарі, то його значення для величин фракцій не перебільшує 0,1% *см* (для малих фракцій дещо більше ніж 0,1% *см*). Це повністю відповідає значенням градієнтів, які можна одержати з кривих розподілу вологи.

Для одержання значень термоградієнтного коефіцієнта використаємо основне рівняння руху вологи (при відсутності фазового переходу) всередині капілярно-пористого тіла, що записане для поверхневого шару:

$$i_{\text{п}} = m = a'\gamma_0 \operatorname{grad} w|_n + a'\gamma_0\delta \operatorname{grad}\theta|_n. \qquad (3)$$

Як це випливає з кривих розподілу вологи, градієнт вологості в поверхневому шарі відсутній. Приймемо його значення рівним

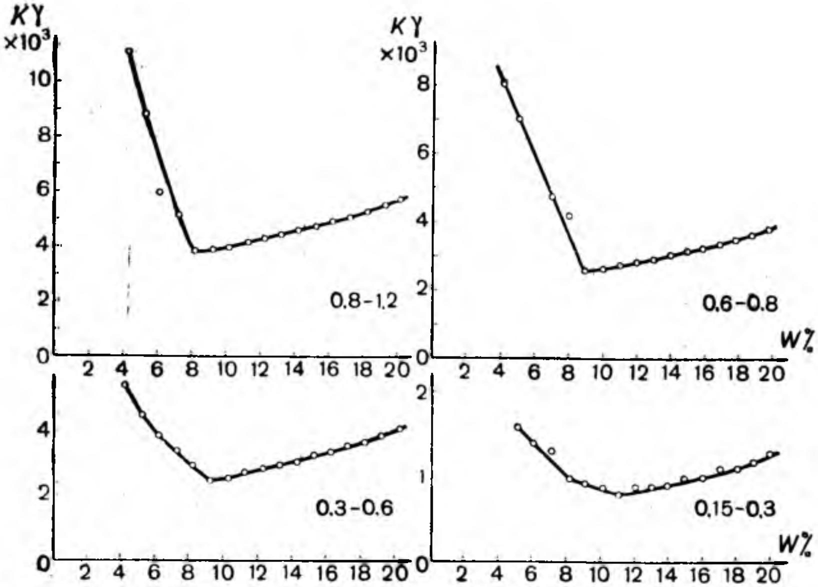


Рис. 1.

нулю. Це приводить до того, що в основному рівнянні (3) залишається лише другий член. Підставляємо в другий член значення коефіцієнта потенціалопровідності (2). Розв'язуючи одержаний вираз відносно термоградієнтного коефіцієнта, остаточно одержуємо формулу для розрахунку термоградієнтного коефіцієнта δ.

$$\delta = \frac{2\eta m}{\gamma_0 \sigma^2} \frac{p^2}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_w \left(\frac{\partial p}{\partial w}\right)_w}. \qquad (4)$$

Всі величини, що входять в формулу (4), можуть бути визначені дослідно: крім вже відомих величин (див. формулу 1) в формулу (4) входять ще величини m — швидкість сушіння, яка визначається з кривої швидкості сушіння для поверхневого шару; $\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_w$ градієнт температури в поверхневому шарі, який визначається з кривих розподілу температури (див. повідомлення 2).

На основі цих формул були розраховані значення термоградієнтного коефіцієнта для різних вологостей. Результати розрахунків занесено в табл. 2.

Таблиця 2

w%	1.2—0.8 мм	0.8—0.6 мм	0.6—0.3 мм	0.3—0.15 мм
4	0,023 $\frac{г}{град}$	0,029	0,039	—
5	0,028	0,032	0,050	0,14
6	0,043	0,034	0,062	0,17
7	0,050	0,050	0,074	0,18
8	0,071	0,058	0,093	0,23
9	0,069	0,095	0,121	0,26
10	0,067	0,091	0,116	0,27
11	0,064	0,088	0,107	0,30
12	0,063	0,085	0,104	0,29
13	0,060	0,082	0,100	0,28
14	0,058	0,072	0,096	0,27
15	0,056	0,077	0,090	0,25
16	0,054	0,075	0,089	0,24
17	0,052	0,070	0,082	0,23
18	0,050	0,068	0,080	0,22
19	0,048	0,065	0,075	0,21
20	0,046	0,061	0,072	0,20

Виходячи з табл. 2, побудовані криві залежності термоградієнтного коефіцієнта від вологості (рис. 2). Як видно з рис. 2, при зменшенні вологості кварцового піску від 20% до 10—7% (для різних фракцій) термоградієнтний коефіцієнт зростає, при наступному зменшенні вологості до 4—3% термоградієнтний коефіцієнт спадає. Подібну залежність коефіцієнта одержували в своїх дослідах інші автори [5]. Слід відмітити також хороше чисельне співпадання результатів, хоча величини коефіцієнтів одержані зовсім різними методами.

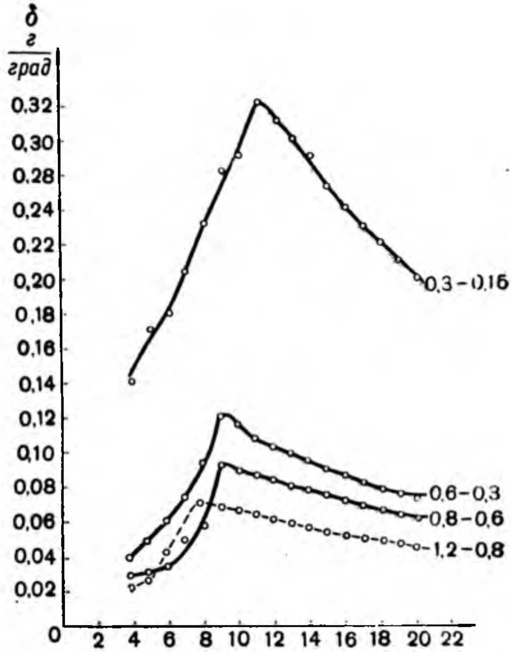


Рис. 2.

Результати наших досліджень можна звести в єдину таблицю, яка дозволить нам дати аналіз руху вологи в капілярно-пористому тілі.

З табл. 3 видно, що значення вологостей, при яких мають місце критичні точки кривої швидкості сушіння, кривої від'ємного капілярного тиску, кривих залежності коефіцієнтів $a'\gamma_0$ та δ від вологості з точністю в 3% співпадають.

Таблиця 3

	Розміри фракцій піску (в *мм*)			
	1,2—0,8	0,8—0,6	0,6—0,3	0,3—0,15
Перша критична точка кривої швидкості сушіння в %	7,5	8,0	9,0	10,0
Перша критична точка кривої залежності коефіцієнтів $a'\gamma_0$ та δ від вологості в %	8,0	8,5	8,6	10,0
Друга критична точка кривої від'ємного капілярного тиску в % . . .	7,5	8,2	8,4	10,2
Друга критична точка кривої швидкості сушіння в %	2,7	2,8	3,8	3,7
Третя критична точка кривої від'ємного капілярного тиску в % . . .	2,1	2,8	3,4	3,5

Таке співпадання дозволило нам зробити ряд висновків:

1) критичні точки кривої швидкості сушіння обумовлені різними станами капілярної вологи;

2) поміж критичними точками кривої швидкості сушіння та критичними точками кривих залежності коефіцієнтів переносу речовини $a'\gamma$ та δ існує безпосередній зв'язок: зміна цих коефіцієнтів відбиває зміну в характері руху вологи на різних періодах сушіння.

Досліди по вивченню поля вологостей, температур всередині капілярно-пористого тіла, а також залежність коефіцієнтів переносу від вологості приводять нас до такого уявлення про переміщення вологи всередині капілярно-пористого тіла при сушінні його в м'якому режимі.

Все тіло слід розбити на дві «зони». Перша «зона» розташована зверху. Градієнт вологості цієї «зони» незначний (менший за 0,1% вологості на сантиметр, а температурний градієнт значний) 1,5—1,7° на сантиметр. Друга «зона» розташована під першою в глибині тіла. Температурний градієнт в ній майже відсутній, градієнт вологості значний.

Рух вологи в першій зоні в періоді сталої швидкості сушіння відбувається за рахунок різниці капілярних тисків, а також різниці в тисках пари на кінцях капілярів першої «зони». Градієнт вологості вздовж капілярів першої «зони» незначний, градієнт температури великий: коефіцієнт потенціалопровідності спадає, термоградієнтний коефіцієнт зростає. Перша критична точка наступає тоді, коли вологість на поверхні досягає величини, що відповідає другій критичній точці кривої від'ємного капілярного тиску. Це відповідає кінцю капілярного стану та початку стану затиснутого повітря. При цих вологостях має місце мінімум кривої залежності коефіцієнта потенціалопровідності $a\gamma_0$ від вологості і максимум кривої залежності термоградієнтного коефіцієнта δ від вологості.

Починаючи з вологостей на поверхні, що відповідають першій критичній точці кривої швидкості сушіння (спадна швидкість сушіння), рух вологи у вигляді пари утруднений. Він супроводжується збільшенням від'ємного капілярного тиску. Рух вологи до поверхні відбувається: по-перше, за рахунок всмоктування її капілярами першої «зони»; по-друге, за рахунок випаровування вологи всередині тіла і руху її в вигляді пари по найбільших капілярах першої зони, що позбавилися частково води. Градієнт вологості в першій зоні незначний. Коефіцієнт потенціалопровідності з зменшенням вологості зменшується. Термовологопровідність сприяє переміщенню вологи у вигляді пари та рідини до поверхні. Термоградієнтний коефіцієнт зменшується: волога рухається як у вигляді рідини, а також у вигляді пари. Швидкість сушіння спадає. Друга критична точка кривої швидкості сушіння наступає в той момент, коли вологість на поверхні тіла досягає третьої критичної точки кривої від'ємного тиску (початок стану затиснутої вологи). В цей час розподіл вологи наближається до рівномірного.

Після другої критичної точки кривої швидкості сушіння в поверхневій зоні з'являється значний градієнт вологості. Температурний градієнт певний час не змінюється. Він починає спадати лише на кінець сушіння. Рух вологи у вигляді рідини неможливий: волога рухається у вигляді пари шляхом поглиблення зони випаровування. Швидкість сушіння спадає до нуля.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. В. Венедіктов, Розподіл вологи та температури всередині кварцового піску в процесі сушіння в м'якому режимі. Наукові записки СПІ, серія фіз.-мат., вип. 2, 1957.
2. М. В. Венедіктов, Фізична природа критичних точок кривої швидкості сушіння типових капілярно-пористих тіл. Наукові записки СПІ, серія фіз.-мат., вип. 2, 1957.
3. Я. Г. Мінеович, Про сучасний стан теорії сушільної справи. Доповнення до книжки Гірш «Теорія сушіння».
4. Н. Г. Фесенко, Термовологопровідність малосолених грязей та визначення в них наявності колоїдно (адсорбційно) пов'язаної води. Гідрохімічні матеріали, т 18, М.—Л., 1950.
5. І. Н. Баб'єв, Універсальний метод визначення коефіцієнтів переносу тепла та маси, дисертація, 1953.
6. С. П. Кузнецов, Нагрівання та охолодження вологих тіл, дисертація, 1952.
7. А. П. Пορхаєв, Кінетика всмоктування рідини елементарними капілярами та пористими тілами. Кол. ж. т. XI, 6, 346, 1946.

М. В. ВЕНЕДІКТОВ,
кандидат фізико-математичних наук

ДО ПИТАННЯ ПРО ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ВОЛОГИХ РЕЧОВИН ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ ПОТОЦІ ТЕПЛА

Як можна судити за літературними джерелами, склалось уявлення [1], що методи стаціонарного потоку тепла для визначення теплофізичних коефіцієнтів у випадку вологих речовин не придатні. Це твердження грунтується на тому, що навіть у випадку незначних перепадів температури у вологому тілі, теплообмін невід'ємний від масообміну [2]. Тоді основним рівнянням руху тепла та вологи всередині речовини буде [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= a\nabla^2 t - \varepsilon \frac{\rho}{\bar{c}} \frac{\partial u}{\partial \tau} \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= a'\nabla^2 u - a'\delta\Delta^2 t, \end{aligned} \tag{1}$$

де t — температура, τ — час, u — вологість, a — та a' коефіцієнти потенціалопровідності тепла та речовини, δ — термоградієнтний коефіцієнт, ε — критерій фазового переходу, $\bar{c}$ — зведена теплоємність, ρ — питома теплота випарування.

Ці рівняння виведені з урахуванням того, що закон теплопровідності у випадку постійного масоутримування має вигляд:

$$q = \lambda\nabla t - I_t a'\gamma_0\delta\nabla t - I_u a'\gamma_0\nabla u, \tag{2}$$

де $I_{t,u}$ — теплоутримування речовини (рідина, пара), що переноситься всередині тіла. Перенос теплоти, поглинутої речовиною у випадку значних перепадів температури, як показує дослід, значний.

Рівняння (2) може бути переписаним в такому вигляді:

$$q = -[\lambda + (I_t - I_u)a'\gamma_0\delta]\,\nabla t = -[\lambda - \lambda_п]\,\nabla t. \tag{3}$$

З рівняння (3) видно, що до коефіцієнта теплопровідності сухої речовини додається деяка «добавка», яка дорівнює:

$$\lambda_п = (I_t - I_u)a'\gamma_0\delta. \tag{4}$$

Тому слід казати про деякий еквівалентний коефіцієнт теплопровідності λ_e, пов'язаний з критерієм теплопровідності таким співвідношенням:

$$\frac{\lambda_п - \lambda}{\lambda} = a'_\lambda = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \qquad (5)$$

Слід пам'ятати, що у випадку нестаціонарного потоку тепла (наприклад, регулярний режим), як і в випадку стаціонарного потоку, ми вимірюємо також деякі еквівалентні коефіцієнти теплопровідності, теплоємності та температуропровідності (коефіцієнт потенціалопровідності тепла).

Характерною рисою всіх методів визначення еквівалентних теплофізичних коефіцієнтів є те, що всередині зразка утворюється нерівномірний розподіл температури та вологості. Тому вимірювані нами еквівалентні значення коефіцієнтів слід відносити до деяких середніх температур та вологостей. Якщо залежність теплофізичних коефіцієнтів від температури незначна, то від вологості залежність помітна. Тому температура і вологість, до яких слід відносити ці коефіцієнти, стають зовсім невизначеними. Щоб подолати ці труднощі і мати можливість відносити значення коефіцієнтів до «дійсної» вологості, ми вирішили стороннім полем нетемпературного походження вирівнювати розподіл вологи всередині зразка. Таким стороннім полем може бути обране електричне поле.

Відомо, що якщо вологий зразок (в нашому випадку волога глина) помістити між двома електродами, на які накласти сталу різницю потенціалів, можна спостерігати рух рідини внаслідок ендоосмосу [4]. Елементарна теорія ендоосмосу показує, що потік рідини крізь зразок буде рівний:

$$i = \frac{\xi\varepsilon\gamma_p}{4\pi\eta}\nabla\varphi, \qquad (6)$$

де ξ — дзетапотенціал, ε — діелектрична проникливість, η — в'язкість рідини, γ_p — густина рідини, φ — потенціал електричного поля. Підбираючи різницю потенціалів як за величиною, так і за напрямом, можна досягти рівності потоків рідини внаслідок термодифузії та внаслідок ендоосмосу:

$$i_e - i_t = 0. \qquad (7)$$

В дослідах було показано, що така рівність дійсно має місце.

Отже, співвідношення (7) приводить нас до такої формули:

$$\frac{\xi\varepsilon\gamma_p}{4\pi\eta}\nabla\varphi - a'\gamma_0\delta\nabla t - a'\gamma_0\nabla u = 0. \qquad (8)$$

Аналізуючи формулу (8), можна прийти до висновку, що при зміні електричного поля як за величиною, так і за напрямом при постійному масоутримуванні та при заданому градієнті температур, ми маємо можливість змінювати градієнт вологості всередині виучуваного зразка. Цілком зрозуміло, при заданому градієнті температур можна так підібрати електричне поле, що всередині зразка перепад вологи буде відсутній.

$$\nabla u = 0. \tag{9}$$

Це буде мати місце при $\nabla \varphi = \frac{V}{e}$, яке буде рівне:

$$\nabla \varphi = \frac{V}{l} = \frac{4\pi a' \gamma_0 \delta \eta}{\xi \varepsilon \gamma_p} \nabla t = \Gamma \nabla t; \tag{10}$$

в першому наближенні Г є величиною сталою.

Отже, при таким чином дібраній різниці потенціалів V на електродах, потік вологи, а отже, перенос тепла і речовини всередині тіла буде відсутній.

Тоді ми будемо вимірювати не еквівалентні значення коефіцієнта, а дійсні значення коефіцієнта теплопровідності при даній вологості. Метою даної роботи є показ правдивості формули (8), а звідси можливість добору V таким чином, що потік рідини всередині зразка буде відсутній.

З другого боку, формула (8) дає можливість розробити новий метод визначення коефіцієнта потенціалопровідності речовини a'.

Дійсно, якщо відсутня різниця потенціалів на електродах та масоутримування залишається сталим, то потік вологи внаслідок ендоосмосу буде рівний нулю ($i_e = 0$). Тоді формула (8) після простих перетворень перепишеться так:

$$\delta = -\frac{\nabla u}{\nabla t}. \tag{11}$$

Ми прийшли до вже відомої формули, виведеної А. В. Ликовим для визначення термоградієнтного коефіцієнта [5]. Методика визначення градієнта вологості та температури для нашого випадку може бути подібна до тої, яка розроблена в роботах Н. Г. Фесенко [6].

Тепер накладаємо різницю потенціалів на електроди. Можна побачити, що через деякий час встановиться стаціонарний розподіл температур. Значення коефіцієнта потенціалопровідності можна підрахувати за формулою

$$a' = \frac{\Gamma V}{e\gamma_0 (\nabla u + \delta \nabla t)} \tag{12}$$

Особливо слід відмітити той випадок, коли різниця потенціалів підібрана в такий спосіб, що $\nabla u = 0$. Переконатися в цьому ми можемо, використовуючи методику, запропоновану Г. І. Покровським та Н. А. Насєдкіним [7]. В цьому випадку ми також можемо одержати значення коефіцієнта теплопровідності λ, використовуючи формулу:

$$\lambda = \lambda_{ет} \frac{\nabla t_{ет}}{\nabla t}, \tag{13}$$

де $\lambda_{ет}$ — коефіцієнт теплопровідності еталонного зразка, $\nabla t_{ет}$, ∇t — температурні градієнти в еталоні та виучуваному зразку відповідно.

Розраховування Г за допомогою значення ξ — потенціалу, в'язкості, діелектричної проникливості вносить велику похибку. Більш раціонально величину Г визначати експериментально, виходячи з формули (8). Дійсно, якщо на виучуваний зразок не накладено температурне поле, то рух рідини буде відбуватися в напрямі до від'ємного електрода. Це приводить до утворення градієнта вологості. Внаслідок наявності такого градієнта волога буде переміщуватися в оберненому напрямі внаслідок вологопровідності.

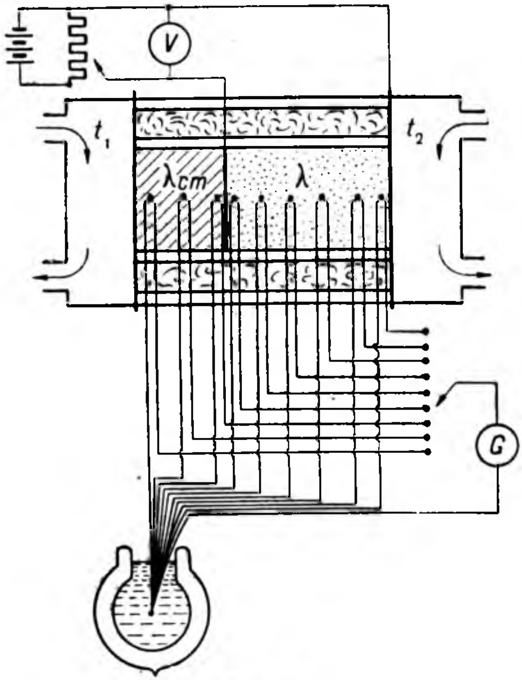


Рис. 1.

Ці два взаємообернені процеси при якомусь певному розподілі вологи взаємно компенсуються. Знаючи подібний розподіл, можна визначити Г з формули

$$\Gamma = \frac{a' l \gamma_0}{V} \nabla u. \qquad (14)$$

З формул (12) та (13) можна визначити як Г, так і a' — коефіцієнт потенціалопровідності.

Нами була зібрана така установка (рис. 1). Зразок (глина, джерело — м. Станіслав, УРСР) мав форму прямого циліндра висотою 5 *см*. Всередині зразка були розміщені 5 мідно-константанових термопар, які підключалися до дзеркального гальванометра, що був проградуйований в одиницях температури. Бічна поверхня зразка вологоізолювалася шаром трансформаторного паперу, який був вкритий нітроклеєм. Торці циліндра щільно притискувалися до двох циліндричних нагрівачів, розміри яких були: висота — 5 *см*, діаметр — 10 *см*. Нагрівачі виготовлялися з червоної міді, поверхня якої була залудженою. Щоб запобігти бічним тепловим втратам, зразок вміщувався в охоронний кожух. При визначенні коефіцієнта теплопровідності між циліндром та нагрівачем вміщувався еталонний зразок, всередині якого були поміщені 3 термопари. До нагрівача подавалася вода з двох термостатів, температура в яких підтримувалася з точністю до $\pm 0{,}5°C$. Нагрівачі одночасно використовувалися як електроди. У випадку роботи з еталонним зразком між ним та тим, що вивчався, вміщувався додатковий електрод. До нагрівача з великою температурою підводився мінус батареї, до протилежного нагрівача — плюс.

Через дві години після встановлення сталого розподілу температури зразок виймався з охоронного кожуха та особливим способом розрізався ножем на 5 частин завтовшки 1 *см* кожна. Середня вологість шару визначалася ваговим методом.

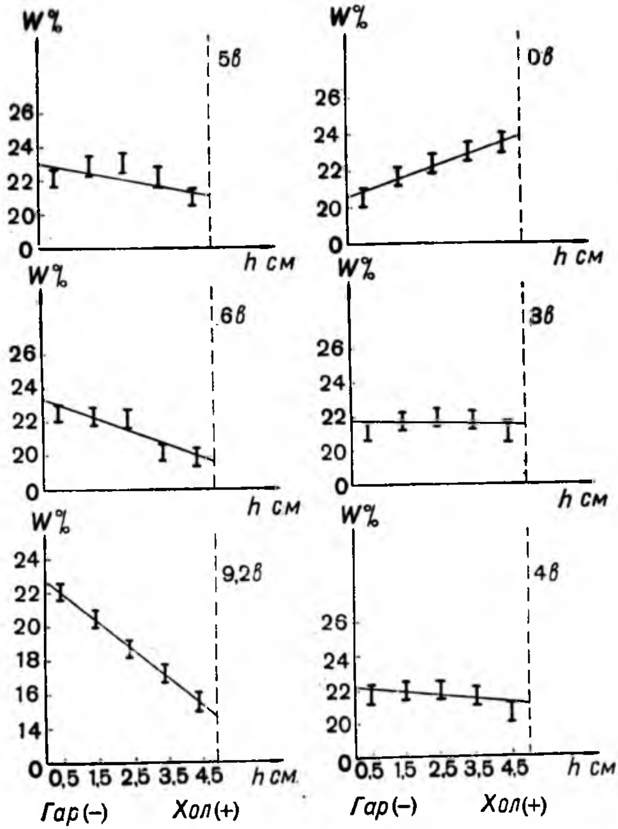


Рис. 2.

Точність визначення поля вологостей оцінена в $\pm 0{,}5\%$ вологості.

Наслідки дослідів зображені на рис. 2. На осях абсцис відкладали значення середньої вологості в шарі. Середня вологість була віднесена до середини шару. На осях ординат відкладались відстані шару від торця циліндра, що дотикався до нагрівача. Біля кривої розподілу написані різниці потенціалів, які накладалися на електроди.

З рисунка можна побачити, що експериментальні точки в межах точності викладаються на прямій лінії.

На підставі графіків складена табл. 1, яку наведено на стор. 138; градієнти вологості та температури підраховані графічним способом. З графи 6-ї таблиці видно, що величина $\frac{a'\gamma_0 l}{\Gamma}$ з точністю до 8% є величиною сталою та рівною 4,5±0,3, що й доводить справедливість формули 8.

Таблиця 1

№ п/п	V в	$\nabla u \frac{\%}{см}$	$\nabla t \frac{град}{см}$	$\delta \cdot 10^2 \frac{1}{град}$	$\frac{a'\gamma_0 l}{\Gamma}$
1	0	—0,6	5,6	0,106	—
2	3	+0,06	5,6	0,106	4,5
3	4	+0,20	5,6	0,106	4,6
4	5	+0,48	5,6	0,106	4,8
5	6	+0,80	5,6	0,106	4,4
6	9,2	+1,60	5,6	0,106	4,2

Відносну похибку в 8% слід вважати цілком нормальною, якщо врахувати, що відносна похибка визначення градієнта вологості методом розрізування зразка повинна бути оціненою в 5%.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Ф. Чудновський, Теплообмін в дисперсних середовищах, М., 1954.
2. М. В. Венедіктов, Дослідження руху вологи в типовому капілярно-пористому тілі в процесі сушіння, дисертація, К., 1955.
3. А. В. Ликов, Явища переносу в капілярно-пористих тілах, М., 1954.
4. С. М. Ліпатов, Фізико-хімія колоїдів, М. — Л., 1948.
5. А. В. Ликов, Теорія сушіння, М., 1950.
6. Н. Г. Фесенко, Гідрохімічні матеріали, т. 18, М.—Л., 1948.
7. Р. И. Покровський, Н. А. Наседкін, ЖТФ, 9, 1515, 1939.

ЗМІСТ

МП УССР. Станиславский Государственный
педагогический институт
(на украинском языке).
Государственное учебно-педагогическое издательство
«Радянська школа»
Научные записки, физико-математическая
серия, выпуск II

Технічний редактор *Н. К. Волкова*
Коректор *О. К. Лисенко*

Здано до набору 12/II 1959 р. Підписано до друку 26/VIII 1959 р. Папір 60 × 92$^1/_{16}$
Друк. арк. 8,75, видавн. арк. 8.53. Тираж 500. БФ 15489.

Державне учбово-педагогічне видавництво «Радянська школа».
Київ, Ново-Павлівська, 2. Видавн. № 9819.
Ціна 7 крб. 15 коп.

Надруковано з матриць Кн
тури УРСР, Харків, Доне
Міністерства ку

Головвидаву Міністерства ку
карні «Комуніст» Головвид
іська, 29. Зам. 385.